

**TAREA 1, ESPERANZA CONDICIONAL Y MARTINGALAS
PROCESOS ESTOCÁSTICOS II, CNSF 2013**

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria normal centrada de varianza 1. Utilice el teorema de cambio de variable para calcular

$$\mathbb{E}(X^{2n})$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. (Sugerencia: la definición de la [función Gamma](#) y el cálculo explícito $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ le pueden ser de utilidad.)

Ejercicio 2. Directamente de la definición, pruebe la propiedad de linealidad de la esperanza condicional.

Ejercicio 3. Sea $X \in L_2$. Pruebe o dé un contraejemplo para la desigualdad

$$[\mathbb{E}(X | \mathcal{G})]^2 \leq \mathbb{E}(X^2 | \mathcal{G}).$$

Ejercicio 4. Sean X_1, X_2, \dots vaids. Sea K una variable aleatoria independiente de X_1, X_2, \dots y con valores en \mathbb{N} . Calcule

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_K | K).$$

Sugerencia: ¿Qué pasa cuando K toma sólo un valor?

Ejercicio 5. Sea X una variable aleatoria con valores en $(0, 1)$ y U una variable uniforme independiente de X . Calcule

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U \leq X} | X).$$

Ejercicio 6 (Opcional). Si (X, Y) son dos variables aleatorias con densidad conjunta $f(x, y)$, pruebe que:

$$\mathbb{E}(g(Y) | X) = \frac{\int f(X, y) g(y) dy}{\int f(X, y) dy}.$$

Sugerencia: ¿qué pasa si $g = \mathbf{1}_A$ para algún boreliano A ? Pruebe entonces el resultado si g es simple y al aproximar a funciones medibles no negativas por funciones simples, pruebe el resultado para funciones no-negativas. Por aditividad concluya. Este es el denominado procedimiento de aproximación y es muy socorrido dentro de la teoría de la medida.

Problema 1. Sea $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ una cadena de Markov con matriz de transición P y espacio de estados finito E . Para $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, defina $P^n f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$P^n f(x) = \sum_y P_{x,y}^n f(y).$$

Pruebe que

$$\mathbb{E}(f(X_{n+m}) | X_0, \dots, X_m) = P^n f(X_m).$$

Concluya que $(P^{n-m} f(X_m), 0 \leq m \leq n)$ es una martingala.

Si τ es un tiempo de paro para X que es menor o igual a n , pruebe que

$$\mathbb{E}(f(X_n) | \mathcal{F}_\tau) = P^{n-\tau} f(X_\tau).$$

Donde $\mathcal{F}_m = \sigma(X_0, \dots, X_m)$ y $\mathcal{F}_\tau = \{A : A \cap \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m\}$.

Si $Af = Pf - f$, pruebe que

$$f(X_n) - \sum_{i=1}^{n-1} Af(X_i)$$

es una martingala.

Problema 2. Sean (U_i) variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $r, v > 0$ y definamos $X_0 = r/(r+v)$ y para $n \geq 0$:

$$Y_{n+1} = \mathbf{1}_{U_{n+1} \leq X_n} \quad y \quad X_{n+1} = \frac{r+v+nc}{r+v+(n+1)c} X_n + \frac{c}{r+v+(n+1)c} Y_n.$$

Pruebe que la sucesión X es una martingala respecto de $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$. Haga un programa en R para simular 100000 trayectorias de 1000 pasos y grafique la distribución empírica de X_{1000} cuando $c = r = v = 1$ y cuando $c = r = 1$ y $v = 2$. Ajuste una distribución en cada caso y haga una prueba estadística para verificar su respuesta.