# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Inmersiones mínimas de variedades Einstein-Kähler

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIANCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
DANIEL BALLESTEROS CHÁVEZ

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ

MÉXICO, D. F. 10 de diciembre del 2012.

# Índice general

# Introducción.

Las variedades de Kähler son un caso especial de variedades Riemannianas, las cuales tienen como principal característica el ser además variedades complejas tales que su tensor métrico queda completamente definido por una función holomorfa. También poseen una estructura simplectica de manera natural.

Al estudiar las subvariedades de Kähler de variedades ambiente que también son de Kähler se encuentra que son subvariedades mínimas. Un caso particular son las subvariedades totalmente geodésicas, de manera que a medida que se exploran las inmersiones de variedades complejas en espacios Euclideanos, se presentan muchas restricciones de este tipo.

En éste trabajo se detallan algunos resultados básicos referentes a las variedades de Kähler, sus inmersiones. En [8], Umehara demuestra que toda inmersioón isométrica de variedades Kähler-Einstein en $\mathbb{C}^N$ es totalmente geodésica. Por otra parte Di Scala [3] demuestra que toda inmersión isométrica mínima de una variedad Kähler-Einstein en $\mathbb{R}^n$ también es totalmente geodésica. Estos resultados dan algunos antecedentes para enunciar una conjetura referente a variedades Riemannianas, hecha por Di Scala en [3], la cual dice que cualquier inmersión isométrica mínima de una variedad localmente homogénea o de Einstein debe ser totalmente geodésica.

De ser cierta, esta conjetura nos indica que los ejemplos de variedades mínimas de Einstein que podemos encontrar inmersas en espacios Euclideanos son muy limitados.

# Capítulo 1

# Preliminares.

En este capítulo se enuncian las definiciones y resultados básicos que se utilizarán a lo largo del trabajo.

Sean $M^n$ y $\tilde{M}^m$ dos variedades Riemannianas de dimensión $n$ y $m$ respectivamente. Una *inmersión* es una aplicación suave $f : M \to \tilde{M}$ tal que $df_x : T_xM \to T_x\tilde{M}$ es inyectivo para todo $x \in M$. Nos apegaremos a la notación estándar y escribiremos $(f_*)_x$ para $df_x$. La codimensión de la inmersión $f$ es el número $p = m - n$. La inmersión se llama *inmersión isométrica* si para todo $X, Y \in T_xM$, se da la igualdad $\langle X, Y \rangle_M = \langle (f_*)_x(X), (f_*)_x(Y) \rangle_{\tilde{M}}$. Si $\tilde{M}$ es una variedad Riemanniana y $f : M \to \tilde{M}$ es una inmersión, podemos inducir una métrica en $M$ mediante la igualdad anterior. En este trabajo no distinguiremos entre campos vectoriales suaves y vectores tangentes, es decir, usaremos la notación $X \in TM$ para estos objetos. También usaremos la notación $g$ para la métrica de una variedad Riemanniana y $g_{ij}$ para su evaluación en algún marco local del espacio tangente.

Dado que para una inmersión $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ y para cada punto $x \in M$ existe una vecindad abierta $U$ de $x$ tal que $f(U)$ es abierto con la topología inducida, esto es, $f$ es localmente un *encaje* en su imagen, o más aún, $f$ es localmente la aplicación inclusión. Podemos considerar $T_xM \subset T_x\tilde{M}$ como subsespacio lineal y por tanto podemos hacer la descomposición $T_x\tilde{M} = T_xM \oplus T_xM^\perp$ de la cual obtenemos el *haz normal* $TM^\perp = \cup_{x \in M} T_pM^\perp$. Así, todo campo vectorial $X \in T\tilde{M}$ con dominio restringido a $f(M)$ se puede escribir como $X = X^\top + X^\perp$, donde $()^\top$ y $()^\perp$ son las proyecciones ortogonales de $T\tilde{M}$ en $TM$ y $TM^\perp$ respectivamente. Si tenemos una inmersión isométrica entre dos variedades Riemannianas $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ y denotamos por $\nabla$ y $\tilde{\nabla}$ a sus respectivas conexiones de Levi-Civita, puede verificarse que para todo $X, Y \in TM$, se tiene que $(\tilde{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y$. También es posible definir una aplicación bilineal $II : TM \times TM \to TM^\perp$ dado por $II(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$, llamado *la segunda forma fundamental* de la inmersión

$f$. Así, para todo $X,Y \in TM$ se tiene

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y). \qquad \text{(Fórmula de Gauss)}$$

Relacionado con la segunda forma fundamental tenemos al *operador de forma* $A : TM \times TM^{\perp} \to TM$, dado por $A(X,\xi) = -(\tilde{\nabla}_X \xi)^{\top}$, denotado simplemente como $A_\xi X$. Notando que si $X,Y \in TM$ y $\xi \in TM^{\perp}$ entonces $\langle Y,\xi\rangle = 0$, derivando y usando la compatibilidad de la conexión:

$$0 = X\langle Y,\xi\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y,\xi\rangle + \langle Y,\tilde{\nabla}_X \xi\rangle.$$

Luego, de la Fórmula de Gauss, tenemos

$$\langle II(X,Y),\xi\rangle = \langle Y, A_\xi X\rangle.$$

Usando la identidad anterior y la Fórmula de Gauss, al calcular la componente tangencial del tensor de curvatura de $\tilde{M}$, dado por

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

obtenemos para $X,Y,W,Z \in TM$ la expresión

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)Z,W\rangle &+ \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle \\ &- \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle,\end{aligned}$$
(Ecuación de Gauss)

donde $R$ es el tensor de curvatura de $M$. Si $\sigma \subset T_xM$ es un plano generado por vectores ortonormales $X,Y \in T_xM$, entonces podemos calcular las curvaturas seccionales de $M$ y $\tilde{M}$ mediante $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ y $\tilde{K} = \langle \tilde{R}(X,Y)Y,X\rangle$, respectivamente. Luego, la Ecuación de Gauss se reescribe como

$$K(X,Y) = \tilde{K}(X,Y) + \langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle - ||II(X,Y)||^2.$$

El *tensor de Ricci* de una variedad Riemanniana $M^n$ está definido con la igualdad $\mathrm{Ric}(X,Y) = \text{traza}\, Z \mapsto R(Z,X)Y$, para todo $X,Y \in TM$. La *curvatura de Ricci* en la dirección del vector unitario $X \in TM$ está dada por $\mathrm{Ric}(X) = 1/(n-1)\mathrm{Ric}(X,X)$. El *vector de curvatura media* $H(x)$ de una inmersión isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ en el punto $x \in M$ se define como $H(x) = 1/n \sum_j II(X_j,X_j)$, donde $X_1,\ldots,X_n \in T_xM$ es un conjunto de vectores tangentes ortonormales. Decimos que una inmersión isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ es *mínima en* $x \in M$ si $H(x) = 0$. Si $f$ es mínima en todo punto $x \in M$, diremos que $f$ es una *inmersión mínima*. Una *variedad de Einstein* es una variedad Riemanniana cuyo tensor se Ricci es un múltiplo escalar de la métrica, es decir, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que para todo $X,Y \in TM$ se tiene $\mathrm{Ric}(X,Y) = \rho\langle X,Y\rangle$.

Recordemos que dado un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita $n$, una *estructura compleja* en $V$ es un *endomorfismo* $J : V \to V$ tal que $J^2 = -Id$ donde $Id$ es la identidad en $V$. Un espacio vectorial real $V$ con una estructura compleja $J$ necesariamente tiene dimensión par.

Un *producto interno Hermitiano* en un espacio vectorial real $V$ con estructura compleja $J$ es un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que cumple $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Si $V$ es un espacio vectorial real de dimensión $m$, la complexificación de $V$ es el espacio vectorial complejo $V^c = V \oplus iV$ donde $i = \sqrt{-1}$. Si además $V$ tiene estructura compleja $J$, ésta se puede extender de manera única a un endomorfismo en $V^c$ tal que $J^2 = -Id$, sus valores propios son $i$ y $-i$, con subespacios $V^{1,0}, V^{0,1}$ de vectores propios respectivos.

La siguiente proposición será de utilidad al extender los conceptos anteriores a los espacios tangentes de variedades Riemannianas.

**Proposición 1.1.** *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto Hermitiano en un espacio vectorial real $V$ con estructura compleja $J$. Entonces el producto Hermitiano puede extenderse a una forma compleja bilineal simétrica de $V^c$ denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ que satisface*

- $\langle \overline{Z}, \overline{W} \rangle_c = \overline{\langle Z, W \rangle_c}, \qquad Z, W \in V^c$;
- $\langle Z, \overline{Z} \rangle_c > 0, \qquad 0 \neq Z \in V^c$;
- $\langle Z, \overline{W} \rangle_c = 0, \qquad Z \in V^{1,0}, W \in V^{0,1}$

*Demostración.* La demostración es una aplicación directa de las definiciones. □

Una *estructura casi-compleja* en una variedad Riemanniana $M$ es un campo tensorial $J$ de tipo $(1,1)$, es decir, $J \in \Gamma(TM \otimes TM^*)$, tal que para cada $p \in M$, $J_p : T_pM \to T_pM$ es una estructura compleja. Una variedad Riemanniana con una estructura casi-compleja fija se llama *variedad casi-compleja*. Claramente, una variedad casi-compleja es de dimension par. Nótese también que si $M$ es una variedad casi-compleja y $p \in M$, es posible dar una base para $T_pM$ de la forma $\{v_1, \dots, v_n, J_pv_1, \dots, J_pv_n\}$. Toda variedad casi compleja es orientable, basta tomar la orientación para $M$ como la familia de cartas $(U, (x_1, \dots, x_{2n}))$ alrededor de $p$ tales que la base de $T_pM$ $\{\partial/\partial x_1|_p, \dots, \partial/\partial x_{2n}|_p\}$ difiera de la anterior mediante una transformación lineal de determinante positivo, pues para cualesquiera dos bases de la forma $v_1, \dots, v_n, J_pv_1, \dots, J_pv_n$ para $T_pM$, el determinante de la matriz de cambio de base será positivo ya que es un isomorfismo y además es de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

Esta elección es llamada la *orientación natural* de la variedad casi-compleja $M$.

Una *variedad compleja* de dimensión compleja $n$, es una variedad diferenciable real de dimensión $2n$, para la cual existe una cubierta $\{U_\alpha\}$ y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U \to \mathbb{C}^n$ tales que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son holomorfos en $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$. Toda variedad compleja $M$ puede dotarse de una estructura casi-compleja $J_M$ mediante las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ al definir $J_M = (d\varphi_\alpha)^{-1} \circ J_0 \circ d\varphi_\alpha$, donde $J_0$ es la estructura casi-compleja de $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_k = x_k + iy_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}\}$ dada por $J_0(\partial/\partial x_k) = \partial/\partial y_k$ , $J_0(\partial/\partial y_k) = -\partial/\partial x_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Una estructura casi-compleja $J$ en una variedad $M$ es una *estructura compleja* si $M$ es una variedad compleja tal que $J$ es inducida por sus cartas como se describió anteriormente. En tal caso, diremos que la estructura casi-compleja es *integrable*.

**Proposición 1.2.** *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$, abierto y $f : U \to \mathbb{C}^m$. Si $J$ y $J'$ son las estructuras complejas de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ definidas arriba respectivamente. Decimos que $f$ preserva la estructura compleja si $df \circ J = J' \circ df$. Entonces, $f$ preserva la estructura compleja si y sólo si $f$ es holomorfa.*

*Demostración.* Sabemos que $\mathbb{R}^{2n}$ con la estructura compleja $J$ es ismomorfo a $\mathbb{C}^n$, de manera similar pasa con $\mathbb{R}^{2m}$ con la estructura $J'$ y $\mathbb{C}^m$. Sean entonces $(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_n)$ y $(u_1, \ldots, u_m, v_1 \ldots, v_m)$, las coordenadas naturales de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ respectivamente. Entonces la aplicación $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ puede escribirse como $f = (u_1 + iv_1, \ldots, u_m + iv_m) \simeq (u_1, \ldots, u_m, v_1 \ldots, v_m)$ donde estamos ahora pensando a $u_k, v_k : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, como funciones de $x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_n$. Luego, $f$ es holomorfa si y sólo si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial y_j}$$
$$\frac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

para toda $j = 1, \ldots, n$, y toda $k = 1, \ldots, m$. Por otro lado, como $df : T\mathbb{C}^n \to T\mathbb{C}^m$ es lineal, entonces $df(\partial/\partial x_j)$ y $df(\partial/\partial y_j)$ pueden escribirse como combinación lineal de la base $\{\partial/\partial u_1, \ldots, \partial/\partial u_m, \partial/\partial v_1, \ldots, \partial/\partial v_m\}$ de $T\mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$, dándose las igualdades:

$$df(\partial/\partial x_j) = \sum_{k=1}^{m} (\partial u_k/\partial x_j)(\partial/\partial u_k) + \sum_{k=1}^{m} (\partial v_k/\partial x_j)(\partial/\partial v_k)$$
$$df(\partial/\partial y_j) = \sum_{k=1}^{m} (\partial u_k/\partial y_j)(\partial/\partial u_k) + \sum_{k=1}^{m} (\partial v_k/\partial y_j)(\partial/\partial v_k)$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Recordando que tanto $J$ como $J'$ cumplen con

$$J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j, \qquad J(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j,$$
$$J'(\partial/\partial u_j) = \partial/\partial v_j, \qquad J'(\partial/\partial v_j) = -\partial/\partial u_j,$$

la igualdad $df \circ J = J' \circ df$ se tiene. $\square$

En vista de la proposición anterior diremos que una aplicación $f : M \to N$ entre dos variedades complejas es *holomorfa* si y sólo si $df \circ J = J' \circ df$ donde $J$ y $J'$ son las estructuras casi-complejas de $M$ y $N$ respectivamente.

**Definición 1.1** (Variedad de Kähler)**.** Una variedad de Kähler $M$ es una variedad compleja, dotada de una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que la estructura casi-compleja $J$ de $M$ cumple con

$$(i)\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$
$$(ii)(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X JY - J\nabla_X Y = 0.$$

Para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, donde $\nabla$ es la conexión de Levi-Civita.

Es claro que toda variedad Riemanniana real de dimensión par admite una estructura casi-compleja definida localmente por medio de las cartas. Sin embargo, $\mathbb{S}^6$ es un ejemplo de una variedad con una estructura casi-compleja $J$ que no es una estructura compleja. En 1956, A. Newlander y L. Niremberg dieron condiciones para la integrabilidad de estructuras casi-complejas, y por las cuales sabemos que la estructura casi-compleja de una varidad de Kähler es una estructura compleja.

Como ejemplo de variedade de Kähler aparece el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ con la métrica de Fubini-Study.

Es importante notar que si tenemos una variedad de Kähler $M$ de dimensión $n$, en particular es una variedad compleja, de manera que para cada $p \in M$, existe una vecindad abierta $U$ de $p$ y un sistema de coordenadas $z : U \to \mathbb{C}^n$ de la forma $z = (z_1, \ldots, z_n)$, pero éste sistema induce de manera natural un sistema de coordenadas de la forma $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^{2n}$ al poner $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Por lo que viendo a $M$ como varedad Riemanniana de dimensión $2n$ tenemos que el espacio tangente a $M$ en el punto $p \in M$ tiene como base $\{\partial/\partial x_1|_p, \ldots, \partial/\partial x_n|_p, \partial/\partial y_1|_p, \ldots, \partial/\partial y_n|_p\}$, además de estar dotada de manera natural con la estructura compleja $J$. Luego, como variedades de Kähler, la definición nos dice que la métrica $g$ es Hermitiana. Así, por la Proposición 1.1, $g$ puede extenderse a la complexificación de $T_pM$. Si denotamos por $(T_pM)^c = T_pM \oplus iT_pM$, entonces una base para éste espacio es $\{Z_1, \ldots, Z_n, \bar{Z}_1 \ldots, \bar{Z}_n\}$ donde $Z_k = \partial/\partial z_k = 1/2(\partial/\partial x_k - i\partial/\partial y_k)$ y $\bar{Z}_k = \partial/\partial \bar{z}_k = 1/2(\partial/\partial x_n + i\partial/\partial y_n)$ (hemos omitido el punto de aplicación $|_p$ y en lo sucesivo será sobreentendido). La observación es inmediata al tenerse $\partial/\partial x_k = Z_k + \bar{Z}_k$ y similarmente $\partial/\partial y_k = i(Z_k - \bar{Z}_k)$. Escribiremos

$$g_{\alpha\beta} = g(Z_\alpha, Z_\beta);\; g_{\alpha\bar{\beta}} = g(Z_\alpha, Z_{\bar{\beta}}) = g(Z_\alpha, \bar{Z}_\beta);\; g_{\bar{\alpha}\beta} = g(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\beta) = g(\bar{Z}_\alpha, Z_\beta),$$

donde usamos la misma notación para $g$ como extensión de la métrica a $(T_pM)^c$ y $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$. Usando nuevamente la Proposición 1.1 tenemos como consecuencia las siguientes igualdades:

$$g_{\alpha,\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0; \qquad g_{\bar{\alpha},\beta} = g_{\alpha,\bar{\beta}}$$

por lo que la métrica en $(T_pM)^c$ está dada por la igualdad

$$ds^2 = 2\sum_{k,j} g_{k,\bar{j}} dz_k d\bar{z}_j \tag{1.1}$$

donde $dz_k = dx_k + idy_k$ y $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$. Por otra parte, la segunda condición para que $M$ sea una variedad de Kähler, se traduce en la ecuación

$$\frac{\partial g_{j,\bar{k}}}{\partial z_\ell} = \frac{\partial g_{\ell,\bar{k}}}{\partial z_j}$$

que equivale a la existencia de una función escalar real-valuada y analítica $\Phi(z, \bar{z})$ tal que

$$g_{j,\bar{k}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}. \tag{1.2}$$

Esta afirmación es consecuencia del $\bar{\partial}-$Lema de Poincaré, haciendo uso de la Cohomología de Dolbeault. Estos temas son de suma importancia para el estidio de variedades complejas, sin embargo escapan de los objetivos de este trabajo. Para la demostración de la última igualdad pueden consultarse tanto [7] como [5].

En la siguiente proposición se enuncian las propiedades del tensor de curvatura y de la estructura casi-compleja $J$ en las variedades de Kähler, donde se utilizan tanto las simetrías como anti-simetrías usuales de la curvatura cuando se trabaja como variedades Riemannianas reales.

**Proposición 1.3.** *Sea $M$ una variedad de Kähler con tensor de curvatura $R$. Entonces para cada $x \in M$ y $X, Y \in T_xM$ se tiene*

*(a)* $R(X,Y) \circ J = J \circ R(X,Y)$.

*(b)* $R(JX, JY) = R(X,Y)$.

*(c)* $Ric(JX, JY) = Ric(X,Y)$.

*Demostración.* Las pruebas son directas de la definición del tensor de curvatura y de la Definición 1.1:

$$\begin{aligned} R(X,Y)JZ &= \nabla_X \nabla_Y JZ - \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]} JZ \\ &= J\nabla_X \nabla_Y Z - J\nabla_Y \nabla_X Z - J\nabla_{[X,Y]} Z \\ &= JR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

lo cual prueba $(a)$. De manera similar, usando el inciso $(a)$ y usando las propiedades de simetría y antisimetría del tensor de curvatura se sigue que:

$$\begin{aligned}
\langle R(JX,JY)Z,W\rangle &= \langle R(W,Z)JY,JX\rangle \\
&= \langle JR(W,Z)Y,JX\rangle \\
&= \langle R(W,Z)Y,X\rangle \\
&= \langle R(X,Y)Z,W\rangle.
\end{aligned}$$

Para la demostración de la propiedad $(c)$, recordemos que $Ric(X,Y) = \text{traza}(B)$, donde $B(Z) = R(Z,X)Y$. Nos auxiliaremos de un marco ortonormal $\{X_1,\ldots,X_n\}$ de $TM$. Al hacer los cálculos de manera directa obtenemos

$$\begin{aligned}
Ric(JX,JY) &= \sum_{i=1}^{n}\langle B(X_i),X_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle R(X_i,JX)JY,X_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle JR(X_i,JX)Y,X_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle -R(X_i,JX)Y,JX_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle -R(JX_i,-X)Y,JX_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle R(JX_i,X)Y,JX_i\rangle \\
&= Ric(X,Y),
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $JX_i$, $i = 1\ldots,n$ también es un marco ortonormal de $TM$. □

**Proposición 1.4.** *El tensor de Ricci de una variedad de Kähler cumple con*

$$Ric_{\alpha,\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 \ln G}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \tag{1.3}$$

*donde $G$ denota el determinante de la matriz Hermitiana $(g_{\alpha\bar{\beta}})$.*

Referimos al lector a la demostración detallada de este resultado en el Capítulo 12 de [7]

# Capítulo 2

# La Función Diástasis.

En esta capítulo escribiremos algunas ideas y resultados de E. Calabi [1], donde llega a condiciones necesarias y sufiecientes para la existencia de encajes isométricos de una variedad compleja en un espacio $\mathbb{C}^N$ como ambiente.

Recordemos que el potencial de Kähler $\Phi$ de la Ecuación (1.2), es una función (con valores reales) analítica definida en una vecindad de algún punto de la variedad. Sin embargo este potencial no es único, pues al sumar la parte real de una función holomorfa obtenemos otro potencial. Notemos también que al duplicar las variables $z$ y $\bar{z}$ se puede obtener una función $\tilde{\Phi}$ definida en una vecindad $U$ de la diagonal que contiene al punto $(p,\bar{p}) \in M \times \bar{M}$, donde $\bar{M}$ denota la variedad conjugada de $M$ que se obtiene al conjugar las cartas coordenadas de $M$, esto se verifica mandando al punto $p \in M^k$ a $(p,\bar{p}) \in M^k \times \bar{M}^k$ y expresando al elemento analítico $\Phi$ como serie de potencias de las coordenadas $z_1,\ldots,z_k,\bar{z}_1\ldots\bar{z}_k$ al identificar cada $z_\alpha(p)$ con $z_\alpha(p,\bar{p})$ y $\bar{z}_\beta(p)$ con $z_{k+\beta}(p,\bar{p})$. Para los detalles de esta construcción pueden encontrarse en [1], pág. 2. Usaremos la notación $\Phi$ tanto para el potencial de Kähler como para su levantamiento analítico en una vecindad $V \subset M \times \bar{M}$ del punto $(p,\bar{p})$.

**Definición 2.1** (Función *diastasis*)**.** Sean $M$ una variedad de Kähler, $q \in M$ y $V \subset M \times \bar{M}$ una vecindad de la diagonal con $(q,\bar{q}) \in V$, donde está definida la extensión del potencial de Kähler $\Phi$. Entonces a la función $D : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$D(q,r) = \Phi(z(q),\bar{z}(q)) + \Phi(z(r),\bar{z}(r)) - \Phi(z(q),\bar{z}(r)) - \Phi(z(r),\bar{z}(q)) \tag{2.1}$$

se le llama la función diastasis.

La definición de la función diastasis [1] (proveniente del griego $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\iota\sigma$ que significa distancia) está determinada de manera única por la métrica de Kähler y es independiente del sistema de coordenadas complejas. Se tiene también que es una función real-valuada y analítica localmente. Las siguientes son la Proposición 3 y Proposición 4 de [1]:

**Proposición 2.1.** *La función diastasis cumple con las siguientes propiedades:*

- *Es Simétrica, es decir $D(q,r) = D(r,q)$ y además $D(q,q) = 0$.*
- *Para $r \in M$ fijo, $D(q,r)$ es una primitiva de la métrica $g$ con respecto a la variable $q$. De manera más explicita,*

$$\left.\frac{\partial^2 D(\cdot,r)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right|_q = g_{j,\bar{k}}|_q.$$

A continuación enunciaremos dos lemas que se demuestran en [9], las cuales usan las propiedades de la diástasis y que serán importantes para la prueba de una proposición en una sección posterior.

**Lema 2.2** ([10],Umehara)**.** *Sea $M$ una variedad de Kähler y $p \in M$ cualquier punto. Entonces, una vecindad $U$ de $p$ esta inmersa en $\mathbb{C}^N$ de manera holomorfa e isométrica si y sólo si existen funciones holomorfas $\phi_1, \dots, \phi_N$ definidas en $U$ tales que*

$$D(p,q) = \sum_{k=1}^{N} |\phi_k(q)|^2, \qquad q \in U$$
$$\phi_k(p) = 0, \qquad k = 1, \dots, N.$$

Al conjunto de combinaciones lineales en $\mathbb{R}$ de funciones analíticas reales de la forma $h\bar{k} + k\bar{h}$ donde $h$ y $k$ son funciones holomorfas en $M$ se le denotará por $\Lambda(M)$, la cual resulta ser un álgebra asociativa.

**Lema 2.3** ([10], Umehara)**.** *Si $\phi_1, \dots, \phi_N$ son funciones holomorfas no constantes en una variedad compleja $M$ tales que par algún punto dado $p \in M$ se tiene $\phi_k(p) = 0$, $k = 1, \dots, N$, entonces*

1. $\exp(\sum_k |\phi_k|^2) \notin \Lambda(M)$.
2. $(1 - \sum_k |\phi_k|^2)^{-\alpha} \notin \Lambda(M)$*, con* $\alpha > 0$.

# Capítulo 3

# Inmersiones isométricas de variedades de Kähler en variedades de Kähler.

En esta sección se enuncian dos proposiciones referente a inmersiones isométricas $f : M \to N$ donde tanto $M$ como $N$ son variedades de Kähler.

**Definición 3.1.** Para cada $p \in M$, con $M$ variedad de Kähler y para todo plano (real) $\sigma \subset T_pM$ invariante bajo la estructura compleja $J$ de $M$ se define la *curvatura seccional holomorfa de* $\sigma$ como

$$K(X,JX) = \langle R(X,JX)JX, X\rangle,$$

donde $X \in T_pM$ es un vector unitario en $\sigma$.

Otra de las características importantes de las variedades de Kähler es que cualquier subvariedad inmersa que también sea Kähler resulta ser un ejemplo de variedad mínima. Esta afirmación se demuestra en la siguiente proposición, que también puede encontrarse en [2] y será de utilidad al calcular el tensor de Ricci en variedades de Kähler inmersas en espacios de curvatura holomorfa constante.

**Proposición 3.1.** *Sean $M$ y $\tilde{M}$ dos variedades de Kähler con estructuras complejas $J$ y $\tilde{J}$ respectivamente. Si $f : M \to \tilde{M}$ es una inmersión isométrica holomorfa, entonces la segunda forma fundamental $II$ de $f$ cumple con la igualdad*

$$II(X,JY) = \tilde{J}II(X,Y) = II(JX,Y),$$

*para todo $X,Y \in TM$. Como consecuencia $f$ es una inmersión mínima.*

*Demostración.* Sean $X,Y \in TM$. Como $f$ es holomorfa entonces $f_*$ conmuta con las estructuras complejas $J$ y $\tilde{J}$. Además por ser $M$ variedad de Kähler entonces se cumple $\tilde{\nabla}_X \tilde{J}Y = \tilde{J}\tilde{\nabla}_X Y$ y de manera similar con $\nabla$, la conexión de $M$. Luego, como consecuencia de la Fórmula de Gauss, se sigue:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}II(f_*(X), f_*(Y)) &= \tilde{J}\left(\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*(Y) - \nabla_{f_*(X)} f_*(Y)\right) \\
&= \tilde{J}\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*(Y) - \tilde{J}\nabla_{f_*(X)} f_*(Y) \\
&= \tilde{\nabla}_{f_*X} \tilde{J} f_*(Y) - \nabla_{f_*(X)} \tilde{J} f_*(Y) \\
&= \tilde{\nabla}_{f_*X} f_*(JY) - \nabla_{f_*(X)} f_*(JY) \\
&= II(f_*(X), f_*(JY)),
\end{aligned}$$

de manera que al hacer la identificación usual de $TM$ con $f_*(TM) \subset T\tilde{M}$, tenemos la igualdad

$$\tilde{J}II(X,Y) = II(X,JY).$$

Usando la simetría de la segunda forma fundamental obtenemos de manera análoga $\tilde{J}II(X,Y) = II(JX,Y)$.

De las igualdades anteriores tenemos que si $\xi \in TM^\perp$ entonces

$$\langle A_\xi JX, Y\rangle = \langle II(JX,Y), \xi\rangle = \langle II(X,JY), \xi\rangle = \langle A_\xi X, JY\rangle = -\langle JA_\xi X, Y\rangle,$$

es decir $A_\xi JX = -JA_\xi X$, o equivalentemente, $II(X,Y) = -II(JX,JY)$. Por lo tanto, al calcular el vector de curvatura media y considerando que si $E_i, \ldots, E_{2n} \in TM$ es un marco ortonormal entonces $JE_i, \ldots, JE_{2n} \in TM$ también lo es, se obtiene

$$H = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} II(E_i,E_i) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} II(JE_i,JE_i) = -H \tag{3.1}$$

con lo que $H = 0$, esto es, $f$ es inmersión mínima. □

**Proposición 3.2.** *Sea $M$ una subvariedad de Kähler de dimensión $n$ de una variedad de Kähler de curvatura seccional holomorfa constante $2c$. Entonces, el tensor de Ricci satisface*

$$Ric \leq (n+1)cg$$

*donde $g$ es la métrica de Kähler de $M$. La igualdad se obtiene si y sólo si $M$ es totalmente geodésica.*

*Demostración.* Denotaremos por $\tilde{M}^{n+p}$ a la variedad de Kähler de curvatura seccional constante $2c$. Sean $E_1, \ldots, E_n, JE_1, \ldots, JE_n \in TM$ una base ortonormal de

$M$ de tal manera que sea parte de la base ortonormal $E_1,\dots,E_{n+p},\tilde{J}E_1,\dots,\tilde{J}E_{n+p}$ de $T\tilde{M}$. Se definen los tensores de Ricci de $M$ y $\tilde{M}$ como

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_M(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\langle R(E_i,X)Y,E_i\rangle + \langle R(JE_i,X)Y,JE_i\rangle\right)\\ \mathrm{Ric}_{\tilde{M}}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n+p}\left(\langle \tilde{R}(E_i,X)Y,E_i\rangle + \langle \tilde{R}(JE_i,X)Y,JE_i\rangle\right).\end{aligned}$$

Usando la Ecuación de Gauss en el lado derecho de la igualdad del tensor de Ricci de $M$ tenemos las identidades

$$\begin{aligned}\langle R(E_i,X)Y,E_i\rangle = \langle \tilde{R}(E_i,X)Y,E_i\rangle + \langle II(E_i,E_i),II(X,Y)\rangle\\ -\langle II(E_i,Y),II(X,E_i\rangle\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\langle R(JE_i,X)Y,JE_i\rangle = \langle \tilde{R}(JE_i,X)Y,JE_i\rangle + \langle II(JE_i,JE_i),II(X,Y)\rangle\\ -\langle II(JE_i,Y),II(X,JE_i)\rangle.\end{aligned} \tag{3.3}$$

De la Proposición 3.1 tenemos $\tilde{J}II(X,Y) = II(JX,Y) = II(X,JY)$, y dado que la métrica es Hermitiana sabemos que se cumplen las igualdades

$$\langle II(JE_i,JE_i),II(X,Y)\rangle = -\langle II(E_i,E_i),II(X,Y)\rangle$$

y

$$\langle II(JE_i,Y),II(X,JE_i)\rangle = \langle II(E_i,Y),II(X,E_i))\rangle.$$

Por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_M(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\big\{\langle \tilde{R}(E_i,X)Y,E_i\rangle + \langle \tilde{R}(JE_i,X)Y,JE_i\rangle\\ -2\langle II(E_i,Y),II(X,E_i)\rangle\big\}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por otro lado, en [6] Vol. 2, pág. 166-167, se demuestra en la Proposición 7.2 que el tensor de curvatura $\tilde{R}$ de una variedad cuya curvatura seccional constante en planos invariantes bajo la estructura compleja $\tilde{J}$ cumple con la igualdad $\tilde{R} = 2cR_0$, donde

$$\begin{aligned}R_0(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\big\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\\ + g(X,\tilde{J}Z)g(Y,\tilde{J}W) - g(X,\tilde{J}W)g(Y,\tilde{J}Z)\\ +2g(X,\tilde{J}Y)g(Z,\tilde{J}W)\big\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

.

Al aplicar estos resultados en nuestro caso obtenemos primero

$$\begin{aligned} R_0(E_i,Y,E_i,X) &= \frac{1}{4}\left\{g(X,Y)-g(E_i,X)g(Y,E_i)+3g(E_i,\tilde{J}Y)g(E_i,\tilde{J}X)\right\}, \\ R_0(\tilde{J}E_i,Y,\tilde{J}E_i,X) &= \frac{1}{4}\left\{g(X,Y)-g(E_i,\tilde{J}X)g(\tilde{J}Y,E_i)+3g(E_i,Y)g(E_i,X)\right\}. \end{aligned}$$

Luego, como la métrica es Hermitiana se tiene $g(E_i,\tilde{J}Y)g(E_i,\tilde{J}X)=g(\tilde{J}E_i,Y)g(\tilde{J}E_i,X)$ y se sigue que

$$\begin{aligned} R_0(E_i,Y,E_i,X)+&R_0(\tilde{J}E_i,Y,\tilde{J}E_i,X) = \\ &= \frac{1}{2}\left\{g(X,Y)+g(E_i,X)g(Y,E_i)+g(\tilde{J}E_i,X)g(Y,\tilde{J}E_i)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{g(X,Y)+g(g(Y,E_i)E_i,X)+g(g(Y,\tilde{J}E_i)\tilde{J}E_i,X)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{g(X,Y)+g(g(Y,E_i)E_i+g(Y,\tilde{J}E_i)\tilde{J}E_i,X)\right\}, \end{aligned}$$

por lo que al sumar sobre $i=1,\ldots,n$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n}\left(R_0(E_i,Y,E_i,X)+R_0(\tilde{J}E_i,Y,\tilde{J}E_i,X)\right)=\frac{1}{2}(n+1)g(X,Y).$$

Por último, usando $\tilde{R}=2cR_0$ la Ecuación (3.4) se reescribe como:

$$\mathrm{Ric}_M(X,Y)=(n+1)cg(X,Y)-2\sum_{i=1}^{n}\langle II(E_i,Y),II(X,E_i)\rangle, \tag{3.6}$$

de lo cual se sigue que para todo $X\in TM$ se tiene

$$\mathrm{Ric}_M(X,X)\leq(n+1)cg(X,X).$$

Las demás afirmaciones son consecuencia de la Ecuación (3.6) y de $II=0$ como definición de subvariedad totalmente geodésica. $\square$

# Capítulo 4

# Inmersiones Isométricas de Variedades Riemannianas de Einstein en espacios Euclideanos.

A continuación se presentan algunos resultados sobre inmersiones isométricas tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{C}^N$, enfocandonos en variedades Kähler-Einstein.

**Proposición 4.1.** *Sea $M$ una variedad Riemanniana, $f : M \to \mathbb{R}^n$ inmersión isométrica mínima. Si $M$ tiene tensor de Ricci plano $(Ric \equiv 0)$, entonces $f$ es totalmente geodésica.*

*Demostración.* Por una parte tenemos, que si $E_1, \dots, E_n \in TM$ es base ortonormal, entonces

$$0 = Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, X)Y, E_i \rangle.$$

Usando la Fórmula de Gauss, el hecho de que $H \equiv 0$ y que en $\mathbb{R}^n$ la curvatura es cero, es decir $\tilde{R} \equiv 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \left[ \langle \tilde{R}(E_i, X)Y, E_i \rangle + \langle II(E_i, E_i), II(X,Y) \rangle - \langle II(E_i, Y), II(E_i, X) \rangle \right] \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle II(E_i, Y), II(E_i, X) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si ponemos $X = Y$, tenemos $\sum_{i=1}^{n} ||II(X, E_i)||^2 = 0$, es decir

$$II(X, E_i) = 0$$

de donde se concluye $II \equiv 0$, por tanto, $f$ es totalmente geodésica. $\square$

El siguiente teorema caracteriza a las subvariedades de Kähler-Einstein inmersas en el espacio $\mathbb{C}^n$:

**Teorema 4.2** (Umehara, [8])**.** *Toda subvariedad de $\mathbb{C}^N$ que sea Kähler, Einstein y de dimensión $n \geq 1$ es totalmente geodésica.*

*Demostración.* Si suponemos que $M$ es una subvariedad de Einstein de una variedad de curvatura seccional constante $c \leq 0$, entonces en cada para $x \in M$, existe una carta $(U, z_1, \ldots, z_n)$ en donde se cumplen tanto

$$\mathrm{Ric}_M = -\lambda g$$

como

$$\mathrm{Ric}_M = 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} K_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$$

y por tanto

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = -\mu g_{\alpha\bar{\beta}} \tag{4.1}$$

donde $\mu \geq 0$ . Además de la Proposición 1.4 y la Ecuación (4.1) se sigue que

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \ln G}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}.$$

Como la diástasis es una primitiva de la métrica salvo la suma de la parte real de una función holomorfa, digamos $h$, entonces

$$D_M(p, \cdot) = \frac{1}{\mu} \left(h + \bar{h} + \ln G\right). \tag{4.2}$$

La demostración será por contradicción. Supongamos entonces que $M$ no es totalmente geodésica. Entonces por la Proposición 3.2, tenemos que $\mu > 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mu = 1$. Del Lema 2.2, existen funciones holomorfas $\phi_1, \ldots, \phi_N$ en $U$ tales que

$$D_M(p,q) = \sum_{\sigma=1}^{N} |\phi_\sigma(q)|^2, \qquad \forall q \in U. \tag{4.3}$$

$$\phi_\sigma(p) = 0, \qquad \sigma = 1, \ldots, N. \tag{4.4}$$

Por lo tanto tenemos que la métrica de Kähler se escribe como

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial z_\sigma} \overline{\left(\frac{\partial \phi_\sigma}{\partial z_\beta}\right)}.$$

Recordemos que toda matriz Hermitiana tiene determinante real, por lo tanto $G$ toma valores reales en todo punto de $U$, es decir, $G \in \Lambda(U)$. Por otra parte, de la igualdad (4.2) y recordando que estamos suponiendo que $\mu = 1$, se tiene que

$$\exp\{D_M(p,\cdot)\} = |\exp(h)|^2 G.$$

Al sustituir la expresión para $D_M(p,\cdot)$ en (4.3) obtenemos

$$\exp\left(\sum_{\sigma=1}^{N} |\phi_\sigma(\cdot)|^2\right) = |\exp(h)|^2 G,$$

es decir, $\exp\left(\sum_{\sigma=1}^{N} |\phi_\sigma(\cdot)|^2\right) \in \Lambda(U)$, en contradicción al Lema 2.3. Por lo tanto $M$ es totalmente geodésica. $\square$

En [3] se estudian las inmersiones mínimas de variedades de Kähler en espacios Euclideanos, y el teorema principal que se demuestra es el siguiente:

**Teorema 4.3.** *Sea $M$ una variedad de Kähler que además es de Einstein. Entonces toda inmersión isométrica y mínima $f : M \to \mathbb{R}^n$ es totalmente geodésica.*

De lo cual se desprende que las inmersiones isométricas mínimas y de Einstein en espacios Euclideanos son en realidad subespacios afines.

Así que resulta natural preguntarse si al quitar la condición de ser Kähler se tiene el mismo tipo de resultado, es decir, Di Scala enuncia la siguiente conjetura en [3]:

**Conjetura 4.1.** Sea $M$ una variedad Riemanniana que sea de Einstein. Entonces cualquier inmersión isométrica mínima $f : M \to \mathbb{R}^n$ es totalmente geodésica.

Es importante añadir que el Teorema 4.3 también es válido si en lugar de pedir que la variedad $M$ sea de Einstein, pedimos que sea Homogénea, por lo que la Conjetura 4.1 también tiene sentido para variedades de Kähler homogéneas, sin embargo Di Scala [4] prueba que toda subvariedad de un espacio Euclideano que sea homogénea (extrínseca) y mínima debe ser totalmente geodésica.

# Bibliografía


[1] E. Calabi, *Isometric imbedding of complex manifolds.* The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. **58** No. 1 (1953), 1-23.

[2] M. Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions.* Publish or Perish (1990).

[3] A.J. Di Scala, *Minimal immersions of Kähler manifolds into Euclidean spaces.* Bulletin of the London Mathematical Society (2003), **35** 825-827.

[4] A.J. Di Scala, *Minimal homogeneous submanifolds in Euclidean spaces.* Annals of Global Analysis and Geometry (2000), **21** 15-18.

[5] p. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry.* Willey and Sons, New York (1978)

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundation of differential geometry.* Vol. 1 y Vol. 2 Wiley-Interscience, New York (1969).

[7] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry.* London Mathematical Society, Student Texts 69.

[8] M. Umehara, *Einstein Kaehler submanifolds of a complex linear or hyperbolic space.* Tôhoku Mathematical Journal. No. **39** (1987) 385-389.

[9] M. Umehara, *Kaehler submanifolds of complex space forms.* Tokio J. Math, Vol. **10** No. 1 (1987) 203-214.

[10] M. Umehara, *Diastases and real analytic functions on complex manifolds.* J. Math. Soc. Japan, Vol. **40** No. 3 (1988) 519-539.