

**PRESENTACIÓN Y TEMARIO DEL
CURSO AVANZADO DE PROBABILIDAD
ASPECTOS DE TEORÍA DE NÚMEROS EN LA PROBABILIDAD**

GERÓNIMO URIBE BRAVO

El objetivo de este curso es presentar algunos aspectos probabilísticos de la teoría de los números. En particular veremos modelos de números naturales y sus correspondientes factores primos y presentaremos las heurísticas y conjeturas en teoría de números que provienen de argumentos probabilísticos. Además, analizaremos la analogía entre teoremas clásicos en probabilidad, como las leyes de grandes números y el teorema límite central, y resultados de la teoría de números como el teorema de los números primos y el teorema de Erdős-Kac. Además, presentaremos la aparición de la función ξ de Riemann en el análisis del movimiento Browniano. Si el tiempo es suficiente, finalizaremos con el paralelismo entre resultados de matrices aleatorias y conjeturas en teoría de números.

Este curso pretende complementar, con ejemplos tomados de la probabilidad e inspirados en la teoría de números, al curso de Procesos Estocásticos I. Probabilidad I es un prerrequisito. El curso será autocontenido respecto de la teoría de los números.

1. TEMARIO

- (1) La función ζ de Riemann y la distribución de Golomb en los enteros positivos. [Gol70] y [Gol92].
- (2) Valores especiales de la función ζ mediante consideraciones probabilísticas [BFY07]
- (3) La distribución ζ y su divisibilidad infinita. Interpretación probabilística de la identidad de Selberg. [Gut06]
- (4) Permutaciones aleatorias y el proceso del restaurante chino (ley de Poisson-Dirichlet). [DG93] y [Pit06].
- (5) La distribución de Poisson-Dirichlet y el teorema de Billingsley sobre factores primos de un natural aleatorio. [Bil72] y [DG93]
- (6) El teorema de Erdős-Kac [GS07], [Ten15].
- (7) Las distribuciones Gaussianas y estables. El teorema Tauberiano de Karamata, variación regular y teoremas límite. [BGT87]
- (8) El teorema Tauberiano de Landau-Ingham y el teorema de los números primos. [Müg15]
- (9) Particiones y las identidades de Gauss y Jacobi. Introducción a la distribución de Chung. [Apo76], [Chu82] y [Pak04].
- (10) Movimiento browniano, excursión browniana normalizada y representación probabilística de la función ξ de Riemann. La identidad $\xi(1-s) = \xi(s)$. [BPY01], [Dev09],
- (11) Funciones θ de Jacobi, reciprocidad y la ecuación de calor. [Bel61], [Gri96], [KN06] y [Kar12].
- (12) Matrices aleatorias y la función ζ . [BY09], [CNN17].

REFERENCIAS

- [Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, Undergraduate Texts in Mathematics. MR 0434929
- [Bel61] Richard Bellman, *A brief introduction to theta functions*, Athena Series: Selected Topics in Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961. MR 0125252
- [BFY07] Paul Bourgade, Takahiko Fujita, and Marc Yor, *Euler's formulae for $\zeta(2n)$ and products of Cauchy variables*, Electron. Comm. Probab. **12** (2007), 73–80. MR 2300217
- [BGT87] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. MR 898871
- [Bil72] P. Billingsley, *On the distribution of large prime divisors*, Period. Math. Hungar. **2** (1972), 283–289, Collection of articles dedicated to the memory of Alfréd Rényi, I. MR 0335462
- [BPY01] Philippe Biane, Jim Pitman, and Marc Yor, *Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 4, 435–465 (electronic). MR 1848256
- [BY09] P. Bourgade and M. Yor, *Random matrices and the Riemann zeta function*, Journées Élie Cartan 2006, 2007 et 2008, Inst. Élie Cartan, vol. 19, Univ. Nancy, Nancy, 2009, pp. 25–40. MR 2792032
- [Chu82] K. L. Chung, *A cluster of great formulas*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **39** (1982), no. 1-3, 65–67. MR 653674
- [CNN17] Reda Chhaibi, Joseph Najnudel, and Ashkan Nikeghbali, *The circular unitary ensemble and the Riemann zeta function: the microscopic landscape and a new approach to ratios*, Invent. Math. **207** (2017), no. 1, 23–113. MR 3592756
- [Dev09] Luc Devroye, *On exact simulation algorithms for some distributions related to Jacobi theta functions*, Statist. Probab. Lett. **79** (2009), no. 21, 2251–2259. MR 2591982
- [DG93] Peter Donnelly and Geoffrey Grimmett, *On the asymptotic distribution of large prime factors*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), no. 3, 395–404. MR 1214904
- [Gol70] Solomon W. Golomb, *A class of probability distributions on the integers*, J. Number Theory **2** (1970), 189–192. MR 257017
- [Gol92] ———, *Probability, information theory, and prime number theory*, vol. 106/107, 1992, A collection of contributions in honour of Jack van Lint, pp. 219–229. MR 1181916
- [Gri96] Gabriele Grillo, *Heat kernels and theta functions*, Exposition. Math. **14** (1996), no. 2, 181–186. MR 1395256
- [GS07] Andrew Granville and K. Soundararajan, *Sieving and the Erdős-Kac theorem*, Equidistribution in number theory, an introduction, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 237, Springer, Dordrecht, 2007, pp. 15–27. MR 2290492
- [Gut06] Allan Gut, *Some remarks on the Riemann zeta distribution*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **51** (2006), no. 2, 205–217. MR 2275304
- [Kar12] Anders Karlsson, *Applications of heat kernels on abelian groups: $\zeta(2n)$, quadratic reciprocity, Bessel integrals*, Number theory, analysis and geometry, Springer, New York, 2012, pp. 307–320. MR 2867922
- [KN06] Anders Karlsson and Markus Neuhauser, *Heat kernels, theta identities, and zeta functions on cyclic groups*, Topological and asymptotic aspects of group theory, Contemp. Math., vol. 394, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 177–189. MR 2216714
- [Müg15] Michael Müger, *On Karamata's proof of the Landau-Ingham Tauberian theorem*, Enseign. Math. **61** (2015), no. 1-2, 45–69. MR 3449282
- [Pak04] Igor Pak, *The nature of partition bijections. I. Involutions*, Adv. in Appl. Math. **33** (2004), no. 2, 263–289. MR 2074399
- [Pit06] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR 2245368
- [Ten15] Gérald Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 163, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion. MR 3363366