

**PRESENTACIÓN Y TEMARIO DEL
SEMINARIO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO B
ASPECTOS PROBABILÍSTICOS DE LA TEORÍA ANALÍTICA DE LOS
NÚMEROS**

GERÓNIMO URIBE BRAVO

El objetivo de este curso es presentar algunos aspectos probabilísticos de la teoría analítica de los números. Abordaremos tanto la teoría aditiva (particiones, particiones aleatorias, la fórmula asintótica de Hardy-Ramanujan) como la multiplicativa (teoremas Tauberianos (incluido el de Wiener), el teorema de los números primos). En particular veremos modelos de números naturales y sus correspondientes factores primos y presentaremos las heurísticas y conjeturas en teoría de números que provienen de argumentos probabilísticos. Además, analizaremos la analogía entre teoremas clásicos en probabilidad, como las leyes de grandes números y el teorema límite central, y resultados de la teoría de números como el teorema de los números primos y el teorema de Erdős-Kac. Presentaremos la aparición de la función ξ de Riemann en el análisis del movimiento Browniano. Si el tiempo es suficiente, finalizaremos con el paralelismo entre resultados de matrices aleatorias y conjeturas en teoría de números.

Este curso pretende complementar, con ejemplos tomados de la probabilidad e inspirados en la teoría analítica de los números, a los cursos básicos del área de probabilidad. Los alumnos deben conocer los temas tratados en Probabilidad I, II. Probabilidad II se podía suplementar con otros cursos como Estadística I y/o Teoría de la medida. El curso se puede llevar paralelamente a Procesos Estocásticos I, al cual complementa de manera sorprendente. Asimismo, se piensa como una optativa a partir del sexto semestre, en el que ya se han llevado adicionalmente cursos de Análisis Matemático y de Variable Compleja, que señalan el nivel de madurez necesario. El curso será autocontenido respecto de la teoría de los números.

1. TEMARIO

- (1) La función ζ de Riemann y la distribución de Golomb en los enteros positivos. [Gol70] y [Gol92].
- (2) Valores especiales de la función ζ mediante consideraciones probabilísticas [BFY07]
- (3) La distribución ζ y su divisibilidad infinita. Interpretación probabilística de la identidad de Selberg. [Gut06]
- (4) Los teoremas de Hardy-Ramanujan y Erdős-Kac y el teorema límite central de Lindeberg. [GS07], [Ten15].
- (5) Permutaciones aleatorias y el proceso del restaurante chino (medidas aleatorias de Poisson, ley de Poisson-Dirichlet). [DG93] y [Pit06].
- (6) Particiones, el teorema límite central local y la fórmula asintótica de Hardy-Ramanujan. [BD97]
- (7) La distribución de Poisson-Dirichlet y el teorema de Billingsley sobre factores primos de un natural aleatorio. [Bil72] y [DG93]

- (8) Las distribuciones Gaussianas y estables. El teorema Tauberiano de Karamata, variación regular y teoremas límite. [BGT87]
- (9) El teorema Tauberiano de Landau-Ingham y el teorema de los números primos. [Müg15]
- (10) Particiones y las identidades de Gauss y Jacobi. Introducción a la distribución de Chung. [Apo76], [Chu82] y [Pak04].
- (11) Versiones probabilísticas de la fórmula de suma de Poisson. Distribuciones de probabilidad relacionadas con la función ξ de Riemann.
- (12) Movimiento browniano, excursión browniana normalizada y representación probabilística de la función ξ de Riemann. La identidad $\xi(1 - s) = \xi(s)$. [BPY01], [Dev09],
- (13) Funciones θ de Jacobi, reciprocidad y la ecuación de calor. [Bel61], [Gri96], [KN06] y [Kar12].
- (14) Matrices aleatorias y la función ζ . [BY09], [CNN17].

REFERENCIAS

- [Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, Undergraduate Texts in Mathematics. MR 0434929
- [BD97] Luis Báez-Duarte, *Hardy-Ramanujan's asymptotic formula for partitions and the central limit theorem*, Adv. Math. **125** (1997), no. 1, 114–120. MR 1427803
- [Bel61] Richard Bellman, *A brief introduction to ϑ functions*, Athena Series: Selected Topics in Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961. MR 0125252
- [BFY07] Paul Bourgade, Takahiko Fujita, and Marc Yor, *Euler's formulae for $\zeta(2n)$ and products of Cauchy variables*, Electron. Comm. Probab. **12** (2007), 73–80. MR 2300217
- [BGT87] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. MR 898871
- [Bil72] P. Billingsley, *On the distribution of large prime divisors*, Period. Math. Hungar. **2** (1972), 283–289, Collection of articles dedicated to the memory of Alfréd Rényi, I. MR 0335462
- [BPY01] Philippe Biane, Jim Pitman, and Marc Yor, *Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 4, 435–465 (electronic). MR 1848256
- [BY09] P. Bourgade and M. Yor, *Random matrices and the Riemann zeta function*, Journées Élie Cartan 2006, 2007 et 2008, Inst. Élie Cartan, vol. 19, Univ. Nancy, Nancy, 2009, pp. 25–40. MR 2792032
- [Chu82] K. L. Chung, *A cluster of great formulas*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **39** (1982), no. 1-3, 65–67. MR 653674
- [CNN17] Reda Chhaibi, Joseph Najnudel, and Ashkan Nikeghbali, *The circular unitary ensemble and the Riemann zeta function: the microscopic landscape and a new approach to ratios*, Invent. Math. **207** (2017), no. 1, 23–113. MR 3592756
- [Dev09] Luc Devroye, *On exact simulation algorithms for some distributions related to Jacobi theta functions*, Statist. Probab. Lett. **79** (2009), no. 21, 2251–2259. MR 2591982
- [DG93] Peter Donnelly and Geoffrey Grimmett, *On the asymptotic distribution of large prime factors*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), no. 3, 395–404. MR 1214904
- [Gol70] Solomon W. Golomb, *A class of probability distributions on the integers*, J. Number Theory **2** (1970), 189–192. MR 257017
- [Gol92] ———, *Probability, information theory, and prime number theory*, vol. 106/107, 1992, A collection of contributions in honour of Jack van Lint, pp. 219–229. MR 1181916
- [Gri96] Gabriele Grillo, *Heat kernels and theta functions*, Exposition. Math. **14** (1996), no. 2, 181–186. MR 1395256
- [GS07] Andrew Granville and K. Soundararajan, *Sieving and the Erdős-Kac theorem*, Equidistribution in number theory, an introduction, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 237, Springer, Dordrecht, 2007, pp. 15–27. MR 2290492

- [Gut06] Allan Gut, *Some remarks on the Riemann zeta distribution*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **51** (2006), no. 2, 205–217. MR 2275304
- [Kar12] Anders Karlsson, *Applications of heat kernels on abelian groups: $\zeta(2n)$, quadratic reciprocity, Bessel integrals*, Number theory, analysis and geometry, Springer, New York, 2012, pp. 307–320. MR 2867922
- [KN06] Anders Karlsson and Markus Neuhauser, *Heat kernels, theta identities, and zeta functions on cyclic groups*, Topological and asymptotic aspects of group theory, Contemp. Math., vol. 394, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 177–189. MR 2216714
- [Müg15] Michael Müger, *On Karamata's proof of the Landau-Ingham Tauberian theorem*, Enseign. Math. **61** (2015), no. 1-2, 45–69. MR 3449282
- [Pak04] Igor Pak, *The nature of partition bijections. I. Involutions*, Adv. in Appl. Math. **33** (2004), no. 2, 263–289. MR 2074399
- [Pit06] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR 2245368
- [Ten15] Gérald Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 163, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion. MR 3363366