

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) \quad P(B) > 0$$

$$X \sim N(0,1) \quad P(X=3) = 0$$

$$\text{No puedo: } P(A|X=3)$$

¿De dónde sale la def.?

1. Noción frecuentista:

Se repite un experimento aleatorio indef.
Se registra "el resultado"
 $X_1, X_2, \dots$

$$P(A) \approx \frac{\# \text{ veces que ocurre } A \text{ en } n \text{ experim.}}{n}$$

$$(\approx \lim_{n \rightarrow \infty})$$

¿Qué sucede si descarto las realizaciones en las que no sucede el evento B?

$$\frac{\# \text{ veces que ocurre } A \text{ en } n \text{ exp. quitando en las que no ocurre } B}{\# \text{ veces que ocurre } B \text{ en } n \text{ exp.}}$$

$$\approx \frac{P(A \cap B) \cdot n}{P(B) \cdot n}$$

(X, Y) con densidad $f_{X,Y}$

$$f_{X|Y=y}^{(X)} = f_{X,Y}(x,y) / f_Y(y)$$

Objetivo: Encontrar una def. de esp. cond. (o proba condicional) que contenga y de sentido a todas las distintas def.

$$\text{Kolmogorov (1933): } E(\mathbb{1}_A) = P(A)$$

$$X \text{ simple } \mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0,1\}$$

$$\sum c_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

$$A_i \text{ son } \times \text{ pares } E(X) = \sum c_i P(A_i) \quad \mathbb{R}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{E.C. respecto de: } X \text{ v.a. } \mathcal{F}\text{-álgebra } \mathcal{G}$$

$$\text{si } i \neq j. \quad \mathcal{T}(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{T}\text{-álgebra + pequeña}$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \quad \text{que contiene a } (a,b).$$

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

Heurísticamente: $\mathcal{T}$ -álgebra es la información a la que tenemos acceso.

$\mathcal{G} = \mathcal{T}(X)$: Se puede considerar como conocido el valor el valor de X .

$$\text{Ejemplo: } \Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\} = \{1, \dots, 6\}^2$$

$$\mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega\} \quad A = \{(1,2), (1,3)\}$$

$\mathcal{G}$: información generada por el primer dado.

$$\{(1,2)\} \times (\emptyset \text{ o } \mathcal{G}) \quad \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\} \quad A_1$$

$$= \{ \text{el 1er dado cayó en 1} \}$$

$\in \mathcal{G}$

$$A_2 = \{(i,j) : i \in A, j \in \{1, \dots, 6\}\} \in \mathcal{G}$$

$$X_1(i,j) = i \quad X_2(i,j) = j \quad \mathcal{T}(X_1) = \{X_1^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

$$\mathcal{T}(X_1) = \{X_1^{-1}(B) : B \subset \{1, \dots, 6\}\}$$

toma sólo 2 valores.
 $\therefore$ es simple.

por def:

$$\mathcal{T}(X_1) = \{X_1^{-1}(B) : B \subset \{1, \dots, 6\}\}$$

$\omega \mapsto (i, j): (i \in A, j \in \{1, \dots, 6\}) \in \mathcal{G}$
 $\mathcal{F}_1(i, j) = i \quad \mathcal{F}_2(i, j) = j \quad \mathcal{T}(\mathcal{F}_1) = \{\mathcal{F}_1^{-1}(A): A \in \mathcal{F}_1\}$
 $A_1 = \{\omega \in \Omega: \mathcal{F}_1(\omega) = 1\} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1) = \{\mathcal{F}_1^{-1}(B): B \in \mathcal{F}_1\}$
 $A_2 = \{\omega \in \Omega: \mathcal{F}_2(\omega) \in A\}$

Def formal de $\mathcal{G}$: $\mathcal{T}(\mathcal{F}_1)$

Def (Esperanza condicional):

X variable aleatoria integrable
 $\mathcal{G}$: σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$
 (sub-álgebra).

$E(X|\mathcal{G})$ es una v.a.

$\mathcal{G}$ -medible, integrable y:

replica a la v.a. X :

$E(\mathbb{1}_A X) = E(\mathbb{1}_A E(X|\mathcal{G}))$

$A \in \mathcal{G}$

Nota: Si $X, Y \in L^1(\mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\forall A \in \mathcal{F} \quad E(\mathbb{1}_A X) = E(\mathbb{1}_A Y)$

entonces $X = Y$ c.s.

Propiedades de la esperanza condicional
 (o como es que se calcula a nivel práctico).

1- Linealidad: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, X, Y \in L^1 \quad E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}) = \alpha E(X|\mathcal{G}) + \beta E(Y|\mathcal{G})$

2- Positividad: $X \geq 0$ entonces $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$.

3- Estabilidad ($\mathcal{G}$ -homogeneidad) $X \in L^1$

Si Y es v.a. $\mathcal{G}$ -medible y $XY \in L^1$
 (por ej. si $E(X^2), E(Y^2) < \infty \Rightarrow E(XY) < \infty$)

entonces: $E(XY|\mathcal{G}) = Y E(X|\mathcal{G})$.

(La v.a. Y se toma como conocida y opera como constante).

4- Propiedad de independencia:
 Si $X \perp \mathcal{G} \quad (\mathbb{P}(X \in A, B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(B))$
 $B \in \mathcal{G}$.

Entonces: $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.

5- Esperanza iterada:

$E(X) = E(E(X|\mathcal{G}))$
 (de def: $\mathbb{1}_\Omega = 1 \quad E(X) = E(X \mathbb{1}_\Omega) = E(E(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_\Omega) = E(E(X|\mathcal{G}))$)

6- Propiedad de torre:

$\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \quad E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$

Nota: $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ X $\mathcal{G}$ -medible: Constante!!!

$E(X|\mathcal{G}) = E(X)$

$E(X \mathbb{1}_\emptyset) = 0 = E(E(X) \mathbb{1}_\emptyset)$

$E(X \mathbb{1}_\Omega) = E(X) = E(E(X) \mathbb{1}_\Omega)$

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$ es simple.
 por def: $E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

X es simple si $X = \sum_{i=1}^n C_i \mathbb{1}_{A_i}$
 (C_i distintas, A_i ajenas x pares)
 $E(X) = \sum C_i \mathbb{P}(A_i) < \infty$

$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$

$T = \sum i \mathbb{1}_{T=i}$ (Cualquier v.a. simple es integrable).
 $E(T) = \sum i E(\mathbb{1}_{T=i})$
 $E(T) = \sum i \mathbb{P}(T=i)$

$X \geq 0 \quad E(X) = \sup_{Y \leq X, Y \text{ simple}} E(Y)$

Y, Z son obs v.a. $\mathcal{G}$ -med. int.

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$

Nota: $Y = Z$ c.s.

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$E(X \mathbb{1}_A) = E(Y \mathbb{1}_A) = E(Z \mathbb{1}_A)$

$e^{-x} \rightarrow x^2$

$e^{-\lambda x}$ integrable

$x^{-\alpha} \quad \alpha > 0$

$X: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ es integrable $\Leftrightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \begin{cases} < \infty & \alpha > 1 \\ = \infty & \alpha \in (0, 1] \end{cases}$

Ejemplos:

$X_1, X_2, \dots$ v.a. i.i.d. $S_0 = 0 \quad S_n = X_1 + \dots + X_n$

N v.a. con valores $0, 1, 2, \dots \perp X$

S_N

N : de $= n \quad E(S_N) = E(S_n)$

$= \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \mu$

$E(S_N | N) = N \mu$

$E(S_N | N) = E(\sum_{i=1}^N X_i \mathbb{1}_{N=n} | N)$

$= \sum E(X_i \mathbb{1}_{N=n} | N)$ Aditividad

$= \sum \mathbb{1}_{N=n} E(X_i | N)$ Homogeneidad

$= \sum \mathbb{1}_{N=n} \mu = \mu N$

$E(X_t) = E(S_t) E(N_t) = \mu \lambda t$

$X_t = S_{N_t}$

$N_t \sim \text{Poi}(\lambda t) \quad N_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$

$E(S_N) = E(E(S_N | N))$

$= E(\mu N) = \mu E(N)$

$$E(X|A) = E(X) = E(E(X)|\mathcal{F}_2)$$

Ejercicio 1: Interprete la propiedad $E(XY|g) = X E(Y|g)$ si X es g -medible y tanto X como XY son integrables.

Ejercicio 2: Sean $(B_i, i \geq 1)$ v.a.i.i.d. con ley $\text{Ber}(p)$. $q = 1-p$
 Sea $S_n = B_1 + \dots + B_n$
 Defina $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2S_n - n}$.
 Simule trayectorias de 1000 pasos de V y de Z
 Cuando $q=p$ y cuando $p>q$ y diga si observe si identifica alguna tendencia al crecimiento.

Ejercicio 3: Modifique el código gwr.r para que estime:
 1) Esperanza del tiempo de extinción al comenzar con K individuos si $K=1,2,\dots,10$.

Resultados importantes sobre la esperanza condicional

Teorema de convergencia monótona
 (Permite intercambiar límites y esperanzas).

$Z_n: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ (v.a. no-negativas) $0 \leq Z_n \leq Z_{n+1} \forall n$.

Sea $Z: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ el límite (puntual, ω por ω
 $Z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) \forall \omega$ que existe al ser la suc. no-dec.)

Entonces: $E(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n)$ (aún cuanto estas cantidades sean infinitas)

Para esperanza condicional: $E(Z|g) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n|g)$

Casi seguramente.

$\left[\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, E(Z_n|g)(\omega) = E(Z|g)(\omega) \right]$

Lema de Fatou: $Z_n: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ (v.a. no-negativas)

Entonces: $E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n | g\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n | g)$.

$\left[(a_n) \text{ suc. de números reales: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]$
 (-1)ⁿ (más pequeño de los límites subsucesionales)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} a_m$$

Teorema de Convergencia Dominada

Sean $Z_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. Supongamos que $Z_n \rightarrow Z$ c.s.

y que existe una v.a. $Y \in L_1$ tal que $|Z_n| \leq Y$.

Entonces: $E(Z_n | g) \xrightarrow{\text{c.s.}} E(Z | g)$.

Desigualdad de Jensen: Si $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa

entonces: $\varphi(E(Z|g)) \leq E(\varphi(Z)|g)$.

$\left[\varphi \text{ es convexa si: } \begin{array}{c} \varphi(x) \\ \nearrow \searrow \\ x \quad y \\ \varphi(x) \end{array} \right]$

$$\begin{array}{l} \varphi(x) = x^2 \\ \varphi(x) = x^\alpha, \alpha \geq 2. \\ e^{x\varphi(x)} \end{array}$$

$\varphi'' \geq 0$.

Ejemplos de cálculo de esperanza condicional.

1: Equivalencia entre def. de esperanza condicional.

X, Y son v.a. $Y = (Y^1, \dots, Y^d)$ (vector aleatorio).

que toman a lo más una cantidad finita de valores.

$$h(y) = \sum_x x \mathbb{P}(X=x | Y=y) = \mathbb{E}(X | Y=y).$$

Veamos que $h(Y) = \mathbb{E}(X | Y)$.

Razón: $A \in \mathcal{T}(Y)$ entonces es unión de eventos de la forma $\{Y=y\}$.

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(h(Y) \mathbb{1}_A)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) &= \sum_{y \in B} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y=y}) = \sum_{y \in B} \sum_x x \mathbb{P}(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y=y) \sum_x x \mathbb{P}(X=x | Y=y) \\ &= \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y=y) h(y) \end{aligned}$$

Réplica

$$\begin{aligned} \bigcup_{y \in B} \{Y=y\} &= \{\omega : \exists y \in B \text{ s.t. } Y(\omega)=y\} \\ &= Y^{-1}(B) = \{\omega : Y(\omega) \in B\} \\ &= \mathbb{1}_{Y \in B} \end{aligned}$$

"

2.- Sumas de v.a. i.i.d.

$X_1, X_2, \dots$ v.a. reales independientes e integrables.

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \mathcal{F}_n = \mathcal{T}(X_1, \dots, X_n)$$

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$$

$$\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(S_m + (S_n - S_m) | \mathcal{F}_m)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(S_m | \mathcal{F}_m) + \mathbb{E}(S_n - S_m | \mathcal{F}_m) \\ &= S_m + \mathbb{E}(S_n - S_m). \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_m) + \mathbb{E}(S_n - S_m)$$

$$S_m = \{X_1, \dots, X_m\}$$

$\mathbb{E}(X_i) = 0$ pensamos que el juego es justo.

En ese caso $\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_m) = S_m$ propiedad de martingala.

3.- Martingala cuadratica: (X_i) v.a. i.i.d.

$X_i \in L_2$ (i.e. $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$, $\forall i$ s.t. $\mathbb{E}|X_i|^p < \infty$).

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) \quad (L_2 \subset L_1) \quad \sigma^2 = \text{Var}(X_i) = \mathbb{E}((X_i - \mu)^2)$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \mathbb{E}((S_n - n\mu)^2 | \mathcal{F}_m)$$

$$\mathbb{E}((S_n - n\mu)^2 | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}((S_m - m\mu + (S_n - S_m) - (n-m)\mu)^2 | \mathcal{F}_m)$$

$$= \mathbb{E}((S_m - m\mu)^2 | \mathcal{F}_m) + 2 \mathbb{E}[(S_m - m\mu)(S_n - S_m - (n-m)\mu) | \mathcal{F}_m]$$

$$+ \mathbb{E}((S_n - S_m - (n-m)\mu)^2 | \mathcal{F}_m)$$

$$= (S_m - m\mu)^2 + 2 [S_m - m\mu] \mathbb{E}(S_n - S_m - (n-m)\mu | \mathcal{F}_m)$$

$$+ \mathbb{E}((S_n - S_m - (n-m)\mu)^2)$$

$$= (S_m - m\mu)^2 + (n-m)\sigma^2.$$

$$\text{Conclusión: } Z_n = (S_n - n\mu)^2 \quad \mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}_m) = Z_m + (n-m)\sigma^2$$

Entonces: si $M_n = Z_n - n\sigma^2$:

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(Z_n - n\sigma^2 | \mathcal{F}_m) = Z_m + (n-m)\sigma^2 - n\sigma^2$$

$$= Z_m - m\sigma^2 = M_m.$$

$$\text{Martingala: } \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = M_m.$$

$$X_{m+1}, \dots, X_n \perp \mathcal{F}_m$$

$$\mathbb{E}(S_n - S_m - (n-m)\mu | \mathcal{F}_m)$$

$$= \mathbb{E}(S_n - S_m - (n-m)\mu).$$

$$= \mathbb{E}(X_{m+1}) + \dots + \mathbb{E}(X_n) - (n-m)\mu$$

$$= (n-m)\mu - (n-m)\mu = 0.$$

4.- Productos de v.a. independientes: $m \leq n$ $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. i. ≥ 0 . $\pi_n = X_1 \cdots X_n$

$$\mathbb{E}(\pi_n | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\pi_m X_{m+1} \cdots X_n | \mathcal{F}_m)$$

$$\stackrel{\pi_n / \pi_m}{=} \pi_m \mathbb{E}(X_{m+1} \cdots X_n).$$

$$= \pi_m \mathbb{E}(X_{m+1}) \cdots \mathbb{E}(X_n)$$

Si $\mathbb{E}(X_i) = 1$ entonces (π_n) es martingala.

$$\mathbb{E}(\pi_n | \mathcal{F}_m) = \pi_m$$

- 1.- Repaso de esperanza condicional: def., prop. de torre...
- 2.- Propiedades de la esperanza condicional: teo. de convergencia.
- 3.- Algunos ejemplos de cálculo de esperanza cond. (asociados a sumas y productos de v.a.i.).

Martingalas.

Definición: Una filtración es una colección creciente $(\mathcal{F}_n)$ de sub-álgebras de $\mathcal{F}$.

(Imaginamos que nos dicen cómo va creciendo la información)

Definición: Una martingala (relativo a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$) es una colección de variables aleatorias $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ tales que: $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) $X_n \in L_1$ (X_n es integrable)
- 2) (X_n) es $(\mathcal{F}_n)$ -adaptada (i.e. X_n es $\mathcal{F}_n$ -medible)
- 3) $\forall n \geq m$: $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m$.

Ejemplos (de esperanza condicional y de martingalas).

(X_i) iid. $\mathbb{P}(X_i=1)=p$ $\mathbb{P}(X_i=-1)=1-p$. $S_n = X_1 + \dots + X_n$
 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. $S_n - S_m = \underbrace{X_{m+1} + \dots + X_n}_{\perp \mathcal{F}_m}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n - S_m} | \mathcal{F}_m\right) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n - S_m}\right) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{m+1}} \dots \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{m+1}}\right) \dots \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right) \\ &\rightarrow = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_1}\right)^{n-m} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum f(x) \mathbb{P}(X=x)$$

$$\begin{aligned}\text{Como: } \mathbb{E}((M/P)^{X_1}) &= \frac{q}{p} p + \frac{p}{q} q = 1. \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^1 \mathbb{P}(X_1=1) + \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} \mathbb{P}(X_1=-1)\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_n) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = M_n.$$

Como: $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ y $S_n \in \{-n, \dots, n\}$ (es acotada)
y así M_n es acotada y $\therefore$ integrable.

$$M_n = f(\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{\mathcal{F}_n}) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{q}{p}\right)^{x_1 + \dots + x_n}$$

$\therefore M_n$ es $\mathcal{V}(X_1, \dots, X_n)$ -medible (M_n) es $(\mathcal{F}_n)$ -adaptada.

Se concluye que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala.

Veremos como (M_n) permite resolver el problema de la ruina.
(Vía el teorema de muestreo opcional de Doob).

Martingala asociada al proceso de Galton-Watson

Modelo informal: población cuyas individuos se reproducen al azar, teniendo K descendientes con probabilidad p_K . (A p se le conoce como ley de reproducción). Se supone que la # de desc. de los individuos son $\perp$.

Modelo matemático: $(\xi_{i,n})$ v.a.i.i.d. ($\xi_{i,n}$ se interpreta como la # de descendientes del i -ésimo individuo de la gen. n).

de interés: Z_n , $Z_0 = K$ Z_n : # ind. de la gen n .

$$Z_1 = \xi_{1,0} + \dots + \xi_{K,0} = \sum_{i=1}^{Z_0} \xi_{i,0}$$

$$Z_2 = \xi_{1,1} + \dots + \xi_{Z_1,1} = \sum_{i=1}^{Z_1} \xi_{i,1}$$

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}. \quad (\text{Nota: } Z_n = 0 \text{ entonces } Z_{n+1} = 0).$$

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}. \quad (\text{Nota: } Z_n = 0 \text{ entonces } Z_{n+1} = 0).$$

Martingala 1: Si $\alpha = \mathbb{E}(\xi_{i,n}) < \infty$ definamos:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_{i,m} : i \geq 1, m < n)$$

$$M_n = Z_n / \alpha^n \quad n \leq \infty$$

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_n / \alpha^n | \mathcal{F}_{n-1})$$

(Basta ver que $\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ para concluir que $\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = M_m$).

En efecto, por la prop. de torre e inducción

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_m)$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_{n+1} / \alpha^{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \mathbb{E}(Z_{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} | \mathcal{F}_n)$$

$$\stackrel{\text{t.c.m.}}{=} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\underbrace{Z_{n+1}}_{\text{indep.}} \mathbb{1}_{Z_n=k} | \mathcal{F}_n)$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k \xi_{i,n} | \mathcal{F}_n\right) \mathbb{1}_{Z_n=k}.$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k \xi_{i,n}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} k \alpha = \frac{1}{\alpha^n} Z_n = M_n$$

$\therefore \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$ + otras prop. $\therefore (M_n)$ es martingala.

Segunda martingala: $(\xi_{i,n})$ v.a.i.i.d. $\mathbb{P}(\xi_{i,n} = k) = \mu_k$.

Segunda martingala: $(\xi_{i,n})$ v.a.i.i.d. $\mathbb{P}(\xi_{i,n} = k) = \mu_k$.
 $Z_0 = k$ $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}$ φ : fnon. generadora de $\xi_{i,n}$.

$$\varphi(s) = \mathbb{E}(s^{\xi_{i,n}}) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mu_k$$

Dos ejemplos: 0 ó 2 descendientes con proba $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s^0 \frac{1}{2} + s^1 \cdot 0 + s^2 \frac{1}{2} + s^3 \cdot 0 + s^4 \cdot 0 + \dots \\ &= \frac{1}{2} (1 + s^2) \quad \mathbb{E}(\xi_{i,j}) = 1 \end{aligned}$$

0 ó 3 descendientes con proba $\frac{1}{2}$

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} (1 + s^3). \quad \mathbb{E}(\xi_{i,j}) = 3/2 > 1.$$

$$Z_0 = k \quad \mathbb{E}(s^{Z_1}) = \mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^k \xi_{i,0}}) = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^k s^{\xi_{i,0}}) = \prod_{i=1}^k \mathbb{E}(s^{\xi_{i,0}}) = \varphi(s)^k.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{Z_2}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{Z_2} | Z_1)) = \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_1=k} \mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^k \xi_{i,1}} | Z_1)) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_1=k} \varphi(s)^k) = \mathbb{E}(\varphi(s)^{Z_1}) = \varphi(\varphi(s))^k \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(s^{Z_r}) = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{r \text{ veces}}(s)^k$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s \\ \varphi(\varphi(s)) &= \varphi(s) = s. \\ &\vdots \\ \varphi \circ \dots \circ \varphi(s) &= s. \end{aligned}$$

(Los puntos fijos de φ son especiales)

Dos casos $\alpha \leq 1$: un único punto fijo: $s=1$.

$\alpha > 1$: dos puntos fijos $\underline{\rho} < 1$.

$$\mathbb{E}(\varphi^{Z_n}) = \rho^k \quad \text{para toda } n.$$

$M_n = \varphi^{Z_n}$: Af. M_n es martingala:

k 1

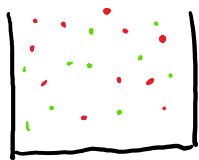
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(e^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = \sum \mathbb{1}_{Z_n=k} \mathbb{E}(e^{\sum_{i=1}^n \xi_{i,n}} | \mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} \mathbb{E}(e^{\sum_{i=1}^k \xi_{i,n}}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^k e^{\xi_{i,n}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} \varphi(p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} p^k \\
&= e^{Z_n} = M_n.
\end{aligned}$$

Con la martingala M y el teorema de muestreo opcional veremos que: 1) Si $\alpha \leq 1$, entonces C.S. $\exists n$ t.q. $Z_n = 0$

2) Si $\alpha > 1$ entonces $\mathbb{P}(\forall n, Z_n > 0) > 0$.

Martingalas y urnas de Pólya.

Modelo informal: Una urna contiene inicialmente r bolas rojas y v bolas verdes. ($r = 8$ $v = 10$) $X_0 = 8/18$



Se realiza el sig. experimento indefinidamente se extrae una bola de la urna y se devuelve con C bolas del mismo color.
 $C=2$

Cantidad de interés: X_n : ^{10/20.} proporción de bolas rojas en la urna después de la n -ésima extracción y reemplazo.

Modelo: $X_0 = r/(r+v)$ $r+v+C$ $r+v+2C$... U_1 unif.

$$Y_1 = \mathbb{1}_{U_1 \leq r/(r+v)} = \mathbb{1}_{U_1 \leq X_0}$$

(U_i) iid

$$X_1 = \frac{r+v}{r+v+C} X_0 + \frac{C Y_1}{r+v+C}$$

unif en $(0,1)$.

$$X_{n+1} = \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq X_n}$$

$$X_{n+1} = \frac{r+v+nc}{r+v+(n+1)c} X_n + \frac{C Y_n}{r+v+(n+1)c}$$

Af: (X_n) es una $(\mathcal{F}_n)$ -martingala donde $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad $(\mathcal{F}_n)$ filtración:

$\mathcal{F}_n$ es σ -álgebra $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.

Interpretación: información que se va acumulando

$\mathcal{F}_n$: información a la que se tiene acceso al instante n .

(X_n) proceso estocástico adaptado: X_n es $\mathcal{F}_n$ -medible $\forall n$.

$X_n \in L_1$ (X_n es integrable)

(X_n) es una supermartingala
martingala si $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$
submartingala = \geq

Incrementos: $\zeta_n = X_{n+1} - X_n$, $n \geq 0$.

Proposición: Si (X_n) es una $(\mathcal{F}_n)$ -martingala y $X_0 = 0$ y $X_n \in L_2$ ($E(X_n^2) < \infty$) entonces las v.a.

$\zeta_n = X_{n+1} - X_n$ son no-correlacionadas y:

$$E(X_n^2) = \sum_{i=1}^n E(\zeta_i^2).$$

Razón: Veamos que: $i < j$ $\text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) = 0$. Como

$$E(\zeta_i) = 0 \quad (E(\zeta_i) = E(X_{i+1} - X_i) = E(E(X_{i+1} - X_i | \mathcal{F}_i)) = E(E(X_{i+1} | \mathcal{F}_i) - X_i) = E(X_i - X_i) = 0.)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) &= E((\zeta_i - E(\zeta_i))(\zeta_j - E(\zeta_j))) \\ &= E(\zeta_i \zeta_j). \end{aligned}$$

Veamos que $E(\zeta_i \zeta_j) = 0$. $E(\zeta_i \zeta_j) = E((X_{i+1} - X_i)(X_{j+1} - X_j))$

$$\begin{aligned} &= E(E((X_{i+1} - X_i)(X_{j+1} - X_j) | \mathcal{F}_{i+1})) \\ &= E((X_{i+1} - X_i) \underbrace{E(X_{j+1} - X_j | \mathcal{F}_{i+1})}_{=0}). \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}(0) = 0.$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n | \mathcal{F}_n) = \bar{X}_n$$

$\therefore (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ Son no-correlacionados

$$\text{Var}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbb{E}((\xi_1 + \dots + \xi_n)^2)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 = \sum x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j$$

$$\text{Var}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \xi_i^2) + 2 \sum_{i < j} \overbrace{\mathbb{E}(\xi_i \xi_j)}^0$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \sum \mathbb{E}(\xi_i^2) = \sum \text{Var}(\xi_i).$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n^2)$$

Ejemplos de martingalas:

Martingala cerrada: Sea $X \in L_1$.

Definamos: $M_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$.

At: $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ es una $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ -martingala.

Razón: M_n es integrable pues por definición, la esperanza condicional de una v.a. integrable también es integrable.

(M_n) es $(\mathcal{F}_n)$ -adaptado: En efecto, la esperanza condicional es una v.a. medible respecto de la σ -álgebra condicionante. En part. M_n es $\mathcal{F}_n$ -medible.

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = M_n$$

Importancia de la martingala cerrada: $X \in L_1$, $M_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$

1) Intuitivamente: $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F}(\cup \mathcal{F}_n))$

Ese es el teorema de convergencia hacia arriba de Lévy y se interpreta como continuidad de la Esperanza Condicional respecto de la $\mathcal{T}$ -álgebra condicionante.

2) Una clase importante de martingalas son de este tipo.

Martingala: Una def. cualquiera de los esquemas de apuestas en los que el jugador va decidiendo cuánto apostar (usualmente doblando la apuesta).

Transformada de martingala:

Martingalas y diferencias de martingalas $M_n \quad \sum_n = M_n - M_{n-1}$

Sucesiones predecibles: Colección de v.a. $(Z_1, Z_2, \dots)$ t.q. Z_i es $\mathcal{F}_{i-1}$ -medible.

Interpretación: Z_n : la cantidad que apostaremos al instante n , $\sum_n$: cantidad (aleatoria) que nos pagarán en el juego al instante n si apostamos 1 peso

$Z_n \sum_n$: ganancia o pérdida en el juego n .

$\sum_n$: $\mathcal{F}_n$ -medible.

Definición: X : $(\mathcal{F}_n)$ -mart. Z : $(\mathcal{F}_n)$ -predecible

La transformada de martingala (de X por Z) es el p.e.

$$(Z \cdot X) = Z_0 X_0 + \sum_{i=1}^n Z_i \sum_i \quad (Z_0 \text{ es } \mathcal{F}_0\text{-med. (igual q' } X_0))$$

Proposición: Si X es martingala y Z es predecible y Z_n es acotada $(\mathcal{F}_n)$ entonces: $Z \cdot X$ es martingala.

Razón: Integrabilidad: $|Z \cdot X_n| \leq |Z_0 X_0| + \sum |Z_i \sum_i| \leq M(|X_0| + \sum_{i=1}^n |\sum_i|) \in L_1$
 $\therefore (Z \cdot X)_n$ es integrable.

Adaptabilidad: $Z_0 X_0$: $\mathcal{F}_0$ -med. $(Z \cdot X)_0$ es $\mathcal{F}_0$ -med.

Por inducción: $(Z \cdot X)_{n+1} = \underbrace{(Z \cdot X)_n}_{\mathcal{F}_n\text{-med.}} + \underbrace{Z_{n+1} \sum_{n+1}}_{\mathcal{F}_{n+1}\text{-med.}}$

Propiedad de juego justo: $\mathbb{P}(\text{mart.}) = 1$

Propiedad de juego justo:

$$E((Z \cdot X)_{n+1} | \mathcal{F}_n) = (Z \cdot X)_n$$

$$E((Z \cdot X)_n + Z_{n+1} X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = (Z \cdot X)_n + Z_{n+1} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = (Z \cdot X)_n$$

$\mathcal{F}_{n+1}$ - med.
mart. $\nearrow$
pred. $X_{n+1} - X_n$

$$Z_{n+1} = 50 \mathbb{1}_{\bar{X}_n = 100}$$

$$M = Z \cdot \bar{X}$$

$$\frac{X_n}{2}$$

$$Z_0 = 1.$$

$$\pm 1$$

$$Z_1 = \frac{X_0}{2}$$

$$M_1 = X_0 + \frac{X_0}{2} \cdot (\bar{X}_1 - X_0)$$

$$M_2 = M_1 + \frac{M_1}{2} (X_2 - X_1) + \dots$$

Tiempo aleatorio: $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ variable aleatoria $\{T=n\} \in \mathcal{F}$

Tiempo de paro: $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ t.q. $\{\omega \in \Omega : T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$
(denotado por $\{T=n\}$)

Intuitivamente: Regla que me dice en que momento (por ej.) dejar de jugar.

Ej: Sigo (me detengo) hasta acumular + de 100 pesos obs sules seguidos.

Importancia de los tiempos de paro: Figuran en el resultado + importante de la teoría de martingalas:

El teorema de muestreo opcional:

Detener una martingala en un tiempo de paro no afecta la ganancia esperada. (Por ej: $E(X_T) = E(X_0)$ si T es tdp acotado). $\underline{X}$ C.A.S. $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 1\}$
 $X_T = 1$ $E(X_T) = 1 \neq 0 = E(X_0)$
($E(T) = \infty$)

Ejemplo (TDP): Sea $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ un p.e. real y $A \subset \mathbb{R}$ Boreliano (pej. $(1, \infty)$) $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$.

Al: T es un tiempo de paro r.a. $(\mathcal{F}_n^X)$ $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.
 $\{T=0\} = \{X_0 \in A\} \in \mathcal{F}_0^X$ $\{T=1\} = \{X_0 \notin A, X_1 \in A\} \in \mathcal{F}_1^X$
 $\{T=2\} = \{X_0 \in A^c, X_1 \in A^c, X_2 \in A\} \in \mathcal{F}_2^X, \dots$

T es tiempo de paro.

Caso particular: $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ C.A.S.S. $X_0 = 0$.

$T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$. ($A = \{1\}$) T es tdp. $\checkmark$

$E(T) = \infty$ De hecho: $P(T=k) = \frac{1}{k} P(S_k = 1)$.

$P(T=k) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$ $a_n \sim b_n \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$. Teo. de Moivre $\rightarrow$

$$\mathbb{P}(T=k) \sim \frac{1}{k^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$a_n \asymp b_n \iff \exists \kappa, \beta > 0. \text{ Lap} \\ \kappa a_n \leq b_n \leq \beta b_n$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum \mathbb{P}(T \geq k) \asymp \sum \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty.$$

$\exists \varepsilon$ un $\{d_p\}$. $0, -1, -2, 1, , -2, -3, -2, -1, -2,$

$$U = \min \{ n \in \mathbb{N} : \bar{X}_{n+2} = \bar{X}_n + 2 \}. \quad U = T - 2$$

U 1ª vez en la que ganaré dos volados seguidos en los siguientes dos pasos

Problema: Si S, T son dos top. r.a. (≤ 100) entonces:

Sol: $\{S \wedge T = n\} \in \mathcal{F}_n$?

$$\{S \vee T = n\} = \{S = n, T \leq n\} \cup \{T = n, S \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

$$\{S+T=n\} = \bigcup_{m=0}^n \underbrace{\{S=m\}}_{\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T=n-m\}}_{\mathcal{F}_{n-m} \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

Def: Si $(\mathcal{F}_n)$ es una filtración y T es un tiempo de paro, se define la τ -álgebra de eventos que ocurren antes de T , denotada por $\mathcal{F}_T$, por:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

¿Es τ -álgebra?

Sí, pues: 1) $\emptyset \in \mathcal{F}_T$

2) $A \in \mathcal{F}_T, A^c \in \mathcal{F}_T$

3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_T, \cup A_i \in \mathcal{F}_T.$

1) $\emptyset \cap \{T=n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n \forall n.$

3) $(\cup A_i) \cap \{T=n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i \cap \{T=n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$

2) $A^c \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$

$$\underbrace{\{T=n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{\{T=n\} \cap A}_{\in \mathcal{F}_n}$$

$$\underbrace{E(X_T | \mathcal{F}_S)}_{\text{TMO.}} = X_S \quad S \leq T$$

Teorema: Sea (X_n) una ^{sub} ~~super~~ martingala r.a. $(\mathcal{F}_n)$.

Si T es un tiempo de paro:

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(X_0).$$

Demostración: Pasa por transformada de martingalas.

$$i \leq n: Z_i = \mathbb{1}_{T \geq i}$$

$$(Z_i: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0 \quad T = \text{dos volados seguidos.})$$

$$Z_0=1, Z_1=1, Z_2=1, Z_3=1$$

$$Z_4=1, Z_5=1, Z_6=0, Z_7=0, \dots$$

Z es predecible? Z_i es $\mathcal{F}_{i-1}$ -medible

$$\{Z_i=1\} = \{T \geq i\} = \left(\bigcup_{k=0}^{i-1} \{T=k\} \right)^c \quad \{T \geq i\}^c = \{T < i\}$$

$$Z \cdot X \text{ es martingala} \quad (Z \cdot X)_n = Z_0 X_0 + \sum_{i=1}^n Z_i (X_i - X_{i-1})$$

$$\therefore (X_{T \wedge n})_{n=0}^{\infty} \text{ es } (\mathcal{F}_n)\text{-mart.}$$

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$$

$$= X_0 + \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{T \geq i} (X_i - X_{i-1})$$

$$= X_0 + \sum_{i=1}^{T \wedge n} (X_i - X_{i-1})$$

$$= \cancel{X_0} + X_{T \wedge n} - \cancel{X_0}$$

$$= X_{T \wedge n}$$

Aplicaciones del teorema de muestreo opcional

1) Problema de la ruina: (ξ_i) v.a.i.i.d. $\mathbb{P}(\xi_i=1)=p$ $\mathbb{P}(\xi_i=-1)=q$
 $q=1-p$. $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ a b

$$T_a = \min\{n \geq 0: S_n = a\} \quad T_b = \min\{n \geq 0: S_n = -b\}.$$

$T_a \wedge T_b$: instante de la ruina.

1) $\phi(x) = (q/p)^x$ entonces $(\phi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ es martingala.

Ejercicio

$$T = T_a \wedge T_b$$

ejercicio.

2) Aplicamos muestreo opcional: $(\phi(S_{n \wedge T}))$ martingala.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(S_{n \wedge T})) &= \mathbb{E}(\phi(S_0)) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_0}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^0\right) = 1. \end{aligned}$$

$S_{n \wedge T}$

$T < \infty$ c.s. $n \wedge T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$

$S_{n \wedge T} \rightarrow S_T$

$\mathbb{E}(\phi(S_T)).$

S_T S_T toma los valores a y $-b$ $\underbrace{\mathbb{P}(T_a < T_{-b})}_{\rho} \mathbb{P}(T_{-b} < T_a)$

$$\mathbb{E}(\phi(S_T)) = \phi(a)\rho + \phi(-b)(1-\rho)$$

$\parallel$
 1

$$\frac{1 - \phi(-b)}{\phi(a) - \phi(-b)} = \rho$$

$$\mathbb{P}(T_a < T_{-b}) = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{p}{q}\right)^b}.$$

Tarea: Comprobar numericamente como función de p para sus valores favoritos de a y b .

Opcional: $p \rightarrow q$ ($p \rightarrow 1/2$).

Martingala: $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

tomando esperanzas: $E(E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = E(X_n)$

$$\parallel$$

$$E(X_{n+1})$$

Por inducción: $\forall n: E(X_n) = E(X_0)$.

¿Qué nos dice el teorema de muestreo opcional?

$\forall T \text{ tdp}: E(X_{n \wedge T}) = E(X_0)$

$\forall T \text{ tdp acotado } E(X_T) = E(X_0)$

Filtración: Una familia creciente de σ -álgebras $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \dots$ todas ellas contenidas en $\mathcal{F}$. Interpretación: $\mathcal{F}_0$ representa la información inicial, $\mathcal{F}_n$ la info. a la que tenemos acceso hasta el instante n .

Esperanza condicional: $X \in L_1$ (integrable), queremos construir otra variable que simule ser X pero que sea medible r.a. una σ -álgebra + pequeña: $\mathcal{G}$

$$A \in \mathcal{G} \quad E(X \mathbb{1}_A) = E(E(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_A).$$

... Reglas de cálculo y propiedades.

Tarea 2: $U \perp X \quad E(\mathbb{1}_{U \leq X} | X).$

$$E(f(X, U) | X) \quad U \perp X$$

$$E(f(x, U)) = h(x) \quad E(f(X, U) | X) = h(X).$$

En particular: $E(\mathbb{1}_{U \leq X}) = h(X)$

$\parallel$
 X

$$\therefore E(\mathbb{1}_{U \leq X} | X) = X.$$

Martingala: Un proceso $X = (X_n)$ que representa la evolución de una fortuna sometida a juegos justos.

($\mathcal{F}_n$) filtración: $(E(\bar{X}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \bar{X}_n)$
 ($\bar{X}_n$) adaptado $\bar{X}_n$ es $\mathcal{F}_n$ -medible
 ($\bar{X}_n \in L_1$).

Estrategia de apuestas (transformada de martingala)

Predecibilidad: no incorporar información futura para decidir qué cantidad apostar.

Z_i : $\mathcal{F}_{i-1}$ -medible $Z_i (\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1})$: lo que gano.

$(Z \cdot \bar{X})_n$ $(Z \cdot \bar{X})_0 = Z_0 \bar{X}_0$ $(Z \cdot \bar{X})_n = Z_0 \cdot \bar{X}_0 + \sum_{i=1}^n Z_i (\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1})$.

Teorema fundamental: (Bajo condiciones técnicas) $Z \cdot \bar{X}$ también es martingala.

(No es posible dar una estrategia de apuestas que convierta un juego justo en uno (des)favorable.

Tiempo de paro: $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$.

Teorema de muestreo opcional.

$E(\bar{X}_{T \wedge n}) = E(\bar{X}_0)$ (martingala $\bar{X}$ y tdp T).

Una aplicación del teorema de muestreo opcional:

Desigualdades maximales: Sea $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una submartingala. Definamos $M_n = \max_{0 \leq m \leq n} \bar{X}_m$



Entonces: $P(M_n \geq \alpha) \leq E(\bar{X}_n)/\alpha \leq E(M_n)/\alpha$
 ($\bar{X}_n \leq M_n$).

Ejemplo: Juego de San Petersburgo: 100 pesos.

Objetivo: ganar 200. Diseñar una estrategia que maximice la probabilidad de cumplir con el objetivo.

Af: Hay una estrategia con $P(\text{cumplir}) = 1/2$.

No hay estrategias con $P(\text{cumplir}) > 1/2$.

47. pay ma estrategia con il computer 1-10

No hay estrategias con $P(\text{cumplir}) > 1/2$.

Razón: Desigualdad maximal aplicada a:

Z_i : Proporción de la fortuna que se apuesta en el i -ésimo volado.

(Z_i) predictable. $0 \leq Z_i \leq 1$.

Si (X_n) es la CASS. (X_n) es martingala.

De seguir la estrategia Z al tiempo n mi fortuna vale:

$$70 = 1 \quad 100 + \sum_{i=1}^n x_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}) = (\sum \cdot \bar{x})_n$$

$$\mathbb{E}((\sum \cdot \delta)_n) \leq \mathbb{E}(\sum \delta_n) = \mathbb{E}(100) = 100$$

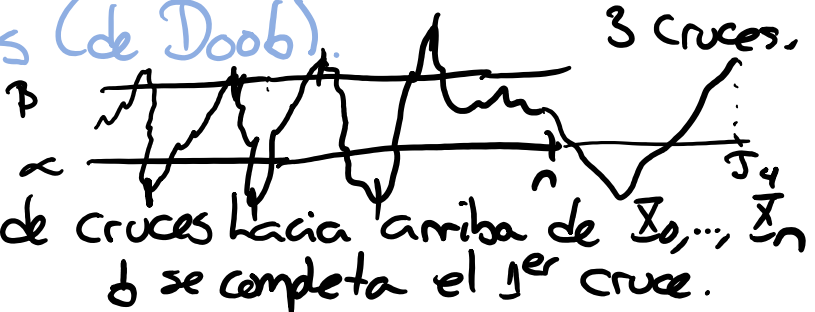
$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq m \leq n} (Z \cdot X)_m \geq \underline{200}) \leq \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

Pregunta: ¿y si el objetivo es ganar 300?

Diseñar estrategias $\neq$ y probarlas para ver cuál es la mejor.

Desigualdades de cruces (de Doob)

(X_n) v.a. $\alpha < \beta$



$N_n(\alpha, \beta]$: la cantidad de cruces hacia arriba de $X_0, \dots, X_n$ en el intervalo $(\alpha, \beta]$.
o se completa el 1er cruce.

$$\tau_0 = \min\{n \geq 0 : X_n \leq \alpha\} \quad \tau_1 = \min\{n \geq \tau_0 : X_n > \beta\}.$$

$$\tau_1 = \min \{n \geq \tau_1 : \bar{X}_n \leq \alpha\} \quad \tau_2 = \min \{n \geq \tau_1 : \bar{X}_n > \beta\} \dots$$

$k \vdots$ todos son tdp.

$$N_n((\alpha, \beta]) = \max \{m: T_m \leq n\}.$$

Teorema: $(p-\alpha) \mathbb{E}(N_n(\alpha, \beta)) \leq \mathbb{E}(\sum_{n \geq 0} v_0) + |\alpha|.$

Z_n : submartingale

(En particular: si $\sup_n \mathbb{E}(X_n) < \infty$ entonces:

$$\mathbb{E}(N_{\infty}((\alpha, \beta])) < \infty \quad (\text{y } N_{\infty}((\alpha, \beta])) < \infty \text{ c.s.}).$$

Consecuencia importante:

Teorema de convergencia de martingalas:

Sea (X_n) una martingala acotada en L_1 :

$$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty,$$

Entonces: $\exists$ una v.a. $X_{\infty} \in L_1$ y tal que:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.s.}} X_{\infty}.$$

Ejercicio: (La cadena de Wright-Fisher).

Fijemos N (tamaño de una población con dos tipos de individuos).

Dinámica: La generación $n+1$ consta de N individuos que escogen a sus padres unif. en la gen. anterior.



Sea X_n la # de individuos del tipo 1 a la generación n .

- 1) Modelar esta situación (con v.a. unif). Me conformo con un programa, pero de ahí es sencillo formalizar.
- 2) En el modelo, argumentar que (X_n) es martingala.
- 3) ¿Es cadena de Markov? No te que 0 y N son absorbentes.
- 4) Aplique el t conv. de mart. para ver que X_n converge c.s. conforme $n \rightarrow \infty$.
y así: que si $T = \min\{n \geq 0 : X_n \in \{0, N\}\}$.
entonces $T < \infty$ con proba 1.
- 5) Aplique muestreo opcional ($\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$)

para calcular $\mathbb{P}(X_T = N \mid X_0 = x)$.

6) Compruebe los resultados por simulación.

Ejemplo del TCM:

Galton - Watson: Ley de progerie μ

M_k : Proba de tener k descendientes.

$$Z_0 = 100 \quad Z_1 = \sum_{i=1}^{100=Z_0} \zeta_{i,1} \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \zeta_{i,n}$$

$(\zeta_{i,n})$ iid $\sim \mu$ $\zeta_{i,n}$: # de desc. del ind. i de la gen n .

$\mathbb{E}(\zeta_{i,n}) \begin{cases} > 1 \text{ Proba positiva de supervivencia.} \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$ Extinción c.s.

Caso crítico $\mathbb{E}(\zeta_{i,n}) = 1$. $\mathbb{P}(\zeta_{i,n} \neq 1) > 0$

(Z_n) es martingala. (ya se hizo). No negativa $\Rightarrow$ acotada en L_1

$\therefore$ Converge.

0 es absorbente p/ $\mathbb{Z}$

pero en cualquier otro estado no me estaciona.

Así: Z_n converge a cero (y $\therefore$ hay extinción casi segura).

Ej: Cualquier mart. no-neg. es acotada en L_1 .

Ejercicio: X v.a. con valores en $(0,1)$

$U \perp X$, $U \sim \text{unif}$ en $(0,1)$.

Calcular $E(\mathbb{1}_{U \leq X} | X)$. $\mathbb{1}_{U \leq X} = f(U, X)$.

Solución: $f(U, X) = \mathbb{1}_{U \leq X}$

Si $X=x$: $E(\mathbb{1}_{U \leq x}) = x$ $U \perp X$
 $h(x) = E(f(U, x)) = E(\mathbb{1}_{U \leq x})$ (Proposición).
 $E(f(U, X) | X) = h(X)$.

Algunos: $E(\mathbb{1}_{U \leq X} | X=x) = E(\mathbb{1}_{U \leq x}) = x$; $h(x) !!!$
 Fallo decir que $E(\mathbb{1}_{U \leq X} | X) = h(X)$.

Ejercicio: $U \sim \text{unif}(0,1)$ $Z_n = 2^n \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}}$.

Ver que (Z_n) es una martingala.

a) $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$. (Error a evitar $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_n)$. Error: $\mathcal{F}_n = \sigma(U)$ Z_m es $\mathcal{F}_n$ -med. $E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Z_n$ podría ser $\neq Z_n$.)

b) Por construcción: siempre Z_n es $\mathcal{F}_n$ -medible.

c) ¿Cómo es $\mathcal{F}_n$? $Z_0 = 1$ $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Z_1 : 2 ó Cero dep. de si $U \in [1/2, 1]$ ó $[0, 1/2]$

Z_2 : 4 ó Cero dep de si: $U \in [1/4, 1/2]$ ó $[0, 1/4]$

$\sigma(Z_1, Z_2)$: Intuitivamente me dice si $U \in [1/2, 1]$ ó $[1/4, 1/2]$ ó $[0, 1/4]$.

$\sigma(Z_1, Z_2, Z_3)$: Intuitivamente: $U \in [1/4, 1/2]$ ó $[0, 1/8]$, $[1/8, 1/4]$, $[1/2, 1]$.

d) Z_n es integrable. (En efecto es acotada por 2^n).
 $\forall \omega \in \Omega: |Z_n(\omega)| \leq 2^n$.

e) $E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$.

Si $Z_n = 0$, $Z_{n+1} = 0$! $Z_n = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}} = 0 \Leftrightarrow U > 2^{-n}$
 $\Rightarrow \mathbb{1}_{U \leq 2^{-(n+1)}} = 0$.

$E(Z_{n+1} \mathbb{1}_{Z_n \neq 0} | \mathcal{F}_n) = E(Z_{n+1} \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}} | \mathcal{F}_n)$

$= \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}} E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$. ($U \sim \text{unif}(0,1)$ $Z_n = 2^n \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}}$)

$E(2^{n+1} \mathbb{1}_{U \leq 2^{-(n+1)}} \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}} | \mathcal{F}_n)$. $-U \in \mathbb{R}$



$= 2^{n+1} \cdot \frac{1}{2} \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}}$. pues si $U \in [0, 2^{-n}]$ entonces, condicionalmente a esta información, $U \sim \text{unif}$ en $[0, 2^{-n}]$.

$\hookrightarrow 2^n \mathbb{1}_{U \leq 2^{-n}} = Z_n$.

Ejercicio: (X_i) iid $\sim \text{Ber}(p)$ $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

$E(X_1 | S_n) = \frac{S_n}{n}$

Intuitivamente: $E(X_1 | S_n) = E(X_2 | S_n) = \dots = E(X_n | S_n)$.

$$\cap \mathcal{F}_n = \bigcap_{i=1}^n E(X_i | S_n) = E(\sum_{i=1}^n X_i | S_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i | S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i | S_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n | S_n) = S_n. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_i | S_n) = S_n/n.$$

Notar que si $h(x) = \mathbb{E}(X_i | S_n = x)$
entonces $\mathbb{E}(X_i | S_n) = h(S_n)$.

Vale en los casos en que saben calcular h .

(discreto o densidad conjunta).

Entonces: ver que $\mathbb{E}(X_i | S_n = x) = x/n$.

$$\mathbb{E}(X_i | S_n = x) = \mathbb{P}(X_i = 1 | S_n = x) = \frac{\mathbb{P}(X_i = 1, S_n = x)}{\mathbb{P}(S_n = x)}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i = 1, S_n = x) &= \mathbb{P}(X_i = 1, X_2 + \dots + X_n = x-1) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_i = 1)}_p \underbrace{\mathbb{P}(X_2 + \dots + X_n = x-1)}_{\text{bin}(n-1, p)} \end{aligned}$$

En general: Si $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. integrables y $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Entonces siempre $\mathbb{E}(X_i | S_n) = S_n/n$.

$$\mathbb{E}(X_i | S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots) = \mathbb{E}(X_i | S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots).$$

pero: $(X_i, S_n) \perp\!\!\!\perp X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^n &= \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots) \\ \mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}^n) &= \mathbb{E}(X_i | S_n) = S_n/n. \\ \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

Def: Una filtración reversa es una sucesión decreciente de σ -álgebras.

Martingala reversa: $(M_n)_{n=0}^\infty$ t.q. M_n es integ.

M_n es $\mathcal{F}_n$ -med. y: $\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n+1}) = M_{n+1}$.

Ejemplo: S_n/n es una martingala reversa.

Razón: $S_n/n = \mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}^n)$ $\mathcal{F}^n \supset \mathcal{F}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n/n | \mathcal{F}^{n+1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}^n) | \mathcal{F}^{n+1}) \\ &= \mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}^{n+1}) = S_{n+1}/(n+1). \end{aligned}$$

De hecho: Si (M_n) es una $\mathcal{F}_n$ -martingala reversa:

$$M_n = \mathbb{E}(M_0 | \mathcal{F}_n). \text{ (Siempre son cerrada)}$$

Recordatorio: Teorema de conv. de Lévy: filtración

$$X \in L_1, \quad \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}(X | \bigvee (\cup \mathcal{F}_n)) \quad \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}^\infty) \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}(X | \bigcap \mathcal{F}_n)$$

Especie de continuidad de la e.c. r.a. la σ -álgebra

condicionante.

Consecuencia: LFGN: $\frac{S_n}{n}$ es mart. reversa.

$$\therefore \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}(X_i | \bigcap \mathcal{F}_n)$$

$$\mathbb{E}(X_i)$$

σ -álgebra de eventos remotos.
Ley 0-1, Kolmogorov.
es trivial. $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$
 $\forall A \in \mathcal{G}$.

Todas las v.a. $\mathcal{F}$ -medibles son constantes.

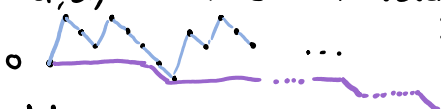
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_i).$$

Ejercicio: Motivación: proceso de Lévy.
 $\mathbb{P}$ (superior algún nivel).

Objetivo: con. c.a. crecer x saltos y decrecer "continuamente".

$\xi_1, \xi_2, \dots$ i.i.d. con valores en $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$



Máximo nivel de reserva $\leftrightarrow$ mínimo de (S_n) .

¿mínimo global o en horizonte finito?

$$M_n = \min_{m \leq n} S_m \quad M_\infty = \min_{m \leq \infty} S_m \quad (\text{mínimo global}).$$

Sea C_p una v.a. geo. de parámetro de éxito p . $\perp$ de S .

M_{C_p} Se puede calcular la dist. de M_{C_p}

y, conforme $p \rightarrow 0$ ($C_p \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$).

$$g(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda \xi_1}). \quad (\text{trans de Laplace de } \xi_1).$$

$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbb{E}(e^{-\lambda \xi_1 - \lambda \xi_2 - \dots - \lambda \xi_{n+1}} g(\lambda)^{-(n+1)} | \mathcal{F}_n).$$

$$= \underbrace{e^{-\lambda \xi_1} \dots e^{-\lambda \xi_n}}_{= e^{-\lambda S_n}} g(\lambda)^{-n-1} \mathbb{E}(e^{-\lambda \xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n)$$

$$= e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n-1} g(\lambda) = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}$$

$$= M_n.$$

$$T_K = \min\{n \geq 0 : S_n = -K\}.$$

$(M_{n \wedge T_K})_{n=0}^\infty$ es martingala por teo de muestreo opcional.

$$\mathbb{E}(M_{n \wedge T_K}) = \mathbb{E}(M_0) = 1. \quad \text{Si } T_K < \infty.$$

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda S_{T_K}} g(\lambda)^{-T_K}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda K} g(\lambda)^{-T_K})$$

$$\mathbb{E}(g(\lambda)^{-T_K}) = e^{-\lambda K}.$$

$$f: \text{inversa de } \frac{1}{g} \quad g(f(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\mathbb{E}(g(f(\lambda))^{-T_K}) = e^{-f(\lambda) K}$$

$$\mathbb{E}(e^{-f(\lambda) T_K}) = e^{-f(\lambda) K}$$

$$\mathbb{P}(M_{C_p} \leq -n) = \mathbb{P}(T_n \leq C_p) \quad \text{Condicionen con } T_n$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{P}(T_n \leq C_p | T_n))$$

$$= \mathbb{E}((1-p)^{T_n})$$

$$= e^{-n f(1-p)}$$

Excelente ejercicio.

$$\mathbb{P}(-M_{C_p} \geq n) = (e^{-f(1-p)})^n$$

$$\therefore -M_{C_p} \sim \text{geo}(1 - e^{-f(1-p)}).$$

$$\therefore -M_\infty \sim \text{geo}(1 - e^{-f(1)}).$$

$$f(1) \neq 0.$$

$$f(1) = 0$$

$$1 - e^{-f(1)} = 0.$$

$$\infty.$$

Ej. 1: Sean X, Y v.a. integrables y $\mathcal{G}$ una sub- σ -álgebra. ¿Que significa la ec.
 $Y = E(X|\mathcal{G})$?

1) Y es integrable, 2) Y es $\mathcal{G}$ -medible

3) Réplica: $E(Y \mathbb{1}_A) = E(X \mathbb{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$.

Ej 2: Dé la def. de martingala. ✓

Ej 3: $X_1, X_2, \dots$ v.a.i.id. $\sim \text{Ber}(p)$. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ p.d. (S_n) es $(\mathcal{F}_n)$ -mart.

$p = 1/2$, sub. $p > 1/2$ supermart $p < 1/2$.

1) Integrabilidad: $S_n \in \{0, \dots, n\} \therefore S_n$ es acotada
 $\Rightarrow$ es integrable.

2) (S_n) es $(\mathcal{F}_n)$ -adaptada? $S_n = f_n(X_1, \dots, X_n)$
 $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. f_n es continua $\therefore$ medible
 $\therefore S_n$ es $\mathcal{F}_n$ -medible.

3) $X_i \geq 0$ $E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$
 $= S_n + E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$
 $= S_n + E(X_{n+1}) \geq S_n$.

$\therefore$ Siempre tengo una submartingala.

X_i : toma valores $-1, 1$ $E(X_i) = p - (1-p) = 2p-1$

$$\begin{cases} > 0 & p > 1/2 \\ = 0 & p = 1/2 \\ < 0 & p < 1/2 \end{cases}$$

Así: $E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + E(X_{n+1}) \begin{cases} > S_n & p > 1/2 \\ = S_n & p = 1/2 \end{cases}$

$\mathcal{E}_j$ 4: $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (X_i) iid. integrables $\leq S_n$ $p < 1/2$

$f_n = \nabla(x_1, \dots, x_n)$ y $T(f_n) = \int dp$ acotado

Al considerar una martingala adecuada, justifique la identidad de Wald: $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(T) \mathbb{E}(X_1)$.

Sol: $S_n = n \mathbb{E}(X_1)$ $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1} - \underbrace{(n+1) \mathbb{E}(X_1)}_{=0} | \mathcal{F}_n) &= S_n + \overbrace{\mathbb{E}(X_{n+1})}^{=0} - (n+1) \mathbb{E}(X_1) \\ &= S_n - n \mathbb{E}(X_1). \end{aligned}$$

$$M_n = S_n - n \mathbb{E}(X_1) \text{ es martingala.}$$

T tdp acotado: $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = 0$

11

$$\mathbb{E}(S_T - T \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(S_T) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(T).$$

$$\therefore E(S_T) = E(X) E(T).$$

ε_j 5: (M_n) : $(\mathcal{F}_n)$ -martingala. (C_n) $C_0=0$.

Diga qué significa que (C_n) sea predecible.

Defina e interprete C.M.

Sd: C_n es $\mathbb{F}_{n-1}$ -mod.

$$C \cdot M = C_0 \cdot M_0 + \sum_{i=1}^2 C_i (M_i - M_{i-1})$$

Interpretación: (C_i) : representa una estrategia:

C_i : monto ó fracción que se presta al instante i .

$M_i - M_{i-1}$: ganancia al apostar una unidad.

C.M: ganancia que observo al seguir la estrategia C.

(C) predecible: El monto q' decido apostar puede depender de $M_0, \dots, M_{i-1}$, pero no de $M_i, M_{i+1}, \dots$.

(M_n) es mart. $m \leq n \quad M_m = \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m)$
 $m < \infty \quad M_m \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_m)$
 $\rightarrow$ Se necesitan hipótesis adicionales: (*)

$(M_n)_{n=0}^\infty$ mart. reversa: Siempre es cerrada:
 $M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$.

(*) Por ejemplo: Si $\exists p > 1$ tq $\sup_n \mathbb{E}(|M_n|^p) < \infty$
entonces $\exists M_\infty \in L^p$ tq:
 $M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$.

Ejercicio tarea opcional:

Muestre que toda martingala no-negativa es acotada en L_1 .

Sea (M_n) una $(\mathcal{F}_n)$ -mart. no negativa, es decir, $M_n \geq 0$ c.s. $\forall n$.

$$\text{P.d.: } \sup_n \mathbb{E}(|M_n|) = \sup_n \mathbb{E}(M_n) = \sup_n \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_0) < \infty.$$

(Por el teorema de convergencia de martingalas,

toda martingala no-negativa converge casi seguramente!