UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

SUPERFICIES CON ÁNGULO CONSTANTE Y CURVATURA MEDIA CONSTANTE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA: **LIC. EN MAT. *CINTHIA BARRERA CADENA***

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. A 24 DE MAYO DE 2013.

A mis padres: Azucena y Horacio, por el amor a lo largo de toda mi vida y el apoyo incondicional e infinito en cada uno de mi proyectos.

A mis Hermanos: Yeltsin Arturo, Sayuri Deyanir y Yarali, por ser parte de mi alegría, pero más aún, una motivación para seguir adelante.

A mi pareja: Ramiro, por ser más que un incansable compañero a lo largo de todo este trayecto, por el amor profesado y ese enorme apoyo.

A mi asesor: Dr. Gabriel Ruiz Hernández, por haber sabido dirigirme con pasiencia, esmero, dedicación, amabilidad y la mejor disposición a lo largo de esta investigación.

Por que sin ustedes no hubiese sido posible lograr esto, no puedo menos que decirles

GRACIAS

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM « PAPIIT IA100412 » « Geometría de Subvariedades ». Agradezco a DGAPA-UNAM la beca recibida.

Superficies con ángulo constante y curvatura media constante

Cinthia Barrera Cadena

Índice

Agradecimientos.

A mis padres: Azucena y Horacio, por el amor a lo largo de toda mi vida y el apoyo incondicional e infinito en cada uno de mis proyectos.

A mis hermanos: Yeltsin Arturo, Sayuri Deyanir y Yarali, por ser parte de mi alegría, pero más aún, una motivación para seguir adelante.

A mi pareja: Ramiro, por ser más que un incansable compañero a lo largo de todo este trayecto, por el amor profesado y ese enorme apoyo.

A mi asesor: Dr. Gabriel Ruiz Hernández, por haber sabido dirigirme con paciencia, esmero, dedicación, amabilidad y la mejor disposición a lo largo de esta investigación.

Porque sin ustedes no hubiese sido posible lograr esto, no puedo menos que decirles

GRACIAS

Cinthia Barrera Cadena

Prólogo

El trabajo de investigación que a continuación se desarrollará tiene por objetivo contribuir a la creación o ampliación de conocimientos acerca de dos de los temas por muchos estudiados: SUPERFICIES CON ÁNGULO CONSTANTE Y CURVATURA MEDIA CONSTANTE.

Si bien es cierto que existe una extensa lista de publicaciones sobre problemas resueltos, también hay, y en igual proporción, una gran lista de conjeturas aún por demostrar, ¿por qué no tratar, en la medida de lo posible, de contribuir a alguna de las ya mencionadas extensas listas? Conocer algo nuevo, nunca ha estado de más.

Bajo las consideraciones que un campo cerrado y conforme es aquel con la propiedad de que siempre que sea derivado en cualquier dirección tangente nos devolverá una función diferenciable (la misma siempre) por la dirección tangente; y que ángulo constante se refiere al producto interior de un campo (normalizado) con un vector tangente unitario, podemos iniciar nuestra investigación como es común, con el planteamiento de algunas preguntas, como son:

- ¿Bajo qué condiciones la proyección de un campo cerrado y conforme sobre una subvariedad resulta ser de nuevo cerrado y conforme?
- A partir del hecho, ya conocido, de que una hipersuperficie M de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$ satisface la relación

  $$\triangle\langle a, v\rangle + |\alpha|^2\langle a, v\rangle = 0,$$

  donde $\triangle$ es el laplaciano de M, $a \in \mathbb{R}^3$ y v es un vector normal unitario a M, surge la siguiente interrogante:

  ¿La relación anterior sigue siendo válida si la variedad ambiente es alguno de los espacios modelo con curvatura seccional constante $c = \pm 1$, denotados por $\mathbb{Q}^3_c$, y el vector a es reemplazado por un campo cerrado y conforme? Si no es así, ¿bajo qué condiciones se sigue preservando la igualdad?
- ¿Existe una clasificación de las superficies que, simultáneamente, sean de curvatura media constante, ángulo constante y conexas, inmersas bajo isometría en algún espacio modelo $\mathbb{Q}^3_c$?
- ¿Qué sucede si en lugar de considerar en el punto anterior *ángulo constante* se considera el producto interior de un campo cerrado y conforme con un vector tangente unitario?

Las respuestas a cada interrogante irán apareciendo conforme nos adentremos en la lectura, para ello es importante conocer la estructura de nuestra investigación. Permítanme entonces presentarles lo que se encontrarán en las páginas siguientes.

El Capítulo 1 presenta una introducción de los conceptos y herramientas necesarias para atacar nuestros problemas, dentro de los que destacan la definición de inmersión isométrica las fórmulas de Gauss y Weingarten, la relación entre la segunda forma fundamental y el operador de forma. También se encontrarán las ecuaciones de Gauss y Codazzi, un Lema que expresa la segunda forma fundamental de un producto de subvariedades como un par ordenado cuyas entradas son las segundas formas fundamentales del primer y segundo factor de la subvariedad producto respectivamente. Además nos encontraremos una curiosa forma de expresar, dadas inmersiones de la forma $L^l \subset M^m \subset N^n$, a sus respectivas formas fundamentales y vectores de curvatura media (de cada inmersión) en relación con las otras. También se estudian los campos cerrados y conformes y las subvariedades umbílicas, seguido de un Lema de equivalencias para estas últimas. Para finalizar, se relacionan las definiciones de producto alabeado, distribución, distribución integrable, foliación y flujo local en un Teorema de S. Montiel [7].

En el Capítulo 2 se define el concepto de dirección principal canónica relativa a un campo y se da un ejemplo particular; después se da a conocer el concepto de ángulo constante relativo a un campo, para continuar con un Teorema de equivalencias a cargo de E. Garnica, O. Palmas y G. Ruiz-Hernández [6], que relaciona las dos definiciones anteriores, además de enunciar un corolario desprendido del mismo. Después se da una condición suficiente para tener una subvariedad con dirección principal canónica relativa a un campo cerrado y conforme. El capítulo concluye con un Lema que plantea el hecho de que la proyección de un campo cerrado y conforme en una subvariedad también sea cerrado y conforme si y sólo si la subvariedad es totalmente umbílica. Es este el punto donde las respuestas a las preguntas planteadas al iniciar la investigación comienzan a dar señal de existencia, pues sin imaginarlo, al terminar este capítulo se habrá contestado la primera interrogante.

El tercer y último capítulo es el lugar donde se dan las conclusiones y resultados que fueron obtenidos. De alguna manera es el capítulo más importante de nuestra investigación y es donde las últimas preguntas son resueltas. Los principales resultados de este capítulo destacan por su originalidad, iniciando con la Proposición 3.1 que es una generalización de la fórmula del laplaciano de Yuanlong Xin [11]. Importante es recalcar que tal generalización aún no forma parte de la literatura. Como segundo resultado importante y original se encontrará el Teorema 3.13 sobre caracterización de las superficies conexas, de ángulo constante y curvatura media constante en $\mathbb{Q}^3_c$. El tercer resultado original se encuentra plasmado en el Teorema 3.19 que caracteriza a las superficies conexas con $\langle Z, T\rangle$ constante y de curvatura media constante en $\mathbb{Q}^3_c$. En último lugar, pero no en importancia, nos encontramos con el Teorema 3.22 que describe a una superficie de $\mathbb{R}^4$ con vector de curvatura media paralelo, cuyo espacio tangente forma un ángulo constante $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ con respecto a un vector fijo.

Después de habernos dado una pequeña idea de lo que nos espera en el camino, no puedo menos que invitarlos a adentrarse en este trabajo que con gran cariño e ilusión he plasmado, esperando poder compartir con ustedes la fascinación y el goce al leerlo. Así que sólo me resta pedirles sigamos a la inseparable compañera de todo matemático «la intuición» y que sea ella quien nos guíe en este recorrido, después de todo es ella la que nos ha traído hasta aquí. Dejémosla pues, seguir adelante.

Cinthia Barrera Cadena

Capítulo 1
Subvariedades riemannianas.

Introducción.

Lo primero que se necesita para atacar algún problema es entender concretamente todos los conceptos y antecedentes necesarios en él, situación que resuelve en medida este capítulo, ya que establecerá las bases necesarias para abordar la investigación: iniciando con las principales definiciones como ¿qué es una inmersión? ¿A qué se le llama operador de forma y segunda forma fundamental? La relación que existe entre ellos. ¿Qué es el tensor de curvatura? ¿Qué es la curvatura media? Las interesantes ecuaciones de Gauss y Codazzi. ¿Qué es un campo cerrado y conforme? También se encontrará una curiosa forma de expresar dadas inmersiones de la forma $L^l \subset M^m \subset N^n$ a sus respectivas formas fundamentales y vectores de curvatura media (de cada inmersión) en relación con las otras. Equivalencias de superficies umbílicas, un curioso e importante resultado de campos cerrados y conformes dado por S. Montiel [7], entre muchas más pautas que marcan el inicio de una interesante investigación.

1.1 Inmersiones Isométricas.

Definición 1.1. *Sean M^m y N^n variedades diferenciables cuyas dimensiones son m y n respectivamente. Se dice que la transformación $f\colon M^m \longrightarrow N^n$ es una* ***inmersión*** *si la diferencial $f_{*_x}\colon T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ es inyectiva para todo $x \in M$.*

Definición 1.2. *Una inmersión $f\colon M^m \longrightarrow N^{m+p}$ entre dos variedades Riemannianas con métricas $\langle , \rangle_M$ y $\langle , \rangle_N$ respectivamente, es llamada una* ***inmersión isométrica*** *si*

$$\langle X , Y \rangle_M = \langle f_*X , f_*Y \rangle_N$$

para todo $x \in M$ y todo $X , Y \in T_xM$.

Notación 1.3. *Para $x \in M$, $T_xN = T_xM \oplus T_xM^\perp$, donde $TM^\perp = \bigcup_{x\in M} T_xM^\perp$ es el* ***haz normal*** a M.

Sean M^m y N^{m+p} variedades Riemannianas con conexiones de Levi-Civita denotadas por ∇ y D respectivamente, sea $f\colon M^m \longrightarrow N^{m+p}$ una inmersión isométrica y sean $(D)^\top$ y $(D)^\perp$ las proyecciones de D en los haz tangente y normal respectivamente. Para todo X, $Y \in \Gamma(TM)$ se tiene que

(1). $$D_XY = (D_XY)^\top + (D_XY)^\perp$$

donde $(D_XY)^\top$ es una conexión compatible con la métrica y libre de torsión, por lo tanto debe coincidir con la conexión de M, es decir $(D_XY)^\top = \nabla_X Y$. De igual forma $(D_XY)^\perp$ es una conexión de $TM^\perp$ compatible con la métrica y libre de torsión en el haz normal, la cual es llamada conexión normal.

Definición 1.4. *La aplicación bilineal* $\alpha: TM \times TM \longrightarrow TM^\perp$ *definida por*

$$\alpha(X,Y) = (D_XY)^\perp$$

es llamada ***segunda forma fundamental de f****. Así la fórmula* (1) *se puede reescribir como*

$$\textbf{(2).} \qquad D_XY = \nabla_X Y + \alpha(X,Y),$$

la cual es conocida como ***fórmula de Gauss****.*

Lema 1.5. *La segunda forma fundamental* α *definida en* 1.4 *es simétrica.*

Demostración. Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$ y sea $f: M^m \longrightarrow N^{m+p}$ una inmersión isométrica; identifíquese a X con f_*X y a Y con f_*Y, entonces $X, Y \in \Gamma(TN)$. Del hecho que D es la conexión de Levi-Civita de N se tiene que es libre de torsión, es decir, se cumple que

$$[X,Y]_N = D_XY - D_YX = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) - \nabla_Y X - \alpha(Y,X) = [X,Y]_M + \alpha(X,Y) - \alpha(Y,X).$$

Como $X, Y \in \Gamma(TM)$ entonces $[X,Y]_N = [X,Y]_M$. Luego $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$. □

Definición 1.6. *Dados los campos vectoriales* $X \in \Gamma(TM)$ *y* $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ *se define la aplicación bilineal simétrica* $A: TM \times TM^\perp \longrightarrow TM$ *mediante la fórmula* $A_\xi X = -(D_X\xi)^\top$. *La cual es llamada* ***el operador de forma.***

De manera análoga a la definición de D_XY, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ se tiene

$$\textbf{(3).} \qquad D_X\xi = (D_X\xi)^\top + (D_X\xi)^\perp$$

donde $(D_X\xi)^\perp$ es una conexión de $TM^\perp$ compatible con la métrica y libre de torsión, que se denotará por $\nabla^\perp$. Con ayuda de la Definición 1.6 se puede reescribir la ecuación (3) como sigue

$$\textbf{(4).} \qquad D_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi.$$

La cual se conoce como ***fórmula de Weingarten***.

Proposición 1.7. $\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle Y, A_\xi X \rangle$ *para todo* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *y* $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$.

Demostración. Por definición de α se tiene que

$$\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle (D_XY)^\perp, \xi \rangle.$$

Como ξ es un campo vectorial normal, $\langle \nabla_X Y, \xi \rangle = 0$. Entonces

$$\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle (D_XY)^\perp, \xi \rangle + \langle \nabla_X Y, \xi \rangle = \langle D_XY, \xi \rangle.$$

Ya que $\langle Y, \xi \rangle = 0$, al derivar en la dirección X se tiene que $\langle D_X Y, \xi \rangle = -\langle Y, D_X \xi \rangle$. Como Y es un campo vectorial tangente, $\langle (D_X\xi)^\perp, Y \rangle = 0$. Entonces

$$-\langle Y, D_X\xi \rangle = -\langle Y, (D_X\xi)^\top \rangle - \langle Y, (D_X\xi)^\perp \rangle = -\langle Y, (D_X\xi)^\top \rangle = \langle Y, A_\xi X \rangle. \qquad \square$$

Corolario 1.8. *El operador de forma A_ξ definido en* 1.6 *es simétrico.*

Demostración. Lo que se demostrará es que para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ se satisface $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$.

Por la Proposición 1.7 se tiene que $\langle A_\xi X,\ Y \rangle = \langle \alpha(X,\ Y),\ \xi \rangle$. Por el Lema 1.5 se cumple que $\langle \alpha(X,\ Y),\ \xi \rangle = \langle \alpha(Y,\ X),\ \xi \rangle$, de nuevo por la Proposición 1.7 se tiene que $\langle \alpha(Y, X), \xi \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$. Luego $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$. $\square$

1.2 Ecuaciones de Gauss y Codazzi.

Definición 1.9. *El **tensor de curvatura** de N se define como*

$$\bar{R}(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z.$$

Para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$.

Proposición 1.10. *Sea M inmersa isométricamente en N, α su segunda forma fundamental, $\bar{R}$ y R los respectivos tensores de curvatura de N y M. Entonces para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ se satisface la siguiente ecuación:*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle,$$

*conocida como **ecuación de Gauss**.*

Demostración. Sean $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$. Analizando los términos de la definición de tensor de curvatura se obtiene

$$\begin{aligned} D_X D_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^\perp_X \alpha(Y, Z) \\ -D_Y D_X Z &= -\nabla_Y \nabla_X Z - \alpha(Y, \nabla_X Z) + A_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla^\perp_Y \alpha(X, Z) \\ -D_{[X,Y]}Z &= -\nabla_{[X,Y]}Z - \alpha([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Haciendo producto con W resulta

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle D_X D_Y Z, W \rangle - \langle D_Y D_X Z, W \rangle - \langle D_{[X,Y]}Z, W \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle A_{\alpha(X,Z)}Y, W \rangle - \langle A_{\alpha(Y;Z)}X, W \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.11. *Sea M inmersa isométricamente en N y α su segunda forma fundamental, para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ se define la siguiente relación:*

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y, Z) \ := \ \nabla^\perp_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Proposición 1.12. *Sea M inmersa isométricamente en N, α su segunda forma fundamental, $\bar{R}$ y R los respectivos tensores de curvatura de N y M. Entonces para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ se satisface la siguiente ecuación:*

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z),$$

la cual es conocida como ***ecuación de Codazzi****.*

Demostración. De la definición de tensor de curvatura se tiene que

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= \alpha(X,\nabla_Y Z) + \nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \nabla_Y^{\perp}\alpha(X,Z)\\ &\quad -\alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z)\\ \\ &= (\nabla_X^{\perp}\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z))\\ &\quad -(\nabla_Y^{\perp}\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z))\\ \\ &= (\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z).\end{aligned}$$

□

Si N tiene curvatura seccional constante c, entonces su tensor de curvatura $\bar{R}$ está dado por

$$\bar{R}(X,Y) = c(X \wedge Y)$$

para todo $X, Y \in TN$, donde para todo $Z \in TN$ se satisface que

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

Entonces por la ecuación de Codazzi se tiene lo siguiente

$$(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z) = (\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (c(X\wedge Y)Z)^{\perp} = c(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)^{\perp} = 0.$$

Es decir, la ecuación de Codazzi para curvatura seccional constante es

$$(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z).$$

Observación 1.13. Para M hipersuperficie de N la conexión normal $\nabla^{\perp}$ se anula, por lo tanto la ecuación de Codazzi queda escrita de la forma

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z).$$

Definición 1.14. *Dada $f\colon M^m \longrightarrow N^{m+p}$ inmersión isométrica, $x \in M$ y $\{X_1, \ldots, X_m\}$ un marco ortonormal de T_xM, se define el* ***vector de curvatura media*** *$H(x)$ de f en x como*

$$m H(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(X_i, X_i).$$

Es importante notar que la definición anterior tiene sentido, es decir, que el valor de $H(x)$ no depende de la elección de $\{X_1, \ldots, X_m\}$. Para ello sea $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ otro marco ortonormal de T_xM, entonces por álgebra lineal se tiene que existen escalares a_{is} para $i, s = 1, \ldots, m$ tales que $Y_s = \sum_{i=1}^m a_{is} X_i$. De lo cual se deduce que

$$\sum_{s=1}^m \alpha(Y_s, Y_s) = \sum_{s=1}^m \alpha\left(\sum_{i=1}^m a_{is}X_i, \sum_{r=1}^m a_{rs}X_r\right) = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m a_{is}\, a_{rs}\, \alpha(X_i, X_r).$$

Por otro lado obsérvese que

$$\begin{aligned} \delta_{lj} = \langle Y_l, Y_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^m a_{kl}Y_k, \sum_{p=1}^m a_{pj}Y_p \right\rangle &&= \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m a_{kl}\, a_{pj} \langle Y_k, Y_p \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m a_{kl}\, a_{pj}\, \delta_{kp} &&= \sum_{k=1}^m a_{kl}\, a_{kj}. \end{aligned}$$

Es decir, $\sum_{k=1}^m a_{kj}^2 = 1$ y $\sum_{k=1}^m a_{kl}\, a_{kj} = 0$ si $l \neq k$. Por lo tanto, la matriz $A = (a_{ij})$ es ortogonal ya que $(AA^t) = I$, lo que implica que $(A^tA) = I$, o bien $\sum_{k=1}^m a_{lk}\, a_{jk} = \delta_{lj}$. Luego

$$\sum_{s=1}^m \alpha(Y_s, Y_s) = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^m a_{is}^2\, \alpha(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^m \alpha(X_i, X_i).$$

Así la definición de $H(x)$ tiene sentido.

Definición 1.15. *Una inmersión isométrica f es* ***mínima*** *si para todo $x \in M$, $H(x) = 0$.*

Definición 1.16. *Una inmersión isométrica $f: M^m \longrightarrow N^{m+p}$ tiene* ***vector de curvatura media paralelo*** *si $\nabla_X^{\perp} H = 0$ para todo $X \in \Gamma(TM)$.*

Observación 1.17. Si una inmersión isométrica f tiene vector de curvatura media paralelo entonces $\|H\|$ es constante a lo largo de M.

Definición 1.18. *Una inmersión isométrica f cuya segunda forma fundamental se anule en todo punto (i.e $\alpha \equiv 0$) es llamada* ***totalmente geodésica.***

Observación 1.19. Toda inmersión isométrica totalmente geodésica es mínima.

Lema 1.20. *(véase* [8]*) Sean $M_1 \subset N_1$ y $M_2 \subset N_2$ subvariedades, $N = N_1 \times N_2$, $M = M_1 \times M_2$ y α la segunda forma fundamental de M con respecto a N. Entonces para todo $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ en $\Gamma(TM)$ se tiene que*

$$\alpha(u, v) = (\alpha_1(u_1, v_1), \alpha_2(u_2, v_2)),$$

con α_1 y α_2 las segundas formas fundamentales de M_1 y M_2 con respecto a N_1 y N_2.

Demostración. *Llámese D, D^i a las conexiones de Levi-Civita de M y M_i.*

Para todo $u \in \Gamma(TN_i)$ *y* $v \in \Gamma(TN_j)$ *se tiene que*

$$(D_u v)^{\perp} = (D_u^i v) \text{ si } i = j.$$

$$(D_u v)^{\perp} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha(u,v) &= (D_u v)^{\perp} = (D_{(u_1+u_2)}(v_1+v_2))^{\perp} = (D_{u_1}(v_1+v_2) + D_{u_2}(v_1+v_2))^{\perp} \\ &= (D_{u_1}v_1 + D_{u_1}v_2 + D_{u_2}v_1 + D_{u_2}v_2)^{\perp} \\ &= (D_{u_1}v_1)^{\perp} + (D_{u_1}v_2)^{\perp} + (D_{u_2}v_1)^{\perp} + (D_{u_2}v_2)^{\perp} \\ &= (D_{u_1}v_1)^{\perp} + (D_{u_2}v_2)^{\perp} = \alpha_1(u_1,v_1) + \alpha(u_2,v_2). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.21. *Sean* $L^l \subset M^m \subset N^n$ *inmersiones isométricas,* X, $Y \in \Gamma(TL)$ *y* $\{e_1, e_2, ..., e_l\}$ *una base ortonormal de* TL*. Entonces*

i. $\alpha_{L,N}(X,Y) = \alpha_{L,M}(X,Y) + \alpha_{M,N}(X,Y)$

ii. $H_{L,N} = H_{L,M} + \sum_{i=1}^{l} \alpha_{M,N}(e_i, e_i)$

donde $H_{L,N}$ *y* $\alpha_{L,,N}$ *denotan el vector de curvatura media y la segunda forma fundamental en L inmersa en N, análogamente para* $H_{L,M}$*,* $\alpha_{L,M}$*,* $\alpha_{M,N}$*.*

Demostración.

i. Sean D, ∇, ∇^L las conexiones de Levi-Civita de N, M, L respectivamente; entonces por la definición de segunda forma fundamental se tiene que

$$\alpha_{L,N}(X,Y) = D_X Y - \nabla_X^L Y, \qquad \alpha_{L,M}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_X^L Y,$$
$$\alpha_{M,N}(X,Y) = D_X Y - \nabla_X Y.$$

Lo cual indica que $\alpha_{L,M}(X,Y) + \alpha_{M,N}(X,Y) = D_X Y - \nabla_X^L Y = \alpha_{L,N}$.

ii. La definición de $H_{L,N}$ y el inciso anterior implican que

$$\begin{aligned} H_{L,N} &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_{L,N}(e_i,e_i) = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_{L,M}(e_i,e_i) + \alpha_{M,N}(e_i,e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_{L,M}(e_i,e_i) + \sum_{i=1}^{l} \alpha_{M,N}(e_i,e_i) = H_{L,M} + \sum_{i=1}^{l} \alpha_{M,N}(e_i,e_i). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.22. *El producto de dos variedades totalmente geodésicas es también una variedad totalmente geodésica.*

Demostración. Sean $M_1 \subseteq N_1$, $M_2 \subseteq N_2$ variedades totalmente geodésicas con α_1 y α_2 sus respectivas segundas formas fundamentales. Sea $M = M_1 \times M_2 \subseteq N_1 \times N_2$ y α su segunda forma fundamental. Entonces para todo $u, v \in TM$ por el Lema 1.20 se tiene

$$\alpha(u,v) \;=(\alpha_1(u_1,v_1), \alpha_2(u_2,v_2)) \;=(0,0)=0$$

por lo tanto $\alpha \equiv 0$. Luego M es totalmente geodésica. □

1.3 Campos Cerrados y Conformes

Definición 1.23. *Sean N variedad riemanniana y D su conexión. Un campo vectorial $Z \in \Gamma(TN)$ es llamado* ***cerrado y conforme*** *si satisface que $D_X Z = \varphi X$ para todo $X \in \Gamma(TN)$, donde φ es una función diferenciable definida sobre N.*

Ahora considérese superficies en espacios modelo $\mathbb{Q}_c^3$ con curvatura seccional constante $c = 1, -1$, donde $\mathbb{Q}_c^3$ es conexo, simplemente conexo y completo. Lo que a continuación se hará es describir los campos cerrados y conformes en $\mathbb{Q}_c^n$, que se usarán posteriormente.

Para esto hay que considerar inmersiones isométricas de $\mathbb{S}^n$ en el espacio euclidiano $\mathbb{R}_c^{n+1} := \mathbb{R}^{n+1}$ (si $c = 1$) y una inmersión isométrica de $\mathbb{H}^n$ en el espacio de Minkowski ó $\mathbb{R}_c^{n+1}$: $\mathbb{L}^{n+1}$ de dimensión cuatro (si $c=-1$). Es necesario aclarar que $\mathbb{R}_c^{n+1}$ tiene la métrica riemanniana estándar si $c = 1$ ó la métrica lorentziana si $c = -1$, la cual está dada por $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + cu_{n+1}v_{n+1}$. La inmersión de $\mathbb{Q}_c^n$ en $\mathbb{R}_c^{n+1}$ está dada por la inclusión de puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}_c^{n+1}$ tales que $\langle x, x\rangle = c$.

Sean D y ∇ las conexiones de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{Q}_c^n$ respectivamente. Finalmente, denótese por E_{n+1} el campo vectorial constante en $\mathbb{R}_c^{n+1}$ con valor constante $(0, 0, ..., 1)$. Resulta claro que este campo vectorial paralelo satisface que $\langle E_{n+1}, E_{n+1}\rangle = c$. Con la inmersión antes mencionada, se define el campo vectorial Z sobre $\mathbb{Q}_c^n$ como la componente tangente de E_{n+1} en $\mathbb{Q}_c^n$, es decir,

(5). $$Z(x) := E_{n+1}(x) - c\langle E_{n+1}(x), x\rangle x$$

Por último hay que observar que la posición del vector x es ortogonal a la inmersión de $\mathbb{Q}_c^n$ descrita con anterioridad y $\langle x, x\rangle = c$.

Proposición 1.24. *Bajo la construcción anterior, Z es un campo cerrado y conforme en $\mathbb{Q}_c^n$ que satisface $\nabla_X Z = \varphi X$, para todo campo X en $\mathbb{Q}_c^n$ y donde $\varphi := -\langle E_{n+1}(x), x\rangle$ es una función sobre $\mathbb{Q}_c^n$. Más aún $c|Z|^2 + \varphi^2 = 1$ y en particular $\nabla_X \varphi = -c\langle X, Z\rangle$.*

Demostración. Por la ecuación (5) se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_X Z &= (D_X Z)^\top = (D_X(\langle E_{n+1}(x), x\rangle x))^\top \\ &= -(\langle E_{n+1}(x), X\rangle x - \langle E_{n+1}(x), x\rangle X)^\top \\ &= -\langle E_{n+1}(x), x\rangle X = \varphi X. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= \langle Z, Z\rangle = \langle E_{n+1}(x) + c\varphi x, E_{n+1}(x) + c\varphi x\rangle \\ &= \langle E_{n+1}(x), E_{n+1}(x)\rangle + 2c\varphi\langle E_{n+1}(x), x\rangle + \varphi^2\langle x, x\rangle \\ &= c - 2c\varphi^2 + c\varphi^2 = c - c\varphi^2. \end{aligned}$$

Dado que $c=1,-1$, entonces se puede multiplicar por c y se obtiene $c|Z|^2+\varphi^2=1$. Derivando la ecuación anterior en la dirección de X se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= cD_X|Z|^2+2\varphi D_X\varphi &&= cD_X\langle Z,Z\rangle+2\varphi D_X\varphi \\ &= 2c\langle D_XZ,Z\rangle+2\varphi D_X\varphi &&= 2c\varphi\langle X,Z\rangle+2\varphi D_X\varphi. \end{aligned}$$

Por último, de la ecuación $2c\varphi\langle X,Z\rangle+2\varphi(D_X\varphi)=0$, se deduce que $D_X\varphi=-c\langle X,Z\rangle$. □

Definición 1.25. *Sea N variedad riemanniana y D su conexión. Un campo vectorial $Z\in\Gamma(TN)$ es llamado* ***cerrado*** *si la forma $\theta(X)=\langle Z,X\rangle$ es cerrada, es decir si $d\theta=0$.*

Corolario 1.26. *Sea N^{m+1} una variedad riemanniana dotada con un campo Z cerrado, entonces para todo $X_1,X_2\in\Gamma(TN)$ se satisfacen los siguientes enunciados:*

i. $\langle D_{X_1}Z,X_2\rangle-\langle D_{X_2}Z,X_1\rangle=0$.

ii. Para $p\neq 0\in N$, definiendo $Z_p^{\perp}=\{X\in T_pN\,|\,\langle Z(p),X\rangle=0\}$ se tiene que para todo X_1, $X_2\in Z_p^{\perp}$, $[X_1,X_2]\in Z_p^{\perp}$.

Demostración. Sea $p\neq 0\in N$.

i. Al desarrollar $d\theta$ se obtiene que

$$\begin{aligned} d\theta(X_1,X_2) =&\ D_{X_1}(\theta(X_2))-D_{X_2}(\theta(X_1))-\theta([X_1,X_2]) \\ =&\ D_{X_1}\langle Z,X_2\rangle-D_{X_2}\langle Z,X_1\rangle-\langle[X_1,X_2],Z\rangle \\ =&\ \langle D_{X_1}Z,X_2\rangle+\langle Z,D_{X_1}X_2\rangle-\langle D_{X_2}Z,X_1\rangle-\langle Z,D_{X_2}X_1\rangle-\langle D_{X_1}X_2,Z\rangle \\ &+\langle D_{X_2}X_1,Z\rangle \\ =&\ \langle D_{X_1}Z,X_2\rangle-\langle D_{X_2}Z,X_1\rangle. \end{aligned}$$

Dado que Z es cerrado se tiene que $d\theta=0$, es decir, $\langle D_{X_1}Z,X_2\rangle-\langle D_{X_2}Z,X_1\rangle=0$.

ii. Como $X_1,X_2\in Z_p^{\perp}$ entonces $\langle D_{X_i}X_j,Z\rangle=-\langle D_{X_i}Z,X_j\rangle$ para $i\neq j$. Lo cual implica

$$\langle[X_1,X_2],Z\rangle = \langle D_{X_1}X_2,Z\rangle-\langle D_{X_2}X_1,Z\rangle = \langle D_{X_2}Z,X_1\rangle-\langle D_{X_1}Z,X_2\rangle.$$

El inciso anterior implica que $\langle[X_1,X_2],Z\rangle=0$, es decir $[X_1,X_2]\in Z_p^{\perp}$. □

Definición 1.27. *Sean B y F variedades semi-riemannianas y $f>0$ una función suave sobre B. El* ***producto alabeado*** *$M=B\times_f F$ es la variedad producto $B\times F$ con la* ***métrica alabeada*** *definida como*

$$g=\pi^*(g_B)+(f\circ\pi)^2\sigma^*(g_F)$$

donde g_B, g_F son las respectivas métricas de B y F, y π, σ son las proyecciones en B y F respectivamente.

A la variedad B se le llama base de M y a F la fibra.

En otras palabras, si X es tangente a $B\times F$ en (p,q) entonces la métrica alabeada es de la forma

$$\langle X,X\rangle = \langle X_1,X_1\rangle_B+f^2(p)\langle X_2,X_2\rangle_F,$$

donde $X = (\ X_1,\ X_2\ )$ y cada entrada representa la parte de X tangente a B y a F respectivamente.

Si $f = 1$, entonces $B \times_f F$ es simplemente una variedad producto semi-riemanniano.

Observación 1.28. Es importante resaltar que las fibras $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ y las hojas $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ son subvariedades semi-riemannianas de M y la métrica alabeada tiene las siguientes características:

- Para cada $q \in F$, la aplicación $\pi|_{B \times \{q\}}$ es una isometría sobre B.
- Para cada $p \in B$, la palicación $\sigma|_{\{p\} \times F}$ es una homotecia positiva sobre F, con factor escalar $\frac{1}{f(p)}$.
- Para cada $(p, q) \in M$, la hoja $B \times \{q\}$ y la fibra $\{p\} \times F$ son ortogonales en (p, q).

Ejemplo 1.29. Las superficies de revolución son ejemplos de productos alabeados, donde las hojas son las posiciones al rotar la curva y las fibras son los círculos de revolución.

Para ver un caso un poco más particular tómese C una curva en el plano y rótela alrededor del eje y en $\mathbb{R}^3$. Sea $f: C \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la función que asigna la distancia de un punto de C al eje y. Entonces $M = C \times_f \mathbb{S}^1(1)$.

Definición 1.30. *Sea c un entero tal que $1 \leqslant c \leqslant m$. Una **distribución** $\mathfrak{D}$ de dimensión c sobre una variedad M^m, es una elección de un subespacio $\mathfrak{D}(d)$ de dimensión c de M para cada $d \in M$.*

*$\mathfrak{D}$ es **suave** si para cada $d \in M$ existe una vecindad U de m y c-campos $X_1, \ldots, X_c$ de clase C^∞ sobre U que generan a $\mathfrak{D}$ para cada punto de U. Un campo X sobre M se dice que pertenece a la distribución $\mathfrak{D}$ $(X \in \mathfrak{D})$ si $X_d \in \mathfrak{D}(d)$ para cada $d \in M$.*

*Una distribución suave $\mathfrak{D}$ es llamada **involutiva** (ó **completamente integrable**) si $[X, Y] \in \mathfrak{D}$ cuando X, Y son campos suaves que yacen en $\mathfrak{D}$.*

Definición 1.31. *(véase [9]) Sean M^m una variedad y $F = \{F_\alpha\}$ una partición de M en subconjuntos ajenos y conexos por trayectoria. Entonces F es llamada una **foliación** de M de codimensión c $(0 < c < m)$ si existe una cubierta de M de subconjuntos abiertos U y un homeomorfismo $h: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que manda a cada componente $F_\alpha \cap U \neq \phi$ en una traslación paralela del hiperplano estándar $\mathbb{R}^{m-c}$ en $\mathbb{R}^m$. Cada F_α es llamada una **hoja de la foliación**.*

Teorema 1.32. *(véase [10]) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.*

1. *Dados $x_0 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow U$ una única solución a la ecuación diferencial $x' = X(x)$ que satisface $\alpha(t_0) = x_0$.*
2. *Para cada $x \in U$, sea $J(x)$ el intervalo maximal donde está definida una solución a la ecuación diferencial del inciso anterior, que se escribirá como $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, con $\varphi(0, x) = x$. Entonces el conjunto $\Omega = \{(t, x): x \in U, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi: \Omega \longrightarrow U$ es de clase C^1.*
3. *Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x), t + s \in J(x), s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x))$.*

Definición 1.33. *La función $\varphi\colon \Omega \longrightarrow U$ dada por el Teorema 1.32 se llama el* ***flujo local*** *definido por el campo vectorial $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Para cada $x \in U$, la derivada $A(t) = D\varphi_t(x)$ satisface la ecuación diferencial $A'(t) = DX(\varphi_t(x))A(t)$ como la primera variación de la ecuación diferencial $x' = X(x)$.*

Definición 1.34. *Una inmersión isométrica $f\colon M^m \longrightarrow N^{m+p}$ es llamada* ***umbílica*** *en $x_0 \in M$ si $A_\xi = \lambda_\xi I$ para todo $\xi \in T_{x_0}M^\perp$. Si M es umbílica en todo punto es llamada* ***totalmente umbílica****.*

Algunos resultados importantes acerca de los campos cerrados y conformes se enuncian a continuación. (véase [7])

Teorema 1.35. *Sea N^n variedad Riemanniana, $Z \neq 0$ un campo cerrado y conforme en N. Entonces*

i. Z define una distribución $Z^\perp$ de dimensión $n-1$, la cual consiste en tomar en cada punto el complemento ortogonal de $Z^\perp$. Esta distribución es integrable y cada hoja de la foliación correspondiente es totalmente umbílica en N.

ii. Las funciones $|Z|$ y φ son constantes alrededor de cada hoja de la foliación.

iii. Sea L una componente conexa de una hoja de la foliación determinada por Z y Ψ_t el flujo local de Z, entonces en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ la expresión $\rho(t) = |Z_{\Psi_t(p)}|$, con $p \in L$, no depende de un valor particular de p y N es localmente isométrica a $I \times_\rho L$. Con lo cual un campo cerrado y conforme Z puede ser escrito como: $Z = |Z|\partial_t = \rho\partial_t$; donde ∂_t es el levantamiento a N del campo canónico tangente a I.

Demostración. Sea $E = \frac{Z}{|Z|}$ definida en $N - \{p \in N : Z(p) = 0\}$. Sea $\bar{\nabla}$ la conexión de $Z^\perp(p)$, donde p es un punto del dominio de definición de E.

i. Primero obsérvese que se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\frac{Z}{|Z|}}\frac{Z}{|Z|} &= \frac{1}{|Z|}\left(\tilde{\nabla}_Z\frac{Z}{|Z|}\right) = \frac{1}{|Z|}\left(\frac{|Z|\tilde{\nabla}_Z Z - Z\,\tilde{\nabla}_Z|Z|}{|Z|^2}\right)\\
&= \frac{1}{|Z|}\left(\frac{|Z|\tilde{\nabla}_Z Z - Z\big(\tilde{\nabla}_Z|Z|\big)}{|Z|^2}\right) = \frac{1}{|Z|}\left(\frac{|Z|\varphi Z - Z\frac{\varphi\langle Z,Z\rangle}{|Z|}}{|Z|^2}\right)\\
&= \frac{1}{|Z|}\left(\frac{\varphi Z}{|Z|} - \frac{\varphi Z}{|Z|}\right) = 0
\end{aligned}$$

Es decir $\tilde{\nabla}_E E = 0$. Por otro lado, al derivar $\frac{1}{|Z|}$ en la dirección de v, para todo $v \in TZ_p^\perp$ se obtiene lo siguiente:

$$\tilde{\nabla}_v\frac{1}{|Z|} = -\frac{\tilde{\nabla}_v|Z|}{|Z|^2} = -\frac{\varphi\langle v, Z\rangle}{|Z|^3}.$$

Si $v \in Z^{\perp}(p)$, entonces$\langle v, Z\rangle = 0$, lo cual implica que $\tilde{\nabla}_v \frac{1}{|Z|} = 0$. Ahora se derivará E en la dirección v, con $v \in Z^{\perp}(p)$

$$\tilde{\nabla}_v E \;=\; \frac{|Z|\tilde{\nabla}_v Z - Z\,\tilde{\nabla}_v |Z|}{|Z|^2} = \frac{|Z|\varphi v}{|Z|^2} = \frac{\varphi}{|Z|} v.$$

Recordando que E es un normal para $Z^{\perp}(p)$, se tiene que $\tilde{\nabla}_v E = -A_E v = \frac{\varphi}{|Z|} v$. Lo cual implica que $Z^{\perp}(p)$ es totalmente umbílica.

ii. Por el inciso anterior para todo $v \in Z^{\perp}(p)$ se cumple que $\bar{\nabla}_v |Z| = 0$, es decir $|Z|$ es constante a lo largo de $Z^{\perp}(p)$.

Sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ base ortonormal local de TN, de la definición de divergencia se tiene que

$$\operatorname{div} Z \;= \sum_{i=1}^{n} \langle D_{Y_i} Z, Y_i\rangle \;= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi Y_i, Y_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi |Y_i|^2 = \varphi n.$$

Despejando φ se obtiene que $\varphi = \frac{1}{n} \operatorname{div} Z$.

Por otro lado de la definición de campo gradiente se tiene para todo $Y \in TN$ que

$$\langle \operatorname{grad}|Z|^2, Y\rangle \;= D_Y |Z|^2 \;= D_Y \langle Z, Z\rangle = 2\langle D_Y Z, Z\rangle = 2\varphi \langle Y, Z\rangle = \langle Y, 2\varphi Z\rangle.$$

Lo cual implica que $\operatorname{grad}|Z|^2 = 2\varphi Z$.

Calculando el hessiano de la función $|Z|^2$ para todo $X, Y \in TN$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess}|Z|^2)(X,Y) \;=\langle D_X(2\varphi Z), Y\rangle \;&= \langle 2\varphi D_X Z, Y\rangle + \langle 2Z D_X \varphi, Y\rangle \\ &= 2\varphi^2 \langle X, Y\rangle + 2 D_X \varphi \langle Y, Z\rangle.\end{aligned}$$

Lo cual implica que $(\operatorname{Hess}|Z|^2)(X,Y) - 2\varphi^2\langle X, Y\rangle = 2 D_X \varphi \langle Z, Y\rangle$.

Dado que Hess y $\langle , \rangle$ son tensores simétricos se tiene que la ecuación anterior es equivalente a la siguiente: $(\operatorname{Hess}|Z|^2)(Y,X) - 2\varphi^2\langle Y, X\rangle = 2 D_X \varphi \langle Z, X\rangle$. De lo cual se deduce que $D_X \varphi \langle Z, Y\rangle = D_Y \varphi \langle Z, X\rangle$.

Como $\langle v, Z\rangle = 0$ y tomando $Y = Z$ y $X = v$, se tiene que $D_v \varphi \langle Z, Z\rangle = D_v \varphi \langle Z, v\rangle$, entonces $D_v \varphi |Z|^2 = 0$, lo cual implica que $D_v \varphi = 0$. Es decir φ es constante a lo largo de $Z^{\perp}(p)$.

iii. Sea $p \in N - \{p \in N : Z(p) = 0\}$ y L una componente conexa de una hoja de la foliación determinada por Z que pasa por p. Hay una vecindad V_p del punto p en L y un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero y tal que el flujo local de Z: $\mathbf{\Psi}_t$ está definido sobre V_p para todo $t \in I$. Entonces se puede definir la aplicación

$$\begin{aligned}\psi : I \times V_p &\longrightarrow M \\ (t, q) &\longmapsto \mathbf{\Psi}_t(q)\end{aligned}$$

para $q \in V_p$. Entonces

$$(d\psi)_{(t,q)}(1,0) = E_{\mathbf{\Psi}_t(q)} \quad y \quad (d\psi)_{(t,q)}(0,U) = (d\mathbf{\Psi}_t)_{(q)}(U),$$

donde $q \in V_p$ y $U \in T_q L$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\langle (d\psi)_{(t,q)}(1,0), (d\psi)_{(t,q)}(0,U)\rangle = 0; \;\; |(d\psi)_{(t,q)}(1,0)| = 1; \;\; |(d\psi)_{(t,q)}(0,U)| = \mu(t,q)|U|,$$

donde μ es una función positiva definida para $q \in L$:

$$\mu(t,q) \;=\; \frac{|Z_{\Psi_t(q)}|}{|X_q|}.$$

Considerando la aplicación ψ definida sobre el producto $I \times V_p$ con la métrica $\pi_I^*(ds^2) + |Z_\psi|^2\pi_V^*\, g$, donde π_I y π_V denotan las proyecciones de $I \times V_p$ en las respectivas componentes, $g = \left(\frac{1}{|Z_p|}\right)g_p$ y g_p la métrica inducida por $\langle , \rangle$ sobre L, se tiene que en cada punto de N hay una vecindad que es isométrica al producto alabeado $I \times_\rho V_p$, donde $\rho = |Z_{\Psi_t(p)}|$, $t \in I$. Más aún, en esta representación local de la variedad M, el campo Z está dado de la siguiente manera: $Z = |Z|\partial_t = \rho\partial_t$, donde ∂_t es el levantamiento a N del campo canónico tangente a I.

□

1.4 Subvariedades umbílicas

Lema 1.36. *Sea $f\colon M^m \longrightarrow N^{m+p}$ una inmersión isométrica. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- ***i.*** *f es umbílica en $x_0 \in M$,*
- ***ii.*** *$A_\xi = m\langle H(x_0), \xi\rangle I,\ \xi \in T_{x_0}M^\perp$,*
- ***iii.*** *$\alpha(X,Y) = m\langle X,Y\rangle\, H(x_0),\ X,Y \in T_{x_0}M$.*

Demostración. Sea $\{E_1, ..., E_m\}$ un marco ortonormal de $T_{x_0}M$, $X,Y \in T_{x_0}M$ y $\xi \in T_{x_0}M^\perp$.

i ⇒ ii. Dado que f es umbílica $A_\xi X = \lambda_\xi X$. Entonces

$$\begin{aligned} A_\xi X = & \sum_{s=1}^{m} \lambda_\xi X = \sum_{s=1}^{m} \langle \lambda_\xi E_s, E_s\rangle X = \sum_{s=1}^{m} \langle A_\xi E_s, E_s\rangle X = \sum_{s=1}^{m} \langle \alpha(E_s,E_s), \xi\rangle X \\ = & \; m\langle H(x_0), \xi\rangle X. \end{aligned}$$

ii ⇒ iii. Del hecho que $A_\xi = m\langle H(x_0), \xi\rangle I$ se deduce lo siguiente:

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle \;= \langle A_\xi X, Y\rangle \;= m\langle H(x_0), \xi\rangle\langle X,Y\rangle.$$

Lo cual implica que $\alpha(X,Y) = m\langle X,Y\rangle H(x_0)$.

iii ⇒ i. Dado que $\alpha(X,Y) = m\langle X,Y\rangle\, H(x_0)$ para todo $X,Y \in T_{x_0}M$, se tiene que

$$\begin{aligned} A_\xi X \;=\; & \sum_{i=1}^{m} \langle A_\xi X, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha(X,E_i), \xi\rangle E_i = m\langle H(x_0), \xi\rangle \sum_{i=1}^{m} \langle X, E_i\rangle E_i \\ = \; & = m\langle H(x_0), \xi\rangle X. \end{aligned}$$

Luego f es umbílica. □

Observación 1.37. En los espacios modelos $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ y $\mathbb{R}^3$ las superficies umbílicas completas son las esferas de dimensión 2 y los planos.

Notación 1.38. *N_c denotará una variedad riemanniana con curvatura seccional constante c.*

Proposición 1.39. *(véase [3]) Si $f: M^m \longrightarrow N_c^{m+p}$ con $n \geqslant 2$, es umbílica, entonces f tiene vector de curvatura media paralelo y el tensor de curvatura media normal $R^\perp$ se anula.*

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, por el Lema 1.36 se tiene

$$\begin{aligned}(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X^\perp(\langle Y, Z\rangle H) - \langle \nabla_X Y, Z\rangle H - \langle Y, \nabla_X Z\rangle H \\ &= \langle Y, Z\rangle \nabla_X^\perp H.\end{aligned}$$

Por la ecuación de Codazzi para el caso de curvatura seccional constante se tiene

$$\langle X, Z\rangle \nabla_Y^\perp H = \langle Y, Z\rangle \nabla_X^\perp H.$$

Eligiendo $Y = Z$ ortogonal a X, se tiene que

$$0 = \langle Z, Z\rangle \nabla_X^\perp H.$$

Luego f tiene vector de curvatura media paralelo.

Por otro lado, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ de la ecuación de Ricci se tiene que

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) = \langle X, A_\xi Y\rangle H - \langle A_\xi X, Y\rangle H = 0.$$

Es decir $R^\perp = 0$. $\square$

Capítulo 2

Superficies con dirección principal canónica.

Introducción.

Con sólo observar el título de este capítulo y siguiendo el protocolo, surge en principio una duda: ¿cuándo una superficie tiene dirección principal canónica? Pregunta en la cual se centra dicho capítulo, tratando de abordarla no sólo como otro concepto más, si no con curiosos resultados que nos dan condiciones necesarias para satisfacer tal propiedad, así como un Teorema de equivalencias a cargo de E. Garnica, O. Palmas y G. Ruiz-Hernández [6]. También se encontrará con la explicación de lo que quiere decir que una superficie tenga ángulo constante relativo a un campo dado y algunas condiciones necesarias y suficientes para que una superficie sea totalmente umbílica, con lo cual damos respuesta a la primer interrogante de la investigación.

De esta forma continuamos avanzando sobre el camino dorado, intentando conquistar un territorio más del saber y adentrándonos a un mundo donde los conceptos y formas adquieren un mejor sentido.

2.1 Hipersuperficies con dirección principal canónica.

Definición 2.1. *Sean N una variedad riemanniana, M hipersuperficie orientable de N y Z un campo vectorial en $\mathfrak{X}(N)$. Se dice que M tiene* ***dirección principal canónica*** *relativa a Z si la proyección de Z en el espacio tangente de M es una dirección principal.*

Ejemplo 2.2. Sean $N = \mathbb{R}^3$ y Z un campo vectorial constante unitario. Se dará una parametrización de una superficie M de N con dirección principal canónica relativa a Z.

Primero, hay que fijar un plano P que sea ortogonal a Z, $\gamma = \gamma(s)$ una curva en P parametrizada por longitud de arco y η un campo vectorial unitario en $\mathfrak{X}(P)$ normal a γ. Además hay que fijar una curva $\beta(t) = (f(t), g(t))$ también parametrizada por longitud de arco con un plano de dimensión 2.

Considérese la superficie M parametrizada así

$$\varphi(s,t) \ = \ \gamma(s) + f(t)\eta(s) + g(t)Z.$$

Obsérvese que las derivadas parciales φ_t y φ_s están dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_t &= f'(t)\eta(s) + g'(t)Z \\ \varphi_s &= \gamma'(s) + f(t)\eta'(s) \quad = (1 - f(t)k(s))\gamma'(s), \end{aligned}$$

donde $k(s)$ representa la curvatura de γ en s.

Para concluir se usará la fórmula de Serret-Frenet y el hecho que γ es curva plana.

Obsérvese que φ_t y φ_s son ortogonales. Tomando vectores unitarios a lo largo de esas direcciones se puede calcular la proyección de Z sobre el plano tangente de M, con lo que se tiene

$$\langle Z, \varphi_t\rangle\varphi_t + \langle Z, \gamma'(s)\rangle\gamma'(s) \;=\; g'(t)\varphi_t.$$

Suponiendo que $g(t)$ no se anula se probará que φ_t es una dirección principal de M.

Nótese que un campo vectorial unitario ξ normal a M está dado por

$$\xi(s,t) \;=\; -g'(t)\eta(s) + f'(t)Z.$$

Usando el hecho que $f'f'' + g'g'' = 0$, se puede ver que la derivada parcial con respecto a t es

$$\xi_t \;= -g''(t)\eta(s) + f''(t)Z \;= \frac{f''(t)}{g'(t)}(f'(t)\eta(s) + g'(t)Z) = \frac{f''(t)}{g'(t)}\varphi_t.$$

La ecuación anterior implica que φ_t es una dirección principal de M.

El cálculo arriba establecido da una expresión para la curvatura principal de M en la dirección de φ_t. Para la otra curvatura principal sólo hay que observar que

$$\xi_s \;= -g'(t)\eta'(s) \;= g'(t)k(s)\gamma'(s).$$

Es decir, las curvaturas principales λ y μ de una superficie M parametrizada por

$$\varphi(s,t) \;=\; \gamma(s) + f(t)\eta(s) + g(t)Z.$$

están dadas por

$$\lambda = \frac{f''(t)}{g'(t)} \quad y \quad \mu = \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)}.$$

Por ejemplo, considerando que $\gamma(s)$ sea un círculo ($k=1$) y con la restricción adicional que M sea una superficie mínima ($i.e.\lambda + \mu = 0$). Entonces las funciones f y g están dadas por

$$\begin{aligned} f(t) &= \cosh(\operatorname{senh}^{-1}(t)) + 1 \\ g(t) &= \operatorname{senh}^{-1}(t), \end{aligned}$$

las cuales resultan ser la parametrización de la superficie catenaria. Con lo cual M es el catenoide en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.3. *Se dice que una hipersuperficie M de N tiene* ***ángulo constante relativo a Z*** *si dado $Z \in \Gamma(TN)$ se cumple que para todo $p \in M$ el ángulo entre $Z(p)$ y T_pM es constante.*

Sea N una variedad riemanniana, M hipersuperficie orientable de N y ξ un campo vectorial unitario normal a M. Sea $Z \in \mathfrak{X}(N)$ un campo vectorial cuya restricción a M es transversal a ξ.

Notación 2.4. $Z^\top = Z - \langle Z, \xi\rangle\xi \quad y \quad T = \frac{Z^\top}{|Z^\top|}.$

Observación 2.5. En tal caso, M tiene ángulo constante si $\left\langle \frac{Z}{|Z|}, T \right\rangle$ es constante.

Notación 2.6. *Sea $h: M \longrightarrow \mathbb{R}$ la restricción de la proyección $\pi: I \times_\rho B \longrightarrow I$ en M, la cual existe por el Teorema* 1.35*, ya que afirma que N es localmente isométrica a $I \times_\rho B$.*

Teorema 2.7. *(Véase* [6]*)Sea N una variedad riemanniana que admite un campo cerrado y conforme Z, M una hipersuperficie orientable de N. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i. *M tiene una dirección principal canónica relativa a Z.*

ii. *El ángulo θ entre Z y ξ es constante a lo largo de las direcciones tangentes a M y ortogonales a T.*

Más aún, si se considera un subconjunto abierto de N que sea isométrico a un producto alabeado $I \times_\rho B$ y $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, las condiciones anteriores también son equivalentes a las siguientes:

iii. *Las curvas integrales de T son geodésicas en M.*

iv. *La norma del gradiente de h, es constante alrededor de sus curvas de nivel.*

v. *La norma del gradiente de F, es constante alrededor de sus curvas de nivel.*

Demostración. Sean D la conexión de N y ∇ la de M. Lo que primero hay que observar es que Z puede ser descompuesto como $Z = |Z|(\text{sen}\theta T + \cos\theta\xi)$, donde θ denota el ángulo entre Z y ξ. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} D_X Z &= D_X|Z|(\text{sen}\theta T + \cos\theta\xi) + |Z|[D_X(\text{sen}\theta T + \cos\theta\xi)] \\ &= D_X|Z|(\text{sen}\theta T + \cos\theta\xi) + |Z|[(\text{sen}\theta(D_X T) + (D_X\text{sen}\theta)T + \cos\theta(D_X\xi) + (D_X\cos\theta)\xi)]. \end{aligned}$$

Del hecho que Z es cerrado y conforme se tiene que existe $\varphi: N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $D_X Z = \varphi Z$ para toda $X \in \Gamma(TN)$. Luego la ecuación anterior se transforma en

$$\varphi X = D_X|Z|(\text{sen}\theta T + \cos\theta\xi) + |Z|(\text{sen}\theta(D_X T) + (D_X\text{sen}\theta)T + \cos\theta(D_X\xi) + (D_X\cos\theta)\xi).$$

Tomando la parte tangente de la ecuación arriba mencionada se obtiene

(6). $\varphi X = D_X|Z|(\text{sen}\theta)T + |Z|(\text{sen}\theta(\nabla_X T) + (D_X\text{sen}\theta)T - \cos\theta(A_\xi X))$.

Tomando la parte normal de la misma ecuación se obtiene

(7). $0 = D_X|Z|(\cos\theta)\xi + |Z|(\text{sen}\theta\alpha(X,T) + (D_X\cos\theta)\xi)$.

Bajo el supuesto de que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es ortogonal a T, se tiene que

$$\langle X, Z\rangle = |Z|(\text{sen}\theta\langle X, T\rangle + \cos\theta\langle X, \xi\rangle) = 0.$$

Lo cual implica que X es ortogonal a Z.

Por el Teorema 1.35 $|Z|$ es constante en la dirección de X, es decir $D_X|Z| = 0$.

Por otro lado, haciendo producto de (7) con ξ, se obtiene

$$0 = |Z|\text{sen}\theta\langle\alpha(X,T), \xi\rangle + |Z|D_X\cos\theta.$$

Dado que $D_X\cos\theta = -\mathrm{sen}\theta D_X\theta$, entonces $0 = |Z|\mathrm{sen}\theta(\alpha(X,\ T),\ \xi) - X\cdot\theta$. Es decir: $0 = \mathrm{sen}\theta(\langle\alpha(X,T),\xi\rangle - D_X\theta)$. Del hecho que $\theta\in(0,\pi)$ se deduce que $\langle\alpha(X,T),\xi\rangle - D_X\theta = 0$, ó lo que resulta similar $\langle A_\xi T, X\rangle = D_X\theta$.

Ahora se analizarán las implicaciones siguientes:

i)⇒ii). Suponga que T es dirección principal, entonces existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $A_\xi T=\lambda T$. Lo cual implica que $X\cdot\theta = \lambda\langle T,\ X\rangle = 0$. Luego θ es constante en las direcciones tangentes a M.

ii)⇒i). Suponga que $X\cdot\theta = 0$ para todo X en $\mathfrak{X}(M)$ y que $\langle X,\ T\rangle = 0$. Entonces $\langle A_\xi T, X\rangle = 0$, lo cual implica que $A_\xi T$ no tiene componente ortogonal a X, es decir existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $A_\xi T=\lambda T$.

i)⇒iii). Suponga que existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $A_\xi T=\lambda T$ entonces derivando Z en la dirección de T se obtiene

$$\varphi T = \mathrm{sen}\theta(D_T|Z|)T + |Z|[(D_T\mathrm{sen}\theta)T + \mathrm{sen}\theta\nabla_T T - \cos\theta A_\xi T].$$

Ahora, bajo el supuesto de que $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ se tiene que $\cos\theta\neq 0$. Entonces $\nabla_T T=\beta T$, para algún $\beta\in\mathbb{R}$. Como $\langle\nabla_T T, T\rangle = 0$, se tiene que $\nabla_T T = 0$, lo cual implica que las curvas integrales de T son geodésicas en M.

iii)⇒i). Suponiendo que las curvas integrales de T son geodésicas en M, se tiene que $\nabla_T T = 0$. Suponiendo además que $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ y derivando a Z en la dirección de T, se tiene que $A_\xi T=\lambda T$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}$; es decir T es una dirección principal.

iv)⇔v). Sea t el sistema de coordenadas estándar en $I\subseteq\mathbb{R}$, entonces ∂t denotará el campo tangente a I que corresponde al levantamiento a N. Considerando a M como la gráfica de una función $F\colon B\longrightarrow I$ se tiene que un marco tangente a M es el siguiente:

$$E_i = \langle\nabla_B F, e_i\rangle_B\partial t + e_i \quad \in T_{(F(x),x)}M.$$

Donde e_i denota el levantamiento a N de un marco tangente a B, ∇_B y $\langle,\rangle_B$ la conexión y la métrica en B, respectivamente.

Sea $\xi = (\rho\circ F)^2\partial t - \nabla_B F$. Hay que observar que

$$\begin{aligned}\langle\xi, E_i\rangle_N &= \langle\nabla_B F, e_i\rangle_B(\rho\circ F)^2 - \langle\nabla_B F, e_i\rangle_B\langle\partial t, \nabla_B F\rangle_N + (\rho\circ F)^2\langle\partial t, e_i\rangle_N - \langle e_i, \nabla_B F\rangle_N\\ &= (\rho\circ F)^2\langle\nabla_B F, e_i\rangle_B - \langle e_i, \nabla_B F\rangle_N.\end{aligned}$$

Dado que $\nabla_B F$ y e_i son tangentes a B se tiene que $\langle\nabla_B F, e_i\rangle_N = (\rho\circ F)^2\langle\nabla_B F, e_i\rangle_B$. Es decir, el campo ξ definido anteriormente es normal a M.

Sea $h\colon M\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $h(F(x),x) = F(x)$. Sea β una curva en B tal que $e_i(\beta(s)) = \beta'(s)$ para todo $s\in I$, sea $\alpha(s) = ((F\circ\beta)(s), \beta(s))$ el levantamiento a N. Entonces

$$\langle E_i, \nabla_M h\rangle_M = E_i(h) = \frac{\partial}{\partial s}(h\circ\alpha) = h((F\circ\beta)(s), \beta(s)) = \frac{\partial}{\partial s}(F\circ\beta) = e_i(F).$$

De aquí que $\langle\nabla_M h, E_i\rangle = e_i(F) = \langle\nabla_B F, e_i\rangle_B$.

Por otro lado $\langle\nabla_B F, e_i\rangle_B = \langle\partial t, E_i\rangle = \langle\partial t^T, E_i\rangle$, es decir, el gradiente $\nabla_M h$ es la componente tangente a M de ∂t, la cual se puede calcular como $\partial t - \frac{\langle\partial t,\xi\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle}\xi$.

Al analizar cada término de la ecuación anterior se obtiene

$$\langle \partial t, \xi\rangle_N = \langle 0, -\nabla_B F\rangle_B(\rho\circ F) + \langle \partial t, (\rho\circ F)^2\partial t\rangle = (\rho\circ F)^2$$
$$\langle \partial t, \xi\rangle_N \xi = (\rho\circ F)^4\partial t - (\rho\circ F)^2\nabla_B F$$

$$\begin{aligned}\langle \xi,\xi\rangle_N &= \langle \nabla_B F, \nabla_B F\rangle_B(\rho\circ F) + \langle (\rho\circ F)^2\partial t, (\rho\circ F)\partial t\rangle = |\nabla_B F|_B^2(\rho\circ F)^2 + (\rho\circ F)^4\\ \langle \xi,\xi\rangle\partial t &= |\nabla_B F|_B^2(\rho\circ F)^2\partial t + (\rho\circ F)^4\partial t.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\partial t - \frac{\langle \partial t,\xi\rangle}{\langle \xi,\xi\rangle}\xi &= \frac{|\nabla_B F|_B^2(\rho\circ F)^2\partial t + (\rho\circ F)^4\partial t - (\rho\circ F)^4\partial t + (\rho\circ F)^2\nabla_B F}{|\nabla_B F|_N^2(\rho\circ F)^2 + (\rho\circ F)^4}\\ &= \frac{(\rho\circ F)^2[|\nabla_B F|_B^2\partial t + \nabla_B F]}{(\rho\circ F)^2[|\nabla_B F|_B^2 + (\rho\circ F)^2]} = \frac{|\nabla_B F|^2\partial t + \nabla_B F}{|\nabla_B F|_B^2 + (\rho\circ F)^2}.\end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned}|\nabla_M h|^2 &= \langle \nabla_M h, \nabla_M h\rangle_M = \frac{|\nabla F|^4 + |\nabla F|^2(\rho\circ F)^2}{(|\nabla F|^2 + (\rho\circ F)^2)^2} = \frac{|\nabla F|^2(|\nabla F|^2 + (\rho\circ F)^2)}{(|\nabla F|^2 + (\rho\circ F)^2)^2}\\ &= \frac{|\nabla F|^2}{|\nabla F|^2 + (\rho\circ F)^2}.\end{aligned}$$

De donde

$$|\nabla F|^2 = \frac{|\nabla h|^2(\rho\circ F)^2}{1 - |\nabla h|^2}.$$

De lo anterior se deduce que las curvas de nivel de F corresponden a curvas de nivel de h y que $|\nabla F|^2$ es constante a lo largo de las curvas de nivel de F si y sólo si $|\nabla h|^2$ es constante a lo largo de las curvas de nivel de h.

iii)⇔iv). Si $T = \frac{\nabla h}{|\nabla h|}$, entonces $\nabla_T T = 0$ si y sólo si

$$0 = \nabla_{\frac{\nabla h}{|\nabla h|}}\frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{1}{|\nabla h|}\nabla_{\nabla h}\frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{1}{|\nabla h|}\left(\nabla_{\nabla h}\left(\frac{1}{|\nabla h|}\right)\nabla h\right) + \frac{1}{|\nabla h|^2}(\nabla_{\nabla h}\nabla h),$$

lo que ocurre sólo si $\nabla_{\nabla h}\nabla h = \beta\nabla h$, para algún $\beta\in\mathbb{R}$.

Por otro lado, para todo $Y\in\mathfrak{X}(M)$ que satisface $\langle Y, \nabla h\rangle = 0$ se tiene que

$$Y|\nabla h|^2 = \nabla_Y\langle \nabla h, \nabla h\rangle = 2\langle \nabla_Y\nabla h, \nabla h\rangle;$$
$$0 = \nabla_{\nabla h}\langle \nabla h, Y\rangle = \langle \nabla_{\nabla h}\nabla h, Y\rangle + \langle \nabla_{\nabla h}Y, \nabla h\rangle.$$

Dado que $0 = [\nabla h, Y] = \nabla_{\nabla h}Y - \nabla_Y\nabla h$, entonces $\nabla_{\nabla h}Y = \nabla_Y\nabla h$.

Luego $Y|\nabla h|^2 = 2\langle \nabla_{\nabla h}Y, \nabla h\rangle = -2\langle \nabla_{\nabla h}\nabla h, Y\rangle$.

Por lo tanto $Y|\nabla h|^2 = 0$ si y sólo si $\nabla_{\nabla h}\nabla h = \beta\nabla h$ para algún $\beta\in\mathbb{R}$ y por otro lado como $Y|\nabla h|^2 = 0$ si y sólo si $|\nabla h|$ es constante a lo largo de las curvas de nivel de h, de aquí se deduce que las curvas integrales de T son geodésicas en M si y sólo si $|\nabla h|$ es constante a lo largo de las curvas de nivel de h. □

Corolario 2.8. *(véase [5])Sea N una variedad Riemanniana que admite un campo cerrado y conforme Z, M una hipersuperficie orientable de N con ángulo constante $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i. $T = \frac{Z^{\top}}{|Z^{\top}|}$ *es una dirección principal de M con*

$$A_{\xi}T = \begin{cases} \left(\frac{D_T|Z|(\text{sen}\theta) - \varphi}{|Z|\cos\theta}\right)T & \text{Para} \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \\ 0 & \text{Para} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

ii. Las curvas integrales de T son geodésicas de M.

Demostración. Si $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de la ecuación

$$\varphi X = D_X|Z|(\text{sen}\theta\,)T + |Z|(\text{sen}\theta(\nabla_X T) + D_X(\text{sen}\theta)T - \cos\theta(A_{\xi}X)\,)$$

para $X = T$ se tiene que

$$\varphi T = D_T|Z|(\text{sen}\theta\,)T + |Z|(\text{sen}\theta(\nabla_T T) + (D_T\text{sen}\theta)T - \cos\theta(A_{\xi}T)\,).$$

Como θ es constante entonces $D_T\text{sen}\theta = 0$, entonces

$$\varphi T = D_T|Z|(\text{sen}\theta\,)T + |Z|(\text{sen}\theta(\nabla_T T) - \cos\theta(A_{\xi}T)\,).$$

Despejando $A_{\xi}T$ de la ecuación anterior se tiene que

(5). $$A_{\xi}T = \frac{D_T|Z|(\text{sen}\theta\,)T + |Z|\text{sen}\theta(\nabla_T T) - \varphi T}{|Z|\cos\theta}.$$

***i* $\Rightarrow$ *ii*.** Como T es dirección principal de M, de la ecuación (5) se tiene que $\nabla_T T = \lambda T$, pero del hecho que $\langle \nabla_T T, T\rangle = 0$ se deduce que $\nabla_T T = 0$. Luego las curvas integrales de T son geodésicas de M.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces de la ecuación

$$0 = D_X|Z|(\cos\theta)\xi + |Z|(\text{sen}\theta\,\alpha(X, T) + (D_X\cos\theta)\xi)$$

se deduce que $0 = |Z|\alpha(X, T)$, lo que implica que

$$0 = \langle \alpha(X, T), \xi\rangle = \langle A_{\xi}T, X\rangle$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$, es decir $A_{\xi}T = 0$.

Por otro lado de la ecuación $Z = |Z|(\text{sen}\theta T + \cos\theta\xi)$ se tiene que $Z = |Z|T$, derivando esta ecuación en la dirección de T se obtiene que

$$D_T Z = (D_T|Z|)T + |Z|D_T T.$$

Tomando la parte tangente de la ecuación anterior se tiene

$$\varphi T = (D_T|Z|)T + |Z|\nabla_T T.$$

Lo cual implica que $\nabla_T T = \lambda T$, pero como $\langle \nabla_T T, T\rangle = 0$ se tiene que $\nabla_T T = 0$. Así las curvas integrales de T son geodésicas.

ii $\Rightarrow$ ***i.*** El caso donde $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es justo la implicación $iii \Rightarrow i$ del Teorema 2.7. Para el caso donde $\theta = \frac{\pi}{2}$ se hace producto con ξ a la ecuación $D_X Z = (D_X|Z|)T + |Z|\alpha(X, T)$ para todo $X \in \Gamma(TM)$, con lo que resulta que $0 = |Z|\langle A_\xi T, X\rangle$, es decir $A_\xi T = 0$, lo que implica que T es una dirección principal. □

Proposición 2.9. *Sea M^2 una hipersuperficie de N^3, Z un campo cerrado y conforme en N y $f: N \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en N. Si f es constante en las direcciones ortogonales a Z y además $f\langle Z, \xi\rangle$ es constante, entonces M es una superficie con dirección principal canónica relativa a Z.*

Demostración. Obsérvese que como $f\langle Z, \xi\rangle = c$, con c una constante, entonces $\langle Z, \xi\rangle = \frac{c}{f}$.

Del hecho que f es constante en las direcciones ortogonales a Z, se tiene que $\langle Z, \xi\rangle$ es constante en las direcciones tangentes a M y ortogonales a $T = \frac{Z^\top}{|Z^\top|}$. Luego por el Teorema 2.7 M tiene dirección principal canónica relativa a Z. □

2.2 Relación entre superficies totalmente umbílicas y campos cerrados y conformes.

Lema 2.10. *Sea N una variedad Riemanniana, M hipersuperficie de N, Z un campo cerrado y conforme en N. La proyección de Z en M es también un campo cerrado y conforme en M si y sólo si M es totalmente umbílica.*

Demostración.

$\Rightarrow$). Suponga que la proyección de Z en M es un campo cerrado y conforme en M, sea $X \in \Gamma(TM)$, entonces $X \in \Gamma(TN)$ y

$$\begin{aligned} \nabla_X Z^\top &= (D_X Z^\top)^\top = (D_X(Z - \langle Z, \xi\rangle \xi))^\top = (\varphi X + \langle Z, A_\xi X\rangle \xi + \langle Z, \xi\rangle A_\xi X)^\top \\ &= \varphi X + \langle Z, \xi\rangle A_\xi X. \end{aligned}$$

Para φ: $N \longrightarrow \mathbb{R}$, la función de la definición de Z en N. Por otro lado, de las propiedades de Z se tiene que $\nabla_X Z = \lambda X$ para $\lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la definición de Z en M. De aquí que

$$A_\xi X = \frac{(\lambda - \varphi)}{\langle Z, \xi\rangle} X.$$

Es decir $A_\xi = \frac{(\lambda - \varphi)}{\langle Z, \xi\rangle} I$, lo cual implica que M es totalmente umbílica.

$\Leftarrow$). Suponga que M es totalmente umbílica, entonces $A_\xi = \beta I$ para β: $M \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces para $X \in \Gamma(TM)$ por el inciso anterior se tiene $\nabla_X Z^T = \varphi X + \langle Z, \xi\rangle A_\xi X$.

Luego $\nabla_X Z^T = (\varphi + \langle Z, \xi\rangle \beta) X$. Es decir Z^T es cerrado y conforme en M. □

Capítulo 3

Hipersuperficies con curvatura media constante.

Introducción.

Es este un momento clave, pues es aquí cuando todo lo hecho con anterioridad adquiere sentido, ya que en lo consiguiente veremos los resultados a los que nos ha llevado el camino de la investigación. Primero con la generalización de la conocida fórmula del laplaciano de Yuanlong Xin [11] y un corolario desprendido de ella, que sumados dan respuesta a la segunda pregunta con la que inicia la investigación. Seguimos con una caracterización de las superficies totalmente geodésicas y las respuestas a las dos últimas preguntas de la investigación. Finalizamos con una condición necesaria para que una superficie tenga curvatura media constante en $\mathbb{S}^3$. Es importante recalcar que las dos primeras secciones fueron el resultado obtenido bajo la dirección de Gabriel Ruiz Hernández y las dos últimas secciónes fueron realizadas en coordinación con Antonio J. Di Scala y el mismo Gabriel Ruiz Hernández, que en suma crean el artículo *Helix surfaces in euclidean spaces* [1], cuyos principales resultados se encuentran plasmados en los Teoremas 3.13, 3.19 y 3.22.

Así que, sin más que decir por el momento, los invito a ver hasta dónde nos ha llevado nuestra compañera la intuición.

3.1 El laplaciano de la función ángulo.

Proposición 3.1. *Sea M^m hipersuperficie inmersa isométricamente en $\mathbb{Q}_c^{m+1}$ con curvatura media constante, α su segunda forma fundamental y ξ un vector normal unitario. Entonces para todo campo vectorial cerrado y conforme $Z \in \Gamma(T\mathbb{Q}_c^{m+1})$ se tiene que*

$$\triangle\langle Z,\xi\rangle + |\alpha|^2\langle Z,\xi\rangle + m\varphi\langle H,\xi\rangle = 0.$$

donde $\varphi\colon \mathbb{Q}_c^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $D_X Z = \varphi X$ para todo $X \in \Gamma(TM)$ y H denota el vector de curvatura media.

Demostración. Sean $p\in M$ y $\{e_i\}_{i=1}^m$ un marco ortonormal definido en una vecindad de p que satisface $\nabla_{e_j}e_i=0$ en p para todo i,j. Primero nótese que si $\bar{R}$ denota el tensor de curvatura de $\mathbb{Q}_c^{m+1}$, para $X,Y\in\Gamma(T\,\mathbb{Q}_c^{m+1})$ se tiene que

$$\bar{R}(X,Y)Z \;=\; D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z.$$

Como $\mathbb{Q}_c^{m+1}$ es de curvatura seccional constante c se cumple la siguiente ecuación:

$$\bar{R}(X,Y)Z \;=\; c(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X).$$

La cual implica lo siguiente:

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \;=\; c(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X).$$

De aquí que haciendo producto con ξ se obtienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\langle D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z,\xi\rangle &= c\langle\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X,\xi\rangle\\
\langle D_X D_Y Z,\xi\rangle - \langle D_Y D_X Z,\xi\rangle - \langle D_{[X,Y]}Z,\xi\rangle &= c(\langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle)\\
\langle D_X D_Y Z,\xi\rangle - \langle D_Y D_X Z,\xi\rangle - \langle D_{[X,Y]}Z,\xi\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Tomando $X=e_j$ y $Y=e_i$ se tiene $[X,Y]=0$ en p, lo cual implica que $D_{[X,Y]}Z=0$ en p. Es decir $\langle D_{e_j}D_{e_i}Z,\xi\rangle=\langle D_{e_i}D_{e_j}Z,\xi\rangle$ en p.

Hay que observar que el laplaciano está dado por

$$\begin{aligned}
\triangle\langle Z,\xi\rangle &= \sum_{i=1}^m D_{e_i}D_{e_i}\langle Z,\xi\rangle = \sum_{i=1}^m D_{e_i}[\langle D_{e_i}Z,\xi\rangle + \langle Z,D_{e_i}\xi\rangle] = \sum_{i=1}^m D_{e_i}[\langle\varphi e_i,\xi\rangle - \langle Z,A_\xi e_i\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^m D_{e_i}[-\langle Z,A_\xi e_i\rangle] = \sum_{i=1}^m -\langle D_{e_i}Z,A_\xi e_i\rangle - \langle Z,D_{e_i}(A_\xi e_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^m -\langle\varphi e_i,A_\xi e_i\rangle - \langle Z,\nabla_{e_i}(A_\xi e_i)\rangle - \langle Z,\alpha(e_i,A_\xi e_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^m -\varphi\langle\alpha(e_i,e_i),\xi\rangle - \langle Z,\nabla_{e_i}(A_\xi e_i)\rangle - \langle Z,\alpha(e_i,A_\xi e_i)\rangle\\
&= -\varphi\langle mH,\xi\rangle - \sum_{i=1}^m \langle Z,\nabla_{e_i}(A_\xi e_i)\rangle - \sum_{i=1}^m \langle Z,\alpha(e_iA_\xi e_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$A_\xi e_i \;=\sum_{j=1}^m \langle A_\xi e_i,e_j\rangle e_j \;=\sum_{j=1}^m \langle\alpha(e_i,e_j),\xi\rangle e_j,$$

Entonces analizando el siguiente término en el punto p se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}(A_\xi e_i) &= \nabla_{e_i}\left[\sum_{j=i}^{m} \langle \alpha(e_i, e_j), \xi\rangle e_j\right] = \nabla_{e_i}\left[\sum_{j=i}^{m} \langle D_{e_j} e_i, \xi\rangle e_j\right] \\
&= \sum_{j=i}^{m} \langle D_{e_i} D_{e_j} e_i, \xi\rangle e_j + \langle D_{e_j} e_i, D_{e_i}\xi\rangle e_j \\
&= \sum_{j=i}^{m} \langle D_{e_j} D_{e_i} e_i, \xi\rangle e_j + \langle D_{e_j} e_i, D_{e_i}\xi\rangle e_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle D_{e_j}(\nabla_{e_i} e_i + \alpha(e_i, e_i)), \xi\rangle e_j + \langle \nabla_{e_j} e_i + \alpha(e_j, e_i), D_{e_i}\xi\rangle e_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle \nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} e_i) + \alpha(e_j, \nabla_{e_i} e_i) - A_{\alpha(e_i,e_i)} e_j, \xi\rangle e_j - \langle \alpha(e_j, e_i), A_\xi e_i\rangle e_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle \alpha(e_j, \nabla_{e_i} e_i), \xi\rangle e_j.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}(A_\xi e_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \langle \alpha(e_j, \nabla_{e_i} e_i), \xi\rangle e_j$$

Como $A_\xi e_j = \sum_{k=1}^{m} \langle \alpha(e_k, e_j), \xi\rangle e_k$ entonces

$$\langle \alpha(e_j, \nabla_{e_i} e_i), \xi\rangle = \langle A_\xi e_j, \nabla_{e_i} e_i\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle \alpha(e_k, e_j), \xi\rangle \langle e_k, \nabla_{e_i} e_i\rangle = 0.$$

Es decir $\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}(A_\xi e_i) = 0$. De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned}
\Delta\langle Z, \xi\rangle &= -m\varphi \langle H, \xi \rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle Z, \alpha(e_i, A_\xi e_i)\rangle \\
&= -m\varphi\langle H, \xi\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle Z, \langle \alpha(e_i, A_\xi e_i), \xi\rangle \xi\rangle \\
&= -m\varphi\langle H, \xi\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle Z, \xi\rangle \langle \alpha(e_i, A_\xi e_i), \xi\rangle
\end{aligned}$$

También es necesario observar lo siguiente:

$$\langle\alpha(e_i, A_\xi e_i), \xi\rangle = \left\langle \alpha\left(e_i, \sum_{j=1}^{m} \langle\alpha(e_i, e_j), \xi\rangle e_j \right), \xi \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle\alpha(e_i, e_j), \xi\rangle^2.$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} \langle\alpha(e_i, A_\xi e_i), \xi\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \langle\alpha(e_i, e_j), \xi\rangle^2 = |\alpha|^2.$$

Luego

$$\triangle\langle Z, \xi\rangle = -m\varphi\langle H, \xi\rangle - \langle Z, \xi\rangle\,|\alpha|^2.$$

□

Corolario 3.2. *Sea M hipersuperficie mínima en $\mathbb{Q}_c^{m+1}$, α su segunda forma fundamental y ξ un vector normal unitario a M. Entonces para todo campo vectorial cerrado y conforme $Z \in \Gamma(T\,\mathbb{Q}_c^{m+1})$ se tiene la siguiente igualdad:*

$$\triangle\langle Z, \xi\rangle + |\alpha|^2\langle Z, \xi\rangle = 0.$$

Recordando la fórmula del laplaciano dada por Yuanlong Xin (véase [11]) en la que afirma que una hipersuperficie M de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$ satisface la igualdad

$$\triangle\langle a, v\rangle + |\alpha|^2\langle a, v\rangle = 0,$$

donde $\triangle$ denota el laplaciano de M, $a \in \mathbb{R}^3$ y v un vector normal a M, se puede concluir, con ayuda de la proposición 3.1 y el Corolario 3.2, que la misma fórmula sigue siendo válida para espacios modelo $\mathbb{Q}_c^{m+1}$ en el caso de que la hipersuperficie M sea mínima.

Corolario 3.3. *Si M es hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$ con ángulo constante con respecto a una dirección constante Z y curvatura media constante entonces M es, o un hiperplano o un cilindro sobre una hipersuperficie de curvatura media constante en el hiperplano ortogonal a Z.*

Demostración. Del hecho que M tenga curvatura media constante se tiene que satisface la fórmula del laplaciano, es decir

$$\triangle\langle Z, \xi\rangle + |\alpha|^2\langle Z, \xi\rangle = 0.$$

Por otro lado hay que observar que si M tiene ángulo constante entonces $\langle Z, \xi\rangle$ debe ser constante, lo cual implica que $|\alpha|^2 = 0$ ó $\langle Z, \xi\rangle = 0$. Para el primer caso se tiene que M es totalmente geodésica, lo cual implica que es un hiperplano. En el segundo caso se tiene que la dirección Z es ortogonal en todo punto al plano normal de M, entonces M debe ser un cilindro cuya base es una hipersuperficie de curvatura media constante (ya que M es de curvatura media constante) en el hiperplano ortogonal a Z. □

3.2 Superficies de ángulo constante en Espacios Modelo.

En los resultados de esta sección el *ángulo constante* será tomado relativo a Z.

Observación 3.4. Para M hipersuperficie de $\mathbb{Q}_c^{m+1}$, un campo cerrado y conforme $Z \in (T\mathbb{Q}_c^{m+1})$ puede ser descompuesto de la forma siguiente:

$$Z \ = \ |Z|(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi),$$

donde $T = \frac{Z^\top}{|Z^\top|}$ y ξ es un vector normal unitario a M y $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observación 3.5. Para $Z \in \mathbb{Q}_c^{m+1}$ campo cerrado y conforme se satisfacen las relaciones $|Z| = \frac{\langle Z, \xi\rangle}{\operatorname{sen}\theta}$ y $\langle T, Z\rangle = \langle Z, \xi\rangle \cot\theta$.

Proposición 3.6. *Sea M una hipersuperficie de $\mathbb{Q}_c^{m+1}$, sean ∇ y D las conexiones de M y $\mathbb{Q}_c^{m+1}$ respectivamente, α la segunda forma fundamental de M y ξ un vector normal unitario a M. Sea $Z \in \Gamma(T\mathbb{Q}_c^{m+1})$ cerrado y conforme, entonces para todo $X \in \Gamma(TM)$ se tiene que*

$$(D_X Z)^\top \ = \ \frac{\varphi\,\langle X, Z\rangle}{\langle Z, \xi\rangle}\operatorname{sen}\theta\cos\theta T + \langle Z, \xi\rangle[(\cot\theta)\nabla_X T - A_\xi X]$$

$$(D_X Z)^\perp \ = \ \frac{\varphi\,\langle X, Z\rangle}{\langle Z, \xi\rangle}\operatorname{sen}^2\theta\xi + \langle Z, \xi\rangle(\cot\theta)\alpha(X, T).$$

Demostración. Sea $X \in \Gamma(TM)$. Entonces

$$\begin{aligned} D_X Z &= D_X[|Z|(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi)] \\ &= D_X|Z|(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi) + |Z| D_X(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi) \\ &= D_X|Z|(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi) + |Z|(\cos\theta D_X T + \operatorname{sen}\theta D_X\xi). \end{aligned}$$

Como Z es cerrado y conforme, entonces

$$\varphi X \ = \ D_X|Z|(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi) + |Z|(\cos\theta D_X T + \operatorname{sen}\theta D_X\xi).$$

Dado que $D_X|Z|^2 = D_X(|Z|\,|Z|) = 2|Z|D_X|Z|$ y, por otro lado, $D_X|Z|^2 = D_X\langle Z, Z\rangle$ que a su vez es igual a $2\langle D_X Z, Z\rangle = 2\varphi\langle Z, X\rangle$, se obtiene que $D_X|Z| = \frac{\varphi\langle X, Z\rangle}{|Z|}$.

Entonces la ecuación anterior queda escrita como sigue

$$\varphi X \ = \ \frac{\varphi\langle X, Z\rangle}{|Z|}(\cos\theta T + \operatorname{sen}\theta\xi) + |Z|(\cos\theta D_X T + \operatorname{sen}\theta D_X\xi).$$

La parte normal de la ecuación anterior es

$$0 \ = \ \frac{\varphi\langle X, Z\rangle}{|Z|}\operatorname{sen}\theta\xi + |Z|\cos\theta\alpha(X, T).$$

De la Observación 3.5 se tiene que

$$0 \ = \ \frac{\varphi\langle X, Z\rangle}{\langle Z, \xi\rangle}\operatorname{sen}^2\theta\xi + \langle Z, \xi\rangle\cot\theta\alpha(X, T).$$

Ahora la parte tangente de la misma ecuación resulta ser

$$\varphi X \;=\; \frac{\varphi\langle X,Z\rangle}{|Z|}\cos\theta T + |Z|(\cos\theta\nabla_X T - \mathrm{sen}\theta A_\xi X).$$

Nuevamente por la Observación 3.5 se obtiene lo siguiente:

$$\varphi X = \tfrac{\varphi\langle X,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}\theta\cos\theta T + \langle Z,\xi\rangle(\cot\theta\nabla_X T - A_\xi X). \qquad \square$$

Corolario 3.7. *Sea $Z\in\Gamma(T\mathbb{Q}_c^3)$ cerrado y conforme, sea M hipersuperficie de $\mathbb{Q}_c^3$ con ángulo constante , α su segunda forma fundamental y ξ un vector normal unitario a M. Entonces para $W\in\Gamma(TM)$ tal que $\{W,T\}$ es base ortonormal de TM se tiene que*

$$\alpha(T,T) = -\frac{\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta}{\langle Z,\xi\rangle}\xi;\quad \alpha(T,W)=0=\nabla_T T=\nabla_T W;\quad A_\xi T = -\frac{\varphi\mathrm{sen}^2\theta}{\langle Z,\xi\rangle}T.$$

Demostración. Primero es importante observar la siguiente relación:

$$\langle W,Z\rangle = \langle W,Z\rangle^\top + \langle W,Z\rangle^\perp = \langle W,Z^\top\rangle = \langle W,T\rangle\,|Z^\top| = 0.$$

De la parte normal de $D_X Z$, enunciada en la Proposición 3.6 se tiene que

$$\alpha(X,T) \;=\; -\frac{\varphi\langle X,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^2}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta\xi.$$

Para $X=W$ en la ecuación anterior se tiene $\alpha(W,T)=0$. Para $X=T$ lo que se obtiene es

$$\alpha(T,T) \;=\; -\frac{\varphi\langle T,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^2}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta\xi.$$

La Observación 3.5 implica que $\alpha(T,T) = -\frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\xi$. De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned}
\langle A_\xi T,T\rangle &= \langle\alpha(T,T),\xi\rangle &&= -\frac{\varphi}{y}\mathrm{sen}^2\theta;\\
\langle A_\xi T,W\rangle &= \langle\alpha(T,W),\xi\rangle &&= 0;\\
\langle A_\xi W,T\rangle &= \langle\alpha(T,W),\xi\rangle &&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces $A_\xi T = -\frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta T$.

Por otro lado, la parte tangente de $D_X Z$ enunciada en la Proposición 3.6 implica que

$$\nabla_X T \;=\; \frac{\varphi X}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta + \mathrm{tg}\theta A_\xi X - \frac{\varphi\langle X,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^2}\mathrm{sen}^2\theta T.$$

Para $X=T$ la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta T + \mathrm{tg}\theta A_\xi T - \frac{\varphi\langle T,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^2}\mathrm{sen}^2\theta T\\
&= \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta T - \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\mathrm{tg}\theta T - \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta T.
\end{aligned}$$

Dado que $\nabla_T T\perp T$ y $\nabla_T T=\lambda W$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}$, implica que $\nabla_T T=0$.

Por otro lado del hecho que $\langle T,W\rangle=0$ se tiene $\langle\nabla_T T,W\rangle = -\langle\nabla_T W,T\rangle$.

Lo cual implica que $\nabla_T W = 0$. □

Corolario 3.8. *Sea M hipersuperficie de $\mathbb{Q}_c^3$ con curvatura media constante y de ángulo constante, α su segunda forma fundamental y ξ un vector normal unitario a M. Para $Z \in \Gamma(T\,\mathbb{Q}_c^3)$ cerrado y conforme se tiene que*

$$\alpha(W,W) = \left(a + \frac{\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta}{\langle Z,\xi\rangle}\right)\xi; \quad A_\xi W = \left(a + \frac{\varphi\mathrm{sen}^2\theta}{\langle Z,\xi\rangle}\right)W;$$

$$\nabla_W W = \left(-\frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta - a\,\mathrm{tg}\theta - \frac{\varphi\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta}{\langle Z,\xi\rangle}\right)T;$$

$$\nabla_W T = \left(\frac{\varphi\mathrm{tg}\theta}{\langle Z,\xi\rangle} + \frac{\varphi\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta}{\langle Z,\xi\rangle} + a\,\mathrm{tg}\theta\right)W,$$

donde a es la curvatura media constante.

Demostración. Por el Corolario 3.7 se tiene que

$$\alpha(T,T) = -\frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\xi.$$

Como $H = \alpha(T,T) + \alpha(W,W) = a\xi$, de aquí se deduce la relación siguiente:

$$\alpha(W,W) = a\xi - \alpha(T,T) = \left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\right)\xi,$$

lo cual implica que

$$\langle A_\xi W, W\rangle = \langle \alpha(W,W),\xi\rangle = \left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\right).$$

Entonces

$$A_\xi W = \left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\right)W.$$

Además, la parte tangente de $D_X Z$ enunciada en la Proposición 3.6 implica que

$$\nabla_X T = \frac{\varphi X}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta + \mathrm{tg}\theta A_\xi X - \frac{\varphi\langle X,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^2}\mathrm{sen}^2\theta T.$$

Así para $X = W$ lo que se obtiene es lo siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla_W T &= \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta W + \mathrm{tg}\theta A_\xi W - \frac{\varphi\langle W,Z\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^2}\mathrm{sen}^2\theta T.\\ &= \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta W + \mathrm{tg}\theta\left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\right)W\\ &= \left(\frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta + a\,\mathrm{tg}\theta + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta\right)W.\end{aligned}$$

Como $\langle T,W\rangle = 0$, entonces $\langle\nabla_W T, W\rangle = -\langle\nabla_W W, T\rangle$. Lo cual implica que

$$\nabla_W W = -\Big(\tfrac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{tg}\theta + a\,\mathrm{tg}\theta + \tfrac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta\Big)T. \qquad \square$$

A partir de este momento se considerará el campo $Z(x) = E_{n+1}(x) - c\langle E_{n+1}(x), x\rangle x$ descrito en la ecuación (5) de la página 19.

Proposición 3.9. *Sea $Z \in \Gamma(T\mathbb{Q}^3_c)$ cerrado y conforme, sea M hipersuperficie de $\mathbb{Q}^3_c$ con curvatura media constante y de ángulo constante, α su segunda forma fundamental, ξ un vector normal unitario de M, entonces se satisface la siguiente ecuación:*

$$\Delta\langle Z,\xi\rangle = -2cy + a\varphi\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta}{y}.$$

Demostración. Con ayuda de la Proposición 1.24 se deduce que

$$\begin{aligned} D_T(D_T\langle Z,\xi\rangle) &= D_T[\langle D_T Z,\xi\rangle + \langle Z, D_T\xi\rangle] = D_T[\langle\varphi T,\xi\rangle + \langle Z, -A_\xi T\rangle] \\ &= D_T\left[\frac{\varphi}{y}\mathrm{sen}^2\theta\langle Z,T\rangle\right] = D_T[\varphi\mathrm{sen}\theta\cos\theta] = (D_T\varphi)\mathrm{sen}\theta\cos\theta = -cy\cos^2\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_W(D_W\langle Z,\xi\rangle) &= D_W[\langle D_W Z,\xi\rangle + \langle Z, D_W\xi\rangle] = D_W[\langle\varphi W,\xi\rangle - \langle Z, A_\xi W\rangle] \\ &= D_W\left[-\left(a + \frac{\varphi}{y}\mathrm{sen}^2\theta\right)\langle Z,W\rangle\right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\nabla_W W}\langle Z,\xi\rangle &= -\left(\frac{\varphi}{y}\mathrm{tg}\theta + a\,\mathrm{tg}\theta + \frac{\varphi}{y}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta\right)(D_T\langle Z,\xi\rangle) \\ &= -\left(\frac{\varphi}{y}\mathrm{tg}\theta + a\,\mathrm{tg}\theta + \frac{\varphi}{y}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\theta\right)(\varphi\mathrm{sen}\theta\cos\theta) \\ &= -\frac{\varphi^2}{y}\mathrm{sen}^2\theta - a\varphi\mathrm{sen}^2\theta - \frac{\varphi^2}{y}\mathrm{sen}^4\theta \\ &= -\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{y} + cy - a\varphi\mathrm{sen}^2\theta - \frac{\mathrm{sen}^4\theta}{y} + cy\,\mathrm{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

Como $\Delta\langle Z,\xi\rangle = D_T(D_T\langle Z,\xi\rangle) + D_W(D_W\langle Z,\xi\rangle) - D_{\nabla_T T}\langle Z,\xi\rangle - D_{\nabla_W W}\langle Z,\xi\rangle$ entonces las ecuaciones anteriores implican que

$$\begin{aligned} \Delta\langle Z,\xi\rangle &= -cy\cos^2\theta + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{y} - cy + a\varphi\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\mathrm{sen}^4\theta}{y} - cy\,\mathrm{sen}^2\theta \\ &= -2cy + a\varphi\mathrm{sen}^2\theta + \tfrac{\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta}{y}. \end{aligned} \qquad \square$$

Lema 3.10. *Sea $Z \in \Gamma(T\mathbb{Q}_c^3)$ cerrado y conforme, sea M hipersuperficie de $\mathbb{Q}_c^3$ con curvatura media constante y de ángulo constante, α su segunda forma fundamental, ξ un vector normal unitario de M, entonces se satisface el siguiente polinomio:*

$$\lambda_4 y^4 - \lambda_2 y^2 \;=\; -\lambda_0$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \operatorname{sen}^2\theta(a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)^2 + a^2\,c\,(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2\\
\lambda_2 &= 2\operatorname{sen}^2\theta(a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)(3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta) - a^2\operatorname{sen}^2\theta(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2\\
\lambda_0 &= \operatorname{sen}^2\theta(3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)^2\\
y &= \langle Z,\xi\rangle
\end{aligned}$$

Demostración. Por definición de $|\alpha|^2$ se tiene que

$$|\alpha|^2 = |\alpha(T,T)|^2 + |\alpha(W,W)|^2 + 2|\alpha(T,W)| = 2\frac{\varphi^2\operatorname{sen}^4\theta}{y^2} + a^2 + 2\frac{a\varphi\operatorname{sen}^2}{y}$$

Luego, las Proposiciones 3.1 y 3.9 implican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
0 = \triangle\langle Z,\xi\rangle + |\alpha|^2\langle Z,\xi\rangle + a\varphi &= -2cy + a\varphi\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^4\theta}{y} + 2\frac{\varphi^2\operatorname{sen}^4\theta}{y}\\
&\quad + a^2y + 2a\varphi\operatorname{sen}^2\theta + a\varphi.
\end{aligned}$$

Multiplicando por y ambos lados de la igualdad se obtiene lo siguiente:

$$0 \;=\; -2cy^2 + a\varphi\operatorname{sen}^2\theta y + \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta + 2\varphi^2\operatorname{sen}^4\theta + a^2y^2 + 2a\varphi\operatorname{sen}^2\theta y + a\varphi y$$

Con ayuda de la Proposición 1.24 se sustituye el valor de φ^2,

$$\begin{aligned}
0 &= (a^2-2c)y^2 + (3a\varphi\operatorname{sen}^2\theta + a\varphi)y + 2\operatorname{sen}^4\theta - 2cy^2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta\\
&= (a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)y^2 + (3a\varphi\operatorname{sen}^2\theta + a\varphi)y + 3\operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

Entonces

$$-a\varphi(3\operatorname{sen}^2\theta+1)y \;=\; (a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)y^2 + 3\operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
a^2\varphi^2(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2y^2 &= (a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)^2y^4 + (3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)^2\\
&\quad + 2(a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)(3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)y^2.
\end{aligned}$$

La Proposición 1.24 implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a^2(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2y^2 - a^2\,c\,(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2\frac{y^4}{\operatorname{sen}^2\theta} &= (a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)^2y^4 + (3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)^2\\
&\quad + 2(a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)(3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)y^2.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}^2\theta$,

$$\begin{aligned}
a^2\operatorname{sen}^2\theta(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2y^2 - a^2\,c\,(3\operatorname{sen}^2\theta+1)^2y^4 = \;& \operatorname{sen}^2\theta(a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)^2y^4\\
&+ 2\operatorname{sen}^2\theta(a^2-2c-2c\operatorname{sen}^2\theta)(3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)y^2\\
&+ \operatorname{sen}^2\theta(3\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{sen}^2\theta(a^2-2c-2c\,\mathrm{sen}^2\theta)^2+a^2\,c\,(3\mathrm{sen}^2\theta+1)^2)y^4\\ &\quad+(2\mathrm{sen}^2\theta(a^2-2c-2c\,\mathrm{sen}^2\theta)(3\mathrm{sen}^4\theta+\mathrm{sen}^2\theta)-a^2\mathrm{sen}^2\theta(3\mathrm{sen}^2\theta+1)^2)y^2\\ &\quad+\mathrm{sen}^2\theta(3\mathrm{sen}^4\theta+\mathrm{sen}^2\theta)^2 \end{aligned}$$ □

Corolario 3.11. *Sea $M\subset\mathbb{Q}_c^3$ una superficie inmersa isométricamente con ángulo constante y de curvatura media constante, sea $Z\in\Gamma(T\mathbb{Q}_c^3)$ un campo cerrado y conforme, entonces la restricción de $|Z|$ a M es una función constante.*

Demostración. Por el Lema 3.10 se tiene que existe un polinomio en la variable $\langle Z,\xi\rangle$ denotado por $Q(\langle Z,\xi\rangle)=0$, donde el término constante es $\lambda_0=\mathrm{sen}^2\theta(3\mathrm{sen}^4\theta+\mathrm{sen}^2\theta)^2$, el cual no es cero si y sólo si $\theta\neq 0$. Esto prueba que $\langle Z,\xi\rangle$ satisface un polinomio no cero de grado mayor o igual a uno. Así $\langle Z,\xi\rangle$ es constante y entonces $|Z|$es constante en M por que $\left\langle \frac{Z}{|Z|},T\right\rangle$ es constante. □

Proposición 3.12. *Sea M superficie conexa inmersa en $\mathbb{Q}_c^3$ con curvatura media constante. Sea $Z\in\Gamma(T\mathbb{Q}_c^3)$ un campo cerrado y conforme sobre $\mathbb{Q}_c^3$. Si Z es tangente a M, entonces M es totalmente geodésica.*

Demostración. Sea S una superficie ortogonal a Z y llamando $\gamma:=M\cap S\neq\varnothing$, sea u un vector tangente unitario a γ. En particular $\left\{u,\frac{Z}{|Z|}\right\}$ es una base ortonormal de TM.

Dado que por hipótesis $\langle Z,\xi\rangle=0$ a lo largo de M, por la proposición 3.1 se tiene que $\varphi\langle H,\xi\rangle=0$. En este caso se está suponiendo que φ no se anula a lo largo de M, lo cual implica que $H=0$, i.e. M es una superficie mínima en $\mathbb{Q}_c^3$:

$$\alpha_{M,Q}(u,u)+\alpha_{M,Q}\left(\frac{Z}{|Z|},\frac{Z}{|Z|}\right)=0.$$

Ahora la fórmula de Gauss descrita en la ecuación (2) de la definición 1.4 para la inmersión $M\subset\mathbb{Q}_c^3$ dice que

$$0=D_{\frac{Z}{|Z|}}\left(\frac{Z}{|Z|}\right) = \nabla_{\frac{Z}{|Z|}}\left(\frac{Z}{|Z|}\right)+\alpha_{M,Q}\left(\frac{Z}{|Z|},\frac{Z}{|Z|}\right),$$

donde ∇ es la conexión de M y D la de $\mathbb{Q}_c^3$. Más aún $\alpha_{M,Q}\left(\frac{Z}{|Z|},\frac{Z}{|Z|}\right)=0$. Lo cual implica que $\alpha_{M,Q}(u,u)=0$. Finalmente $\alpha_{M,Q}\left(u,\frac{Z}{|Z|}\right)=D_u\left(\frac{Z}{|Z|}\right)-\nabla_u\left(\frac{Z}{|Z|}\right)$. Recordando que Z es cerrado y conforme en M se tiene que $D_u\left(\frac{Z}{|Z|}\right)=D_u\left(\frac{1}{|Z|}\right)Z+\left(\frac{1}{|Z|}\right)\varphi u$ y $\nabla_u\left(\frac{Z}{|Z|}\right)=D_u\left(\frac{1}{|Z|}\right)Z+\frac{1}{|Z|}\varphi u$. Entonces $\alpha_{M,Q}\left(u,\frac{Z}{|Z|}\right)=0$, lo cual indica que M es totalmente geodésica. □

Teorema 3.13. *Si $M\subset\mathbb{Q}_c^3$ es una superficie inmersa isométricamente, conexa, con ángulo constante y de curvatura media constante, entonces M es una superficie totalmente umbílica o una superficie totalmente geodésica en $\mathbb{Q}_c^3$.*

Demostración. Si $\langle Z, T\rangle \neq 0$ y $\langle Z, \xi\rangle \neq 0$, aplicando el Corolario 3.11 se tiene que $|Z|$ es constante en M. Pero $|Z|$ es constante sólo en las superficies ortogonales a Z las cuales son totalmente umbílicas ya que Z es cerrado y conforme. Ahora, $\langle Z, T\rangle = 0$ implica que M es ortogonal a Z y con ello una superficie totalmente umbílica. Finalmente, si $\langle Z, \xi\rangle = 0$ implica que Z es tangente a M y por la Proposición 3.12 se concluye que M es una superficie totalmente geodésica en $\mathbb{Q}_c^3$. □

La siguiente sección fue realizada en coordinación con Antonio J. Di Scala y Gabriel Ruiz Hernández y se encuentra basada en el artículo «*Helix Surfaces in Euclidean spaces*». (véase [1])

3.3 Superficies en Espacios modelo con $\langle Z, T\rangle$ constante.

Sea M una superficie orientada inmersa isométricamente en $\mathbb{Q}_c^3$ con la propiedad de que $\langle Z, T\rangle = b$ es una función constante sobre M. Aquí Z es un campo cerrado y conforme y T es la componente tangente unitaria de Z relativa a M, es decir:

(8). $$Z = \langle Z, T\rangle T + \langle Z, \xi\rangle \xi.$$

Donde ξ es un campo unitario ortogonal a M. Se considerará W como un campo local de M, con la propiedad de que $\{T, W\}$ es una base ortonormal orientada de TM.

Proposición 3.14. *Bajo las condiciones antes mencionadas, se tiene que la conexión ∇, el operador de forma A_ξ y la segunda forma fundamental α de M satisfacen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \alpha(T,T) &= -\frac{\varphi}{\langle Z, \xi\rangle}\xi & \alpha(T,W) &= 0 \\ A_\xi T &= -\frac{\varphi}{\langle Z, \xi\rangle} T & \nabla_W T &= \frac{\varphi W + \langle Z, \xi\rangle A_\xi W}{\langle Z, T\rangle} \\ \nabla_T T &= 0 & \nabla_T W &= 0. \end{aligned}$$

En particular, T y W son direcciones principales de la inmersión y las curvas integrales de T son geodésicas de M.

Demostración. Derivando la expresión $\langle Z, T\rangle = b$ en la dirección de $X \in \Gamma(TM)$, se obtiene

$$\varphi\langle X, Z\rangle + \langle Z, D_X T\rangle = \varphi\langle X, Z\rangle + \langle Z, \alpha(X,T)\rangle = 0.$$

De la ecuación (8) se deduce que

$$\alpha(X,T) = -\frac{\varphi\langle X, T\rangle}{\langle Z, \xi\rangle}\xi.$$

En particular se tiene que $\alpha(T,W) = 0$, $\alpha(T,T) = -\frac{\varphi}{\langle Z, \xi\rangle}\xi$ y $A_\xi(T) = -\frac{\varphi}{\langle Z, \xi\rangle}T$. Esto indica que T y W son direcciones principales.

Para finalizar, derivando la ecuación (8) se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi X &= \langle Z,T\rangle D_X T + (X\langle Z,\xi\rangle)\xi + \langle Z,\xi\rangle D_X\xi \\ &= \langle Z,T\rangle(\nabla_X T + \alpha(X,T)) + (X\langle Z,\xi\rangle)\xi - \langle Z,\xi\rangle A_\xi X.\end{aligned}$$

Observando que la parte tangente de la ecuación anterior es $\varphi X = \langle Z,T\rangle\nabla_X T - \langle Z,\xi\rangle A_\xi X$ y del hecho que T, W son direcciones principales se concluye que

$$\nabla_T T = 0 \qquad \nabla_W T = \frac{\varphi W + \langle Z,\xi\rangle A_\xi W}{\langle Z,T\rangle}.$$

□

Corolario 3.15. *Si M tiene curvatura media constante en $\mathbb{Q}^3_c$ y satisface que $\langle Z,T\rangle$ es constante, con vector de curvatura media dado por $H = \alpha(T,T) + \alpha(W,W) = a\xi$, entonces*

$$A_\xi W = \left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\right)W;\ \ \alpha(W,W) = \left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\right)\xi;\ \ \nabla_W W = -\frac{2\varphi + a\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,T\rangle}T.$$

Demostración. Con ayuda de la proposición 3.14 se deduce que

$$\begin{aligned}\langle A_\xi W,W\rangle &= \langle\alpha(W,W),\xi\rangle &= a - \langle\alpha(T,T),\xi\rangle &= a + \tfrac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle} \\ \nabla_W W &= \langle\nabla_W W,T\rangle T &= -\langle W,\nabla_W T\rangle T &= -\tfrac{2\varphi + a\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,T\rangle}T.\end{aligned}$$

□

A partir de aquí se asumirá que el campo cerrado y conforme Z satisface la relación $c|Z|^2 + \varphi^2 = 1$, enunciada en la Proposición 1.24. Además se asumirá que el vector de curvatura media de M está dado por la expresión del corolario anterior.

Corolario 3.16. *(Laplaciano extrínseco) Sea M una superficie inmersa isométricamente en $\mathbb{Q}^3_c$, con $\langle Z,T\rangle$ constante y curvatura media constante, entonces*

$$\Delta_M\langle Z,\xi\rangle = \frac{-2\varphi^2 - 3a\varphi\langle Z,\xi\rangle - a^2\langle Z,\xi\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle}.$$

Demostración. Por la proposición 3.1 la siguiente ecuación es cierta

$$\Delta_M\langle Z,\xi\rangle = -|\alpha|^2\langle Z,\xi\rangle - 2\varphi\langle H,\xi\rangle.$$

Dado que $2H = \alpha(T,T) + \alpha(W,W) = a\xi$ y $-2\varphi\langle H,\xi\rangle = -a\varphi$ se tiene

$$\begin{aligned}|\alpha|^2 &= |\alpha(T,T)|^2 + |\alpha(W,W)|^2 + 2|\alpha(T,W)|^2 \\ &= |\alpha(T,T)|^2 + |\alpha(W,W)|^2 = \frac{\varphi^2}{\langle Z,\xi\rangle^2} + \left(a + \frac{\varphi}{\langle Z,\xi\rangle}\right)^2.\end{aligned}$$

Entonces $-|\alpha|^2\langle Z,\xi\rangle = \dfrac{-2\varphi^2 - 2a\varphi\langle Z,\xi\rangle - a^2\langle Z,\xi\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle}$.

Más aún, $\Delta_M\langle Z,\xi\rangle = \dfrac{-2\varphi^2 - 3a\varphi\langle Z,\xi\rangle - a^2\langle Z,\xi\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle}$. □

Corolario 3.17. *(Laplaciano intrínseco) Sea M una superficie inmersa isométricamente en $\mathbb{Q}_c^3$, con $\langle Z,T\rangle$ constante y de curvatura media constante, entonces*

$$\triangle_M\langle Z,\xi\rangle \;=\; \langle Z,T\rangle\frac{\langle Z,\xi\rangle^2(D_T\varphi)-\varphi^2\langle Z,T\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^3}+\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}.$$

Usando que $c|Z|^2+\varphi^2=1$, se obtiene que

$$\triangle_M\langle Z,\xi\rangle \;=\; \frac{(c\langle Z,T\rangle^2-1)\langle Z,T\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle^3}+\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}.$$

Demostración. La fórmula intrínseca del laplaciano es

$$\triangle_M\langle Z,\xi\rangle \;=\; T\cdot T\langle Z,\xi\rangle+W\cdot W\langle Z,\xi\rangle-\nabla_T T\langle Z,\xi\rangle-\nabla_W W\langle Z,\xi\rangle.$$

En este caso $W\langle Z,\xi\rangle=0$ y $\nabla_T T=0$, entonces la fórmula anterior queda expresada como

$$\triangle_M\langle Z,\xi\rangle \;=\; T\cdot T\langle Z,\xi\rangle-\nabla_W W\langle Z,\xi\rangle.$$

Dado que $T\langle Z,\xi\rangle=-\langle Z,A_\xi T\rangle=-\langle Z,T\rangle\langle T,A_\xi T\rangle=\frac{\langle Z,T\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}\varphi$. Entonces

$$T\cdot T\langle Z,\xi\rangle \;=\langle Z,T\rangle\frac{\langle Z,\xi\rangle(T\cdot\varphi)-\varphi^2\frac{\langle Z,T\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}}{\langle Z,\xi\rangle^2}\;=\langle Z,T\rangle\frac{\langle Z,\xi\rangle^2(T\cdot\varphi)-\varphi^2\langle Z,T\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^3}.$$

$$-\nabla_W W\langle Z,\xi\rangle \;=\frac{2\varphi+a\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,T\rangle}T\cdot\langle Z,\xi\rangle\;=\frac{2\varphi+a\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}\varphi=\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}.$$

Más aún $\triangle_M\langle Z,\xi\rangle=\langle Z,T\rangle\frac{\langle Z,\xi\rangle^2(D_T\varphi)-\varphi^2\langle Z,T\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^3}+\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}$.

Por la Proposición 1.24, $D_T\varphi=-c\langle Z,T\rangle$. Sustituyendo

$$\begin{aligned}\triangle_M\langle Z,\xi\rangle &= \langle Z,T\rangle\frac{\langle Z,\xi\rangle^2(D_T\varphi)-\varphi^2\langle Z,T\rangle}{\langle Z,\xi\rangle^3}+\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}\\ &= \frac{-c\langle Z,\xi\rangle^2-\varphi^2}{\langle Z,\xi\rangle^3}\langle Z,T\rangle^2+\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\mathrm{xi}\rangle}\\ &= \frac{(c\langle Z,T\rangle^2-1)\langle Z,T\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle^3}+\frac{2\varphi^2+a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}.\end{aligned}$$

□

Corolario 3.18. *Sea M una superficie inmersa isométricamente en $\mathbb{Q}_c^3$, con $\langle Z,T\rangle$ constante y de curvatura media constante, entonces la restricción de $|Z|$ a M es una función constante.*

Demostración. Aplicando el Corolario 3.17 se obtiene

$$\frac{(c\langle Z,T\rangle^2-1)\langle Z,T\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle^3}+\frac{4\varphi^2+a^2\langle Z,\xi\rangle^2}{\langle Z,\xi\rangle} \;=\; \frac{-4a\varphi\langle Z,\xi\rangle}{\langle Z,\xi\rangle}.$$

Multiplicando por $\langle Z,\xi\rangle^3$,

$$(c\langle Z,T\rangle^2-1)\langle Z,T\rangle^2+(4\varphi^2+a^2\langle Z,\xi\rangle^2)\langle Z,\xi\rangle^2 \;=\; (-4a\varphi\langle Z,\xi\rangle)\langle Z,\xi\rangle^2.$$

Hay que observar que $\varphi^2 = 1 - c\langle Z, T\rangle^2 - c\langle Z, \xi\rangle^2$, lo cual resulta de aplicar la igualdad $|Z|^2 = \langle Z, T\rangle^2 + \langle Z, \xi\rangle^2$.

Al sustituir el valor de φ^2 en la igualdad arriba mencionada y elevando al cuadrado se obtiene un polinomio en la variable $\langle Z, \xi\rangle$ denotado por $P(\langle Z, \xi\rangle)$. El término constante en $P(\langle Z, \xi\rangle)$ es $a_0 = (c\langle Z, T\rangle^2 - 1)^2\langle Z, T\rangle^4$.

Obsérvese que si $c = -1$ la constante a_0 no es cero si y sólo si $\langle Z, T\rangle \neq 0$. En el caso de que $c = 1$ la constante a_0 no es cero si y sólo si $\langle Z, T\rangle \neq 0, 1$. Esto implica que algún término de grado mayor o igual que uno de $P(\langle Z, \xi\rangle)$ no es cero. De otra manera $(c\langle Z, T\rangle^2 - 1)^2\langle Z, T\rangle^4$ sería cero. Esto prueba que $\langle Z, \xi\rangle$ satisface un polinomio no cero de grado mayor o igual que uno. Así $\langle Z, \xi\rangle$ es constante y entonces $|Z|$es constante en M por que $\langle Z, T\rangle$ es constante y $|Z|^2 = \langle Z, T\rangle^2 + \langle Z, \xi\rangle^2$. □

Teorema 3.19. *Si $M \subset \mathbb{Q}^3_c$ es una superficie conexa inmersa isométricamente con $\langle Z, T\rangle$ constante y de curvatura media constante, entonces M es una superficie totalmente umbílica de $\mathbb{Q}^3_c$ ortogonal a Z.*

Demostración. Si $\langle Z, T\rangle \neq 0$ y $\langle Z, \xi\rangle \neq 0$, por el Corolario 3.18 $|Z|$ es constante en M. Pero $|Z|$ es constante sólo en las superficies ortogonales a Z las cuales son totalmente umbílicas por ser Z cerrado y conforme. Ahora $\langle Z, T\rangle = 0$ implica que M es ortogonal a Z y más aún M es totalmente umbílica. Finalmente, si $\langle Z, \xi\rangle = 0$ implica que Z es tangente a M. Por la ecuación (8) se tiene que $|Z| = |\langle Z, T\rangle|$ es constante a lo largo de M. Pero esto sólo es posible si M es ortogonal a Z. En tal caso M debe ser una superficie totalmente umbílica. □

3.4 Aplicaciones a superficies de ángulo constante en $\mathbb{R}^4$.

Lema 3.20. *Sea $M \subset \mathbb{R}^4$ una superficie inmersa isométricamente. Suponiendo que M está contenida en la esfera unitaria $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$. Si M tiene vector de curvatura media paralelo en $\mathbb{R}^4$ entonces M tiene curvatura media constante en $\mathbb{S}^3$.*

Demostración. Dadas las inmersiones isométricas $M \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, se denotará por α_M, α_S, α a las segundas formas fundamentales de $M \subset \mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ y $M \subset \mathbb{R}^4$ respectivamente. De manera similar se usará la notación H_M, H_S y H para denotar los vectores de curvatura media de las inmersiones respectivas. Hay que observar que H_M es constante por hipótesis. Lo que a continuación se demostrará es que $\langle H_M, H_M\rangle$ es constante en M:

Sea $x \in M \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ algún punto y $X, Y \in T_pM$ cualesquiera dos vectores tangentes. sabemos que $\alpha_S(X, Y) = -\langle X, Y\rangle x$ y que $\alpha_M(X, Y) = \alpha(X, Y) + \alpha_S(X, Y)$, más aún, que $\alpha_M(X, Y) = \alpha(X, Y) - \langle X, Y\rangle x$, esta última relación implica la siguiente ecuación acerca del vector de curvatura media:

$$H_M = H - x.$$

En particular $\langle H_M(x), x\rangle = \langle H(x), x\rangle - 1 = -1$ porque $H(x)$ es tangente a $\mathbb{S}^3$ y x es ortogonal al $\mathbb{S}^3$. Por último obsérvese los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}\langle H_M(x), H_M(x)\rangle &= \langle H(x), H\rangle + 1 - 2\langle H(x), x\rangle \\ &= \langle H(x), H(x)\rangle + 1.\end{aligned}$$

De lo que se deduce que H_M es de longitud constante, esto por la hipótesis de que H es constante. $\square$

Teorema 3.21. *(Bang-yen Chen)(véase [2])Sea M una superficie inmersa isométricamente en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con vector de curvatura media paralelo. Entonces M es alguna de las siguientes superficies:*

i. Una superficie mínima de $\mathbb{R}^n$,

ii. Una superficie mínima de una hiperesfera de $\mathbb{R}^n$ ó

iii. Una superficie en un espacio afín $\mathbb{R}^n$, por lo tanto, ya sea en $\mathbb{R}^{n-1}$ o en una hiperesfera de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.22. *Una superficie de $\mathbb{R}^4$ con vector de curvatura media paralelo cuyo espacio tangente forma un ángulo constante $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ con respecto a un vector fijo es totalmente geodésica ó un subconjunto abierto de un cilindro de revolución.*

Demostración. Por el Teorema anterior se tienen tres posibilidades:

i. Si M es una superficie mínima de $\mathbb{R}^4$, entonces debe ser parte de un plano.

ii. Si M es una superficie mínima de una 3-esfera de $\mathbb{R}^4$ entonces M es un $\mathbb{S}^2$(máximo) en un $\mathbb{S}^3$, o dicho de otra forma, es un «ecuador» de la 3-esfera, el cual como ya es sabido es totalmente geodésico.

iii. Si M está contenida en un $\mathbb{R}^3$ entonces M debería ser un plano o un cilindro de revolución. Si M está contenida en un $\mathbb{S}^3$ entonces M es una superficie con $\langle Z, T\rangle$ constante: aquí Z es la parte tangente de la dirección de M. Por la Proposición 1.24 Z es cerrado y conforme en $\mathbb{S}^3$. Por el Lema 3.20 M es una superficie con curvatura media constante en $\mathbb{S}^3$ con $\langle Z, T\rangle$ constante, donde T es la componente tangente de Z en M.

    Finalmente, por el Teorema 3.19 , M es una superficie totalmente umbílica en $\mathbb{S}^3$ y ortogonal a Z. Entonces M es la intersección de un hiperplano $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^4$ contenido en $\mathbb{S}^3$, con $\mathbb{S}^3$, esto es, M es una superficie de curvatura media constante contenida en $\mathbb{R}^3$. Pero por hipótesis $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto este caso no es posible.

Luego M es totalmente geodésica ó un subconjunto abierto de un cilindro de revolución. $\square$

Bibliografía

[1]. C. Barrera, A. J. Di Scala, G. Ruiz-Hernández, *Helix surfaces in Euclidean spaces*, versión preliminar.

[2]. B. Y. Chen, *On the surface with parallel mean curvature vector,* Indiana Univ. Math. J, 22 (1973), 655-666.

[3]. M. Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions*. Mathematics Lecture Series, 13. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.

[4]. M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory and applications, Birkhäuser Boston (1992)

[5]. E. Garnica, O. Palmas, G. Ruiz-Hernández, *Classification of constant angle hypersurfaces in warped products via eikonal functions*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **18** (2012) 29-41.

[6]. E. Garnica, O. Palmas, G. Ruiz-Hernández, *Hypersurfaces with a canonical principal direction*, Diff. Geom. and its App. **30** (2012) 382-391.

[7]. S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math J.**48**(2)(1999) 711-748.

[8]. B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, Inc 1966.

[9]. D. Rolfsen, *Knots and links*. Providence, Rhode Island : AMS, 2003.

[10]. H. Sánchez, O. Palmas, *Geometría riemanniana*, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias(2007).

[11]. Y. Xin, *Minimal submanifolds and related topics*, World Scientific, Nankai Tracts in Mathematics 8 (2003).