EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2013-II
30 JULIO DEL 2013

Duración: 6 horas
Instrucciones:

(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
(4) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(\mathscr{F}_i, i \in \mathbb{N})$ una colección de subσ-álgebras de $\mathscr{F}$.

(1) Defina qué significa que las σ-álgebras $(\mathscr{F}_i, i \in \mathbb{N})$ sean independientes.
(2) Pruebe que si $I_1, I_2, \ldots$ es una partición de $\mathbb{N}$ y definimos

$$\mathscr{G}_j = \sigma\left(\bigcup_{i \in I_j} \mathscr{F}_i\right),$$

entonces las σ-álgebras $(\mathscr{G}_j, j \in \mathbb{N})$ son independientes.

Problema 2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sea

$$Y_i = X_i \mathbf{1}_{|X_i| \leq i}.$$

Pruebe que

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i \text{ para una infinidad de índices } i) \in \{0, 1\}$$

y encuentre un criterio en términos de X_1 para discernir entre ambos casos.

Problema 3. Pruebe que si las variables aleatorias cuadrado integrables X y Y satisfacen $\mathbb{E}(Y^2 \mid X) = X^2$ y $\mathbb{E}(Y \mid X) = X$ entonces $X = Y$ casi seguramente.

Problema 4. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables independientes e idénticamente distribuidas con varianza 1 y media 0. Pruebe que la sucesión de variables aleatorias

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una variable no-degenerada pero que no lo hace en probabilidad. *Sugerencia: razone por contradicción y utilice la ley 0-1 de Kolmogorov.*

2. Procesos Estocásticos

Problema 5.

(1) Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una martingala. Pruebe que si $\mathscr{G}$ es una subσ-álgebra independiente de M entonces M es una martingala respecto de la filtración $\mathscr{F}_n = \sigma(\mathscr{G}, M_0, \ldots, M_n)$.

(2) Sean $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ y $N = (N_n, n \in \mathbb{N})$ dos martingalas independientes. Pruebe que $MN = (M_n N_n, n \geq 0)$ es una martingala.

Problema 6. Sea $S = (S_i, i \geq 1)$ una sucesión iid con valores en $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ y media finita μ. Sea R el proceso de tiempos residuales del proceso de renovación con tiempos interarribo S.

(1) Pruebe que R es una cadena de Markov.

(2) Especifique su matriz de transición, y pruebe que la distribución inicial

$$\pi_i = \frac{\mathbb{P}(S_1 \geq i)}{\mu}$$

es invariante.

Problema 7. Cada bacteria en una colonia se divide en dos copias idénticas después de un tiempo exponencial de parámetro λ, que a su vez siguen la misma dinámica de subdivisión de manera independiente. Sea X_t el tamaño de la colonia al tiempo t y suponga que $X_0 = 1$.

(1) Muestre que la función generadora $\varphi(t) = \mathbb{E}\big(z^{X_t}\big)$ satisface

$$\varphi(t) = ze^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \varphi(t-s)^2 \, ds$$

y que por lo tanto (al hacer el cambio de variables $u = t - s$)

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \lambda \varphi(t) \left[\varphi(t) - 1\right].$$

(2) Deduzca que si $q = 1 - e^{-\lambda t}$ y $n = 1, 2, \ldots$ entonces

$$\mathbb{P}(X_t = n) = q^{n-1} (1 - q).$$

Problema 8.

(1) Dé la definición de proceso gaussiano y de movimiento browniano.

(2) Sea B un movimiento browniano y $X_t = e^{-t/2} B(e^t)\,, t \in \mathbb{R}$. Pruebe que X es un proceso gaussiano en $\mathbb{R}$ y calcule sus funciones de media y covarianza.

(3) Pruebe que X es estacionario, es decir, que para cualquier $s \in \mathbb{R}$ el proceso $(X_{t+s}, t \in \mathbb{R})$ tiene las mismas distribuciónes finito-dimensionales que X.