TAREA 3, ESPERANZA CONDICIONAL Y MARTINGALAS
PROCESOS ESTOCÁSTICOS II, CNSF 2013

Ejercicio 1. *Sea X una supermartingala. Pruebe que si T es un tiempo de paro acotado por N entonces*

$$\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_T) \geq \mathbb{E}(X_N) .$$

Ejercicio 2. *Pruebe que si M es una (sub)martingala y C un proceso predecible y acotado entonces el proceso $C \cdot M$ dado por*

$$(C \cdot M)_n = M_0 + \sum_{m=1}^{n} C_m \left(M_m - M_{m-1}\right)$$

es una (sub)martingala.

Ejercicio 3. *Sea U_n la cantidad de cruces hacia arriba que hace el proceso M en el intervalo $[a, b]$ antes de n. Defina a*

$$C_1 = \mathbf{1}_{M_0 \leq a} \quad y \quad C_n = \mathbf{1}_{C_{n-1}=0} \mathbf{1}_{M_{n-1} \leq a} + \mathbf{1}_{C_{n-1}=1} \mathbf{1}_{M_{n-1} \leq b}$$

así como

$$Y = C \cdot M$$

Argumente que

$$Y_n \geq (b - a) \, U_n + (M_n - a)^- .$$

Al tomar esperanzas verifique que se satisface la desigualdad de cruces de Doob

$$\mathbb{E}(U_n) \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}\big((a - M_n)^+\big) .$$

Date: November 20, 2012.