PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS II
CNSF, 2017

GERÓNIMO URIBE BRAVO

Ejercicio 1. Sea B es un evento de probabilidad positiva, con complemento B^c de probabilidad positiva. Diga quién es σB. Pruebe que $\mathbf{1}_{B^c}$ es σB-medible. Compruebe que

$$\mathbb{E}(\,\mathbf{1}_A \mid \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(\,A \mid B)\,\mathbf{1}_B + \mathbb{P}(\,A \mid B^c)\,\mathbf{1}_{B^c}.$$

Ejercicio 2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas e integrables. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pruebe que para $1 \leq k \leq n$ se tiene que $\mathbb{E}(S_k)\,S_n = kS_n/n$. Ayúdese de un cálculo que se haya realizado en el curso.

Ejercicio 3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables Bernoulli(p) independientes. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pruebe que S_n es supermartingala, martingala o submartingala dependiendo de si $p < 1/2$, $p = 1/2$ ó $p > 1/2$.

Ejercicio 4. Sea $M = (M_n)$ una $(\mathscr{F}_n)$-martingala y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Suponga que $\phi(M_n)$ es integrable. Pruebe que $\phi(\mathbb{R})\,\mathbb{R}$ es una submartingala.

Problema 1. Sea $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ una cadena de Markov con matriz de transición P y espacio de estados finito E. Para $f : E \to \mathbb{R}$, defina $P^n f : E \to \mathbb{R}$ mediante

$$P^n f(x) = \sum_y P^n_{x,y} f(y)\,.$$

Pruebe que

$$\mathbb{E}(\,f(X_{n+m}) \mid X_0, \ldots, X_m) = P^n f(X_m)\,.$$

Concluya que $(P^{n-m} f(X_m)\,, 0 \leq m \leq n)$ es una martingala.

Si τ es un tiempo de paro para X que es menor o igual a n, pruebe que

$$\mathbb{E}(\,f(X_n) \mid \mathscr{F}_\tau) = P^{n-\tau} f(X_\tau)\,.$$

Donde $\mathscr{F}_m = \sigma(X_0, \ldots, X_m)$ y $\mathscr{F}_\tau = \{A : A \cap \{\tau = m\} \in \mathscr{F}_m\}$.

Si $Af = Pf - f$, pruebe que

$$f(X_n) - \sum_{i=1}^{n-1} Af(X_i)$$

es una martingala.