TAREA 2, ESPERANZA CONDICIONAL Y MARTINGALAS
PROCESOS ESTOCÁSTICOS II, CNSF 2013

Ejercicio 1. *Sea U una variable uniforme en $(0,1)$. Pruebe que si*

$$X_n = 2^n \mathbf{1}_{U \leq 2^{-n}}$$

entonces $X_0, X_1, \ldots$ es una martingala.

Ejercicio 2. *Sea (S_n) una caminata aleatoria simple con $\mathbb{P}(S_1 = 1) = p \in (0,1)$. Suponga que $p > 1 - p$.*

(1) Sea $\phi(x) = (p/q)^x$ y pruebe que $(\phi(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala respecto a la filtración que genera.

(2) Note que al aplicar el teorema de muestreo opcional de Doob al tiempo de paro acotado $T_{-a} \wedge T_b \wedge n$ se obtiene

$$1 = \mathbb{E}\big(\phi\big(S_{T_{-a}\wedge T_b \wedge n}\big)\big)\,.$$

Utilice alguna propiedad de la esperanza para pasar al límite conforme $n \to \infty$ y concluir que

$$1 = \mathbb{E}\big(\phi\big(S_{T_{-a}\wedge T_b}\big)\big) = \phi(-a)\,\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) + \phi(b)\,\mathbb{P}(T_b < T_{-a})\,.$$

Concluya con el cálculo explícito de $\mathbb{P}(T_b < T_{-a})$.

(3) Pruebe que $(S_n - n\,(2p-1))_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala.

(4) Note que al aplicar muestreo opcional al tiempo de paro $T_{-a} \wedge T_b \wedge n$ se obtiene

$$\mathbb{E}\big(S_{T_{-a}\wedge T_b \wedge n}\big) = (2p-1)\,\mathbb{E}(T_{-a} \wedge T_b \wedge n)\,.$$

Aplique propiedades de la esperenza al lado derecho y de la probabilidad al lado derecho que permitan pasar al límite conforme $n \to \infty$ en la expresión anterior y obtener:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{-a} \wedge T_b) &= \frac{1}{2p-1}\mathbb{E}\big(S_{T_{-a}\wedge T_b}\big) \\ &= \frac{1}{2p-1}\left(-a\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) + b\mathbb{P}(T_b < T_{-a})\right)\end{aligned}$$

y calcule explícitamente $\mathbb{E}(T_{-a} \wedge T_b)$.

Date: November 13, 2012.