



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DESIGUALDAD DE GIBBONS-PENROSE PARA SUPERFICIES EN EL ESPACIO
DE SCHWARZSCHILD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
FERNANDO VALDEZ ORTEGA

DIRECTOR
GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
[INSTITUTO DE MATEMÁTICAS](#)

CIUDAD DE MÉXICO 09/01/2019

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM PAPIIT IN 115017 Geometría Diferencial de Subvariedades III. Agradezco a DGAPA-UNAM la beca recibida, a mi familia y a mis sinodales que con paciencia y esmero revisaron mi tesis. En especial agradezco al Doctor Oscar Alfredo Palmas Velasco por sus amplias observaciones que ayudaron a nutrir de manera considerable este trabajo.

Desigualdad de Gibbons-Penrose para superficies en el espacio de Schwarzschild

Fernando Valdez Ortega

Índice general

Introducción	v
1. Geometría Lorentziana	1
1.1. Variedades de Lorentz	1
1.1.1. Carácter causal de subespacios tangentes	2
1.2. Conceptos importantes de geometría	7
1.2.1. Campo vectorial de Killing	7
1.2.2. Tensor de curvatura y curvatura de Ricci	9
2. Geometría extrínseca	11
2.1. Hipersuperficies no degeneradas	11
2.1.1. Hipersuperficies totalmente geodésicas	12
2.1.2. Hipersuperficies totalmente umbílicas	13
2.2. Campo vectorial de curvatura media	16
2.3. Productos alabeados	18
2.4. Espacios estáticos	20
3. Espacio de Schwarzschild	23
3.1. Construcción de la métrica de Schwarzschild	25
3.2. Espacio de anti-deSitter-Schwarzschild	29
4. Desigualdad de Gibbons-Penrose	33
4.1. Desigualdad sobre el espacio de Minkowski	33
4.2. Desigualdad sobre el espacio de Schwarzschild	37
4.3. Condiciones para la desigualdad	39
4.3.1. Σ encajada a una hipersuperficie espacial totalmente geodésica	39
4.3.2. Σ encajada a una hipersuperficie espacial totalmente umbílica	41
4.3.3. Σ encajada a una hipersuperficie nula	54

4.3.4. Σ encajada a una hipersuperficie temporal estática convexa	58
--	----

Bibliografía	69
---------------------	-----------

Introducción

En 1973 R. Penrose presentó un argumento en el que expresó que la masa total de espacio-tiempo que contiene un hoyo negro con horizonte de eventos de área total A debería de ser por lo menos $\sqrt{A/16\pi}$. Lo que en principio parecería una aseveración solamente física, se transforma en una variedad de hermosas desigualdades en geometría lorentziana como es el caso de la llamada desigualdad de Penrose.

Dicha desigualdad puede ser escrita desde un punto de vista geométrico como sigue.

Desigualdad Riemanniana de Penrose. *Sea (M^3, g) una 3-variedad riemanniana completa con curvatura escalar no negativa que es armónicamente plana en el infinito con masa total m y con superficie mínima extrema exterior Σ de área A . Entonces*

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$$

donde la igualdad se cumple si y solo si (M^3, g) es isométrico a la variedad de Schwarzschild $(\mathbb{R}^3 - \{0\}, (1 + \frac{m}{2|x|})^4 \delta_{ij})$ fuera de su respectiva superficie mínima extrema exterior.

En esta tesis se exponen los resultados obtenidos en [1] por Simon Brendle y Mu-Tao Wang. En [1] se presenta primero dos conjetas respecto a la desigualdad de Penrose para 2-superficies espaciales, cerradas, orientables, difeomorfas a S^2 y encajadas en diferentes espacios ambiente. Primero se supone una 2-superficie Σ encajada en el *espacio de Minkowski*. Además, si Σ es convexa y nula al pasado, en el sentido de que la hipersuperficie nula al pasado generada por Σ es C^∞ , entonces se satisface

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, T_0 \rangle d\mu \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|} \quad (1)$$

donde $T_0 \in \mathbb{R}_1^4$ es un vector temporal dirigido al futuro tal que $\langle T_0, T_0 \rangle = -1$.

Segundo, se supone a Σ encajada en el *espacio de Schwarzschild*. Si la hipersuperficie nula al pasado generada por Σ es C^∞ , entonces la siguiente

desigualdad es cierta

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}, \quad (2)$$

donde m es la masa total del espacio de Schwarzschild.

Por último se presenta la parte principal, un teorema que nos da las condiciones bajo las cuales se satisface la desigualdad (2). Aquí nuevamente se supone que Σ es difeomorfa a S^2 , espacial, estrellada y *semi-convexa*, además está encajada en una hipersuperficie N en el espacio de Schwarzschild de dimensión 4. Entonces la desigualdad (2) se cumple en los siguientes casos: 1) que N sea espacial totalmente geodésica; 2) que N sea espacial totalmente umbílica; 3) que N sea nula y por último; 4) que N sea temporal *estática convexa*.

Por lo que el objetivo de esta tesis es el de desarrollar a detalle este teorema para lo cual nos armaremos de las herramientas necesarias para dicho cometido.

En el primer capítulo iniciamos con un breve repaso referente de la geometría lorentziana, que es la geometría que se usará en este trabajo. Se recuerda definiciones como: forma bilineal, índice, métrica de Lorentz y, por supuesto, variedad de Lorentz. Así también se aborda el carácter causal de los vectores y subespacios tangentes junto con algunas caracterizaciones y propiedades de estos últimos. Al final de la sección se expone lo esencial de ciertos conceptos que necesitaremos durante el desarrollo de este trabajo, los cuales son: campo vectorial Killing y tensor de curvatura.

En el capítulo dos abordamos temas referentes a la geometría extrínseca tales como las hipersuperficies totalmente geodésicas y totalmente umbílicas. De las cuales recordamos la definición y propiedades que usaremos más adelante. Además se expone el campo vectorial de curvatura media que es uno de los conceptos fundamentales de este trabajo. En las últimas secciones de este capítulo se desarrollan dos temas importantes que serán de mucha ayuda para construir la *métrica de Schwarzschild* en el siguiente capítulo. Primero están los productos alabeados, que nos dan la geometría de una variedad producto en términos de sus componentes y de una cierta función de valores reales. Por último vienen los espacios estáticos, que es una de las particularidades del espacio de Schwarzschild, en el cual se supone una fuente de gravedad estática.

En el capítulo tres nos enfocamos en el *espacio de Schwarzschild*, explicamos la construcción de su métrica y las características más importantes de este espacio. Nos estaremos apoyando de manera importante en los conceptos expuestos en las sección anterior. En la última sección se da una breve introducción al *espacio de anti-deSitter-Schwarzschild*. Aquí también se presenta

un teorema que nos proporciona una desigualdad para una hipersuperficie de dimensión tres en el espacio de anti-deSitter-Schwarzschild. Esto último puede ser consultado en [2] realizado por Simon Brendle, Pei-Ken Hung y Mu-Tao Wang.

Finalmente en el capítulo cuatro, y último, iniciamos presentando la desigualdad de Penrose en dos diferentes espacios ambiente. Primero en el espacio de Minkowski como una forma de introducción a esta desigualdad. Luego se presenta la segunda conjetura; ahora en el espacio de dimensión cuatro. Esta será la desigualdad que nos interesará en este trabajo, y a la cual llamaremos *desigualdad de Gibbons-Penrose*. En la tercera sección se expone el teorema que nos dice bajo qué condiciones se satisface la desigualdad de Gibbons-Penrose. Aquí se supondrá que Σ está encajada en una hipersuperficie del espacio de Schwarzschild y veremos que la desigualdad se cumple si la hipersuperficie es:

- espacial totalmente geodésica,
- espacial totalmente umbílica,
- nula,
- estática convexa.

El teorema lo dividimos en cuatro casos distribuidos en cuatro subsecciones, una para cada caso..

Antes de comenzar con la exposición de esta tesis es necesario hacer algunas observaciones:

- La mayor parte de la teoría de los capítulos uno, dos y tres está basada en [3], por lo que la notación, definiciones, proposiciones y teoremas serán análogos. De cualquier forma en cada sección se irá fijando la notación que se utilizará. En el caso de varias demostraciones solo se darán referencias. Si se considera importante la demostración para el entendimiento de conceptos posteriores o no aparece explícitamente en la bibliografía consultada, entonces se realizará.
- En este trabajo se asumirá la teoría referente a la geometría lorentziana. Por ejemplo se omitirán conceptos como: variedades y funciones C^∞ (por ende se omitirá el símbolo C^∞ cada vez que se mencione el término variedad), campos vectoriales, conexión de Levi-Civita, tensores, gradiente, hessiano, divergencia, etcétera.
- La teoría expuesta se puede desarrollar de manera más general pero, para los efectos de este trabajo, solo se presenta la teoría específica

que usaremos. Ejemplos de esto son: variedades de Lorentz de dimensión cuatro, subvariedades de codimensión uno, 2-superficies espaciales, etcétera.

- Por último, a lo largo de este trabajo se usa la convención de suma de índices de Einstein y se intenta seguir en todo caso la misma; en algunas partes no será del todo conveniente usarla y se regresará a la notación usual o se hará una modificación de la misma. En caso que el acomodo de los índices no implique una suma implícita se hará la observación conveniente.

Capítulo 1

Geometría Lorentziana

1.1. Variedades de Lorentz

Nos enfocaremos básicamente en la geometría lorentziana, por lo que asumiremos gran parte de la teoría y solo se presentará lo esencial.

Ahora fijaremos notación que seguiremos en el resto de capítulos. Dado que se supondrá la teoría sobre variedades C^∞ , se omitirá el símbolo C^∞ cada vez que se mencione el término variedad. Se usará la letra M para denotar el espacio ambiente. Se usarán g y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar las *métricas* de las variedades.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita. Una *forma bilineal simétrica no degenerada* es una función

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para los vectores u, v y $w \in V$ y el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ satisface

- a) $b(u, v + \lambda w) = b(u, v) + \lambda b(u, w)$ (bilineal),
- b) $b(u, v) = b(v, u)$ (simétrica),
- c) si u es tal que $b(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ entonces $u = 0$. En caso contrario se dice degenerada.

Definición 1.2. El *índice* ν de una forma bilineal b sobre un espacio vectorial V es la dimensión del mayor subespacio $W \subset V$ tal que $b|_W$ es negativa definida.

Definición 1.3. Un *producto escalar* g en un espacio vectorial V , es una forma bilineal simétrica no degenerada.

Lema 1.4. Para cualquier base ortonormal v_1, \dots, v_n de V , el número de signos negativos en $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ es el índice ν de V , donde $\varepsilon_i = g(v_i, v_i)$.

En [3] se puede ver una demostración de este Lema.

Definición 1.5. Una métrica de Lorentz $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ en una variedad M es un campo tensorial de rango $(0, 2)$ tal que para cada $p \in M$, el tensor $g_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es simétrico no degenerado de índice constante $\nu = 1$.

Observación 1.6. A diferencia del caso riemanniano donde toda variedad admite una métrica Riemanniana (con índice $\nu = 0$), en el caso lorentziano no es así, no toda variedad admite una métrica de Lorentz.

Definición 1.7. Una variedad de Lorentz es una variedad M que admite una métrica de Lorentz.

Observación 1.8. La definición anterior se puede interpretar como que cada espacio tangente a una variedad de Lorentz $T_p(M)$ es linealmente isométrico al espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^n .

Definición 1.9. Una subvariedad de M es un subconjunto $N \subset M$ que es a su vez una variedad.

Observación 1.10. Una subvariedad de una variedad de Lorentz no necesariamente es una variedad de Lorentz.

1.1.1. Carácter causal de subespacios tangentes

A partir de ahora a M se le considera una variedad de Lorentz. Primero veremos el carácter causal de los vectores tangentes a M lo cual nos dará una idea de cómo definir el carácter causal de los subespacios de $T_p(M)$.

Definición 1.11. Un vector $v \in T_p(M)$ es:

$$\begin{aligned} &\text{tipo espacio o espacial} \quad \text{si} \quad \langle v, v \rangle > 0 \quad \text{o} \quad v = 0, \\ &\text{tipo luz o nulo} \quad \text{si} \quad \langle v, v \rangle = 0 \quad \text{y} \quad v \neq 0, \\ &\text{tipo tiempo o temporal} \quad \text{si} \quad \langle v, v \rangle < 0. \end{aligned}$$

Al conjunto de todos los vectores *nulos* se le conoce como el *cono de luz* \mathcal{C} (ver figura 1.1). Los vectores *tipo tiempo* forman otro conjunto al cual se le da el nombre de *cono tipo tiempo* \mathcal{T} .

Una base $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1}\}$ de $T_p(M)$ contiene un único campo vectorial tipo tiempo ∂_0 el cual divide a \mathcal{T} en dos clases ajenas llamadas *futuro* y *pasado*.

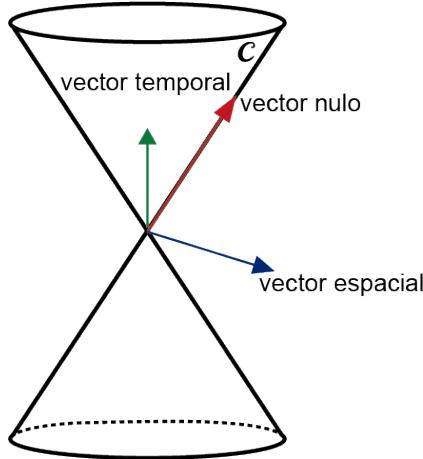


Figura 1.1: Cono de luz y tipos de vectores

Definición 1.12. Un vector $v \in T_p(M)$ se dice que está dirigido al *futuro* [*pasado*] si $\langle \partial_0(p), v \rangle < 0 [> 0]$. Ver [4] para más detalles.

Así como se definió la causalidad para los vectores de $T_p(M)$, también se puede definir para los subespacios vectoriales de $T_p(M)$ en términos de la métrica restringida.

Definición 1.13. Sea g la métrica de $T_p(M)$, y $W \subset T_p(M)$ un subespacio. Decimos que:

- W es tipo espacio o espacial si $g|_W$ es positiva definida,
- W es tipo luz o nulo si $g|_W$ es degenerada,
- W es tipo tiempo o temporal si $g|_W$ tiene índice uno.

Observación 1.14. Esta definición es consistente con la Definición 1.11 en el sentido que el carácter causal de un vector individual v es el mismo que el del subespacio generado por este.

Definición 1.15. Una subvariedad $N \subset M$ se dice que es *temporal*, *espacial* o *nula* si y solo si para todo $p \in N$ el espacio tangente $T_p(N)$ es temporal, espacial o nulo respectivamente (ver figura 1.2).

Antes de continuar con los resultados que nos serán útiles a lo largo de la tesis enunciaré un lema básico de álgebra lineal.

Lema 1.16. *Un subespacio W de un espacio vectorial con un producto escalar V es no degenerado si y solo si V es suma directa de W y W^\perp . Donde W^\perp denota el conjunto ortogonal de W .*

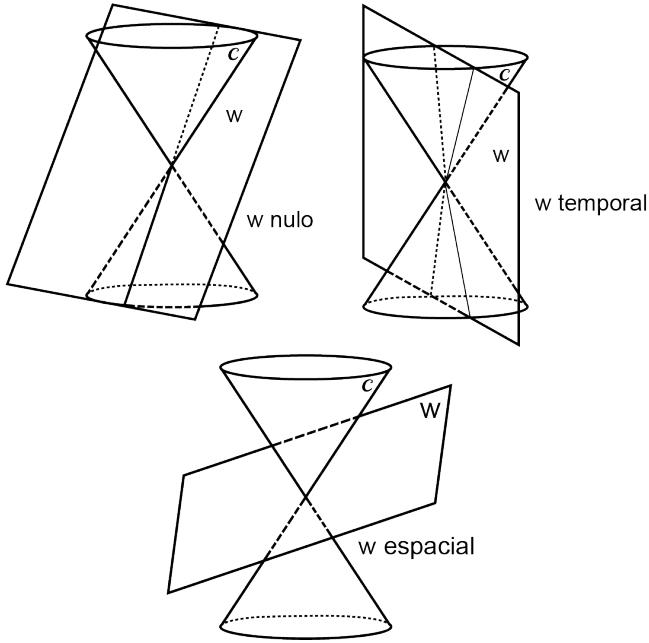


Figura 1.2: Carácter causal de los subespacios de $T_p(M)$

Algo menos trivial pero no difícil de demostrar es el siguiente lema que nos da la relación entre los espacios y sus espacios ortogonales respecto al carácter causal de cada uno.

Lema 1.17. *Sea $w \in T_p(M)$ un vector tipo tiempo y W el subespacio generado por este. Entonces el subespacio W^\perp es espacial y $T_p(M)$ es suma directa de W y W^\perp .*

Demostración. Si w es tipo tiempo entonces W es no degenerado con índice uno y esto es, por el Lema 1.16 , si y solo si W^\perp es no degenerado y $T_p(M)$ es suma directa de W y W^\perp . Entonces $1 = \text{ind}(T_p(M)) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$ esto implica que $\text{ind}(W^\perp) = 0$. Por lo tanto W^\perp es tipo espacio. \square

Observación 1.18. El Lema 1.17 muestra más generalmente que $W \subset T_p(M)$ es un subespacio tipo tiempo si y solo si W^\perp es tipo espacio.

Observación 1.19. Dado que $(W^\perp)^\perp = W$ entonces la Observación 1.18 es equivalente a escribir que $W \subset T_p(M)$ es un subespacio tipo espacio si y solo si W^\perp es tipo tiempo.

Lema 1.20. *Dos vectores nulos son ortogonales (que su producto interior es cero) si y solo si son linealmente dependientes.*

Proposición 1.21. *Sea W un subespacio de $T_p(M)$ de dimensión mayor o igual a dos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *W es temporal.*
- (2) *W contiene dos vectores nulos linealmente independientes.*
- (3) *W contiene un vector temporal.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Como W es temporal se tiene $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ una base ortonormal para W con $2 \leq m \leq n$, donde e_0 es un vector temporal. Definimos los vectores $e_0 + e_1$ y $e_0 - e_1$ los cuales satisfacen que $\langle e_0 + e_1, e_0 + e_1 \rangle = 0$ y $\langle e_0 - e_1, e_0 - e_1 \rangle = 0$ esto implica que son los vectores nulos buscados.

(2) \Rightarrow (3) Por el Lema 1.20 si u y v son vectores nulos linealmente independientes entonces $\langle u, v \rangle \neq 0$. Así

$$\langle u + v, u + v \rangle = 2\langle u, v \rangle.$$

Con lo cual, si $\langle u, v \rangle < 0$ el vector $u + v$ es temporal y en caso contrario $u - v$ es el vector temporal.

(3) \Rightarrow (1) Sea $w_0 \in W$ un vector temporal y W_0 lo generado por este vector. Entonces, por la Observación 1.18, W_0^\perp es espacial y además $W^\perp \subset W_0$ lo cual implica que W^\perp es espacial y por la Observación 1.19 concluimos que W es temporal. \square

Proposición 1.22. *Para un subespacio $W \subset T_p(M)$ con dimensión mayor o igual a dos, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) *W es nulo.*
- (2) *W contiene un vector nulo pero no un vector temporal.*
- (3) *La intersección de W con el cono de luz de $T_p(M)$ es $Z - \{0\}$ donde Z es un subespacio unidimensional.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Dado que W es nulo entonces $g|_W$ es degenerada, lo cual implica que existe un vector nulo en W . Ahora, si W contiene un vector temporal de la Proposición 1.21 se tendría que W es temporal, lo cual no puede pasar. Por lo tanto, W tiene un vector nulo pero no uno temporal.

(2) \Rightarrow (3) Supongamos que existen dos vectores nulos linealmente independientes v, w en W . Entonces $W \cap \mathcal{C} = Z - \{0\}$, donde $Z - \{0\}$ es el subespacio generado por v y w . Pero, por la proposición anterior, esto implica que $Z - \{0\}$ contiene un vector temporal lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $Z - \{0\}$ es generado solo por un vector nulo y en consecuencia es unidimensional.

(3) \Rightarrow (1) De la Definición 1.13 se deduce que si W es espacial entonces todos sus vectores son espaciales, lo cual no puede ocurrir puesto que $W \cap \mathcal{C}$ es no vacío. Por otra parte si W fuera temporal esto implicaría, por la Proposición 1.21, que W contiene dos vectores nulos linealmente independientes, pero esto contradice la unidimensionalidad de $Z - \{0\}$. Por lo tanto W es nulo. \square

Ahora supongamos que M es de dimensión cuatro. La siguiente proposición nos ayudará a mostrar que las expresiones de los vectores nulos, los cuales existen por la Proposición 1.21, en términos de una base de $T_p(\Sigma)$, donde Σ es una 2-superficie, y de $T_p(M)$ son expresiones continuas en cada punto $p \in \Sigma$. Lo cual será muy útil más adelante.

Proposición 1.23. *Sea Σ una 2-superficie tipo espacio encajada en M y $\beta = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ un marco ortonormal local de M alrededor de $p \in \Sigma$, con e_0 campo tipo tiempo. Entonces existen dos campos vectoriales nulos L y \underline{L} dirigidos al futuro y al pasado respectivamente, ortogonales a Σ y que pueden ser representados en términos de un marco ortonormal definido en un abierto $V \subset U \cap \Sigma$, donde U es un abierto de M en el cual β forma un marco ortonormal.*

Demostración. Dado el conjunto β , para cada campo e_i se tiene la descomposición

$$e_i = e_i^\top + e_i^\perp, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

donde e_i^\top y e_i^\perp denotan la parte tangente y normal a Σ respectivamente. Consideremos al conjunto $\beta_2 = \{e_0^\perp, e_1^\perp, e_2^\perp, e_3^\perp\} \subset T_p(\Sigma)^\perp$. Sea $w \in T_p(M)$ y lo expresamos en términos de β

$$w = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

Como $T_p(M)$ es suma directa de $T_p(\Sigma)$ y $T_p(\Sigma)^\perp$ entonces

$$w^\perp = a_0 e_0^\perp + a_1 e_1^\perp + a_2 e_2^\perp + a_3 e_3^\perp.$$

Al ser w^\perp un elemento arbitrario de $T_p(\Sigma)^\perp$ esto implica que $T_p(\Sigma)^\perp \subset \text{span}\{\beta_2\}$. Pero de la teoría básica del álgebra lineal sabemos que un conjunto con más de dos elementos en $T_p(\Sigma)^\perp$, que es de dimensión dos, es linealmente dependiente. Por lo que el conjunto β_2 tiene a lo más dos elementos linealmente independientes. Además, como $T_p(\Sigma)^\perp$ es tipo tiempo (por lo que contiene un vector tipo tiempo) y $\langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle = -1 - \langle e_0^\top, e_0^\top \rangle < 0$,

es decir que e_0^\perp es temporal, entonces e_0^\perp debe ser uno de estos elementos linealmente independientes, así

$$T_p(\Sigma)^\perp \subset \text{span}\{\beta_2\} = \text{span}\{e_0^\perp, e_j^\perp\}$$

para algún $j = 1, 2, 3$. Por lo que si e_0^\perp y e_j^\perp son colineales esto implicaría que $\dim(\text{span}\{e_0^\perp, e_j^\perp\}) = 1$, lo cual no puede ocurrir por la contención anterior y a la bidimensionalidad de $T_p(\Sigma)^\perp$.

Podemos aplicar el proceso de Gram-Schmidt a $\{e_0^\perp, e_j^\perp\}$ para obtener los vectores ortogonales

$$w_0 = e_0^\perp, \quad w_1 = e_j^\perp - \frac{\langle e_j^\perp, w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle} w_0.$$

Así, al hacerlos unitarios se forma el conjunto ortonormal compuesto por

$$E_0 = \frac{w_0}{|w_0|}, \quad E_1 = \frac{w_1}{|w_1|},$$

donde $|w_0| = \sqrt{-\langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle}$, para el cual existe un abierto $V \subset U \cap \Sigma$, alrededor de p , suficientemente pequeño tal que forma un marco ortonormal.

Finalmente, como $\langle E_0, E_0 \rangle = -1$ y $\langle E_1, E_1 \rangle = 1$ entonces los campos

$$L = E_0 + E_1 \quad y \quad \underline{L} = -E_0 + E_1$$

son nulos y ortogonales a Σ en V . Además que uno apunta al futuro y uno al pasado. \square

1.2. Conceptos importantes de geometría lorentziana

En esta sección se presentarán conceptos específicos referentes a la teoría general de la geometría lorentziana que serán utilizados en el desarrollo de esta tesis, por lo que es importante mencionarlos.

Como es costumbre, denotaremos por D a la conexión de Levi-Civita en M . El conjunto de todos los campos vectoriales en M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{F}(M)$ será el conjunto de todas las funciones de valores reales definidas en M .

1.2.1. Campo vectorial de Killing

El campo vectorial de Killing es uno de los conceptos más importantes de la geometría diferencial, y de este trabajo. Una de las razones es que puede ser

visualizado como una *isometría infinitesimal*, lo cual nos da una interpretación geométrica útil. También es un campo vectorial importante en la física ya que puede ser aplicado para definir *leyes de conservación*.

Definición 1.24. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$. El *corchete de Lie* de X y Y , denotado por $[X, Y]$, es el único campo vectorial tal que

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

Observación 1.25. Consideremos la conexión de Levi-Civita D de M . Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X.$$

Definición 1.26. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, la derivación tensorial L_X que satisface

$$\begin{aligned} L_X(f) &= X \cdot f && \text{para todo } f \in \mathfrak{F}(M) \\ L_X(V) &= [X, V] && \text{para todo } V \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

se le llama *derivada de Lie* en dirección de X .

Definición 1.27. Un campo vectorial X en una variedad de Lorentz M se dice que es de *Killing* si satisface que

$$L_X g = 0.$$

Proposición 1.28. *Un campo vectorial X es de Killing si y solo si*

$$\langle D_V X, W \rangle + \langle D_W X, V \rangle = 0$$

para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. El resultado se sigue de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (L_X g)(V, W) &= X \langle V, W \rangle - \langle L_X V, W \rangle - \langle V, L_X W \rangle \\ &= X \langle V, W \rangle - \langle [X, V], W \rangle - \langle V, [X, W] \rangle \\ &= \langle D_X V, W \rangle + \langle D_X W, V \rangle - \langle D_X V, W \rangle \\ &\quad + \langle D_V X, W \rangle - \langle D_X W, V \rangle + \langle D_W X, V \rangle \\ &= \langle D_V X, W \rangle + \langle D_W X, V \rangle. \end{aligned}$$

□

Observación 1.29. De la proposición anterior se deduce inmediatamente que

$$\langle D_V X, V \rangle = 0$$

para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$, si X es de Killing.

1.2.2. Tensor de curvatura y curvatura de Ricci

El tensor de curvatura es la generalización a variedades de Lorentz de la *curvatura gaussiana*. Este tensor es un importante invariante isométrico de una superficie en sí misma, por lo que se vuelve sobresaliente en la interpretación de la forma de una variedad.

Definición 1.30. Sea M variedad de Lorentz con conexión de Levi-Civita D . El $(1, 3)$ campo tensorial en M , $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

es llamado *tensor de curvatura* de M .

Proposición 1.31. Si $x, y, z, v, w \in T_p(M)$ entonces

- (1) $R_{xy} = -R_{yx}$,
- (2) $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$,
- (3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$,
- (4) $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$.

Una demostración de esta proposición se encuentra en [3].

Definición 1.32. Sea R el tensor de curvatura de M . Entonces la *curvatura de Ricci* de M relativo a un marco ortonormal $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de $T_p(M)$, es

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R_{XE_i}Y, E_i \rangle$$

donde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$.

Observación 1.33. La definición formal de curvatura de Ricci se da en términos de *contracciones* y la anterior definición es un resultado. Pero para los objetivos de este trabajo es suficiente esta interpretación.

Observación 1.34. De las propiedades del tensor de curvatura se deduce que la curvatura de Ricci es simétrica, es decir

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X).$$

También la curvatura de Ricci es muy útil para interpretar la forma de las variedades. De manera específica, en física la curvatura de Ricci mide la curvatura del espacio-tiempo. Por lo que una consecuencia de esto es que un espacio-tiempo vacío (no hay gravedad) es aquel cuya curvatura de Ricci es cero. De esta interpretación se deriva la siguiente definición.

Definición 1.35. Una variedad de Lorentz M se dice que es *Ricci-plana* si su curvatura de Ricci es cero.

Capítulo 2

Geometría extrínseca

2.1. Hipersuperficies no degeneradas

Ahora nos centraremos en el estudio de dos tipos de subvariedades de M , las totalmente geodésicas y totalmente umbílicas. En las cuales se satisfacen ciertas propiedades útiles para la realización de este trabajo, como se verá en el capítulo cuatro.

Definición 2.1. Una *hipersuperficie* es una subvariedad N de una variedad de Lorentz M con codimensión igual a uno.

Definición 2.2. Una hipersuperficie es *no degenerada* si es tipo espacio o tipo tiempo.

Observación 2.3. De aquí en adelante se considerarán hipersuperficies no degeneradas, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2.4. Se dice que un campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ es una *extensión* de $X \in \mathfrak{X}(N)$ si la restricción $\tilde{X}|_N = X$.

De ahora en adelante se denotará de la misma forma a un campo vectorial y a su extensión. Siempre teniendo en mente en qué momento se trata de uno o del otro.

Definición 2.5. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ y $p \in N$. A la fórmula

$$D_X Y|_p = (D_X Y)|_p^\top + (D_X Y)|_p^\perp$$

se le llama *ecuación de Gauss*.

Definición 2.6. Se le llama *segunda forma fundamental* de $N \subset M$ a la parte normal de la ecuación de Gauss y la denotamos como

$$II(X, Y) = (D_X Y)^\perp.$$

Observación 2.7. La parte tangente de la ecuación de Gauss resulta ser la conexión de Levi-civita de N con la métrica inducida, es decir;

$$(D_X Y)^\top = \nabla_X Y.$$

Observación 2.8. Dada una base ortonormal E_1, E_2, \dots, E_n de $T_p(N)$ y U un campo vector normal unitario de N , se tienen las siguientes igualdades

$$h_{ij} = \langle U, II(E_i, E_j) \rangle = \langle U, (D_{E_i} E_j)^\perp \rangle = \langle U, D_{E_i} E_j \rangle.$$

En algunos textos suelen definir como segunda forma fundamental a h_{ij} .

Proposición 2.9. *La segunda forma fundamental $II : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)^\perp$ es $\mathfrak{F}(N)$ -bilineal y simétrica.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$. Como $D_X Y$ es $\mathfrak{F}(N)$ -lineal en X entonces

$$II(fX, Y) = (D_{fX} Y)^\perp = f(D_X Y)^\perp = fII(X, Y).$$

Por otra parte, tenemos que

$$D_X(fY) = (X \cdot f)Y + fD_X Y,$$

pero Y es tangente a N , así

$$II(X, fY) = (D_X fY)^\perp = 0 + f(D_X Y)^\perp = fII(X, Y).$$

Finalmente, del hecho de que $[X, Y]$ es tangente a N concluimos

$$II(X, Y) - II(Y, X) = (D_X Y - D_Y X)^\perp = ([X, Y])^\perp = 0.$$

□

2.1.1. Hipersuperficies totalmente geodésicas

Definición 2.10. Una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ en una variedad de Lorentz M se llama *geodésica* si $D_{\gamma'} \gamma' = 0$.

Definición 2.11. Una hipersuperficie N de M es *totalmente geodésica* si $II = 0$.

Proposición 2.12. *N es totalmente geodésica si y solo si cada geodésica de N es geodésica de M .*

Demostración. Sea $p \in N$ y $\gamma \subset N$ una geodésica. Por definición 1.20 y la ecuación

$$D_{\gamma'} \gamma'|_p = \nabla_{\gamma'} \gamma'|_p + II(\gamma', \gamma')|_p$$

se concluye que N es totalmente geodésica si y solo si γ es geodésica de M . □

2.1.2. Hipersuperficies totalmente umbílicas

Definición 2.13. Un punto $p \in N \subset M$ es *umbílico* si existe un vector normal $z \in T_p(N)^\perp$ tal que

$$II(x, y) = \langle x, y \rangle z$$

para todo $x, y \in T_p(N)$.

Definición 2.14. Una hipersuperficie N de M es *totalmente umbílica* si todo punto p de N es umbílico.

Definición 2.15. Sea U un campo vectorial normal unitario en una hipersuperficie N de M . El $(1, 1)$ -tensor A en M tal que

$$\langle A(X), Y \rangle = \langle II(X, Y), U \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, se le llama *operador de forma* de $N \subset M$ derivado de U .

Observación 2.16. Para todo $x, y \in T_p(N)$,

$$II(x, y) = \varepsilon \langle A(x), y \rangle U$$

donde $\varepsilon = \langle U, U \rangle$.

Observación 2.17. $A : T_p(N) \rightarrow T_p(N)$ define un operador lineal en cada punto p de N .

Proposición 2.18. *Sea A el operador de forma derivado de U y $X \in \mathfrak{X}(N)$. Las siguientes afirmaciones se satisfacen*

1. $A(X) = -D_X U$.
2. A es un operador lineal auto-adjunto en cada $p \in N$.

Demostración. 1. Como $\langle U, U \rangle = 1$, $\langle D_X U, U \rangle = 0$ esto implica que $D_X U$ es tangente a N para toda X . Dado $Y \in \mathfrak{X}(N)$, por la definición 1.26 y la compatibilidad de la métrica obtenemos

$$\langle A(X), Y \rangle = \langle II(X, Y), U \rangle = \langle D_X Y, U \rangle = -\langle D_X U, Y \rangle.$$

Por lo tanto $A(X) = -D_X U$.

2. Dado que II es simétrico se tiene

$$\langle A(x), y \rangle = \langle II(x, y), U \rangle = \langle II(y, x), U \rangle = \langle x, A(y) \rangle$$

para todo $x, y \in T_p(N)$. □

La siguiente proposición nos da la relación que hay entre las segundas formas fundamentales de las subvariedades encajadas en M .

Proposición 2.19. *Consideremos $\Sigma \subset N \subset M$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ entonces*

$$II_{\Sigma \subset M}(X, Y) = II_{\Sigma \subset N}(X, Y) + II_{N \subset M}(X, Y).$$

Demostración. Sean $U \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ y $\bar{U} \in \mathfrak{X}^\perp(N)$, así

$$II_{\Sigma \subset M}(X, Y) = \varepsilon \langle II_{\Sigma \subset M}(X, Y), U \rangle U + \bar{\varepsilon} \langle II_{\Sigma \subset M}(X, Y), \bar{U} \rangle \bar{U}$$

donde $\varepsilon = \langle U, U \rangle$ y $\bar{\varepsilon} = \langle \bar{U}, \bar{U} \rangle$.

Por la Definición 2.15 y Proposición 2.18 se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle II_{\Sigma \subset M}(X, Y), U \rangle U &= \varepsilon \langle D_X Y, U \rangle U \\ &= \varepsilon \langle Y, -\nabla_X U \rangle U \\ &= \varepsilon \langle A_U(X), Y \rangle U \\ &= \varepsilon \langle II_{\Sigma \subset N}(X, Y), U \rangle U \\ &= II_{\Sigma \subset N}(X, Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} \langle II_{\Sigma \subset M}(X, Y), \bar{U} \rangle \bar{U} &= \bar{\varepsilon} \langle D_X Y, \bar{U} \rangle \bar{U} \\ &= \bar{\varepsilon} \langle Y, -D_X \bar{U} \rangle \bar{U} \\ &= \bar{\varepsilon} \langle A_{\bar{U}}(X), Y \rangle \bar{U} \\ &= \bar{\varepsilon} \langle II_{N \subset M}(X, Y), \bar{U} \rangle \bar{U} \\ &= II_{N \subset M}(X, Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$II_{\Sigma \subset M}(X, Y) = II_{\Sigma \subset N}(X, Y) + II_{N \subset M}(X, Y).$$

□

La proposición que a continuación se presenta nos da un criterio para determinar cuando una hipersuperficie es totalmente umbílica utilizando el operador de forma y una base ortonormal de M .

Proposición 2.20. *Sea N una hipersuperficie espacial de M y $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de M , donde e_0 es ortogonal a N . Un punto $p \in N$ es umbílico si y solo si los valores propios del operador de forma en dirección de e_0 , son iguales en p .*

Demostración. Sean k_i con $i = 1, 2, \dots, n-1$ los valores propios del operador de forma de N . Dado que e_0 es ortogonal a N en un punto $p \in N$, esto implica que todo vector normal a N es paralelo a e_0 en p .

$\Rightarrow)$ Si N es umbílica, $II(x, y) = \langle x, y \rangle ae_0$ con $a \in \mathbb{R}$, así

$$\begin{aligned} k_i = \langle A(e_i), e_i \rangle &= \langle II(e_i, e_i), e_0 \rangle \\ &= \langle \langle e_i, e_i \rangle z, e_0 \rangle \\ &= \langle \langle e_i, e_i \rangle ae_0, e_0 \rangle \\ &= a \langle e_i, e_i \rangle \langle e_0, e_0 \rangle \\ &= -a. \end{aligned}$$

$\Leftarrow)$ Si $k = k_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Por la Observación 1.28 se obtiene

$$II(e_i, e_i) = -\langle A(e_i), e_i \rangle e_0 = -ke_0.$$

Ahora consideramos $x, y \in T_p(N)$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^{n-1} b_j e_j$$

donde $a_i = \langle x, e_i \rangle$ y $b_j = \langle y, e_j \rangle$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} II(x, y) &= -\langle A(x), y \rangle e_0 \\ &= -\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} a_i A(e_i), \sum_{j=1}^{n-1} b_j e_j \right\rangle e_0 \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n-1} a_i b_j \langle A(e_i), e_j \rangle e_0 \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n-1} a_i b_j \delta_{ij} k e_0 \\ &= -k \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle e_0 \\ &= -k \langle x, \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_i \rangle e_0 \\ &= -k \langle x, y \rangle e_0. \end{aligned}$$

Lo cual completa la demostración. \square

2.2. Campo vectorial de curvatura media

Uno de los campos más importantes en la geometría diferencial, y de este trabajo, es el campo de curvatura media, el cual nos da mucha información acerca de la forma de una variedad.

Definición 2.21. Consideremos $\Sigma \subset M$. Si $\dim(\Sigma) = d$ y $p \in \Sigma$ entonces definimos el *campo vectorial de curvatura media* como,

$$\vec{H}|_p = \text{tr}II(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i II(e_i, e_i)$$

donde e_1, e_2, \dots, e_d forman una base ortonormal de $T_p(\Sigma)$ para cada $p \in \Sigma$.

Por otra parte, si suponemos que Σ es espacial y de codimensión dos, por la Proposición 1.23, existen dos vectores independientes, nulos y ortogonales a Σ . Mostraremos que \vec{H} se puede escribir en términos de estos dos vectores.

Proposición 2.22. *Dados L y \underline{L} dos vectores nulos y normales a $\Sigma \subset M$, una subvariedad de codimensión dos, tales que $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$. Entonces el campo vectorial de curvatura media se puede expresar en términos de estos vectores como*

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(\langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L).$$

Demostración. Como la codimensión de $\Sigma \subset M$ es dos, vamos a demostrar que L y \underline{L} forman una base para $T_p(\Sigma^\perp)$. Dado que $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$, L y \underline{L} son linealmente independientes, entonces todo vector $v \in T_p(\Sigma^\perp)$ se puede expresar

$$v = b\underline{L} + aL$$

cuyas únicas soluciones son $a = \frac{\langle v, \underline{L} \rangle}{2}$ y $b = \frac{\langle v, L \rangle}{2}$. Por lo tanto, como \vec{H} es normal a Σ entonces lo podemos expresar de la siguiente manera

$$\vec{H} = \frac{\langle \vec{H}, L \rangle}{2} \underline{L} + \frac{\langle \vec{H}, \underline{L} \rangle}{2} L.$$

□

Ahora veremos cómo poder expresar el vector de curvatura media si la superficie está parametrizada, lo cual será muy útil en el capítulo cuatro.

Proposición 2.23. *Supongamos que Σ está parametrizada por $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Sigma \subset M$. Entonces, el vector de curvatura media de Σ puede ser expresado como*

$$\vec{H} = g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j - \langle g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j, F_k \rangle g_{\Sigma}^{kl} F_l$$

donde g_{Σ} representa la métrica de M restringida a Σ , g^{ij} denota a los coeficientes de la inversa de la matriz asociada a g y $F_i = \partial_i F$.

Demostración. Dada una base ortonormal e_1, e_2, \dots, e_d para $T_p(\Sigma)$, cada elemento de esta base lo podemos representar en términos de F_1, F_2, \dots, F_d de la siguiente manera

$$e_i = g_{\Sigma}^{ij} \langle e_i, F_j \rangle F_j.$$

De lo anterior y la bilinealidad de la segunda forma fundamental se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \varepsilon_i II(e_i, e_i) \\ &= \langle e_i, e_i \rangle II(g_{\Sigma}^{ij} \langle e_i, F_j \rangle F_j, g_{\Sigma}^{ik} \langle e_i, F_k \rangle F_k) \\ &= \langle e_i, e_i \rangle g_{\Sigma}^{ij} \langle e_i, F_j \rangle, g_{\Sigma}^{ik} \langle e_i, F_k \rangle II(F_j, F_k) \\ &= \langle \langle e_i, F_j \rangle e_i, \langle e_i, F_k \rangle e_i \rangle g_{\Sigma}^{ij} g_{\Sigma}^{ik} II(F_j, F_k) \\ &= g_{jk\Sigma} g_{\Sigma}^{ij} g_{\Sigma}^{ik} II(F_j, F_k) \\ &= \delta_{ik} g_{\Sigma}^{ij} II(F_j, F_k) \\ &= g_{\Sigma}^{ij} II(F_i, F_j). \end{aligned}$$

Por definición de la segunda forma fundamental, podemos escribir

$$\vec{H} = (g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j)^{\perp} = g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j - (g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j)^{\top},$$

por lo que basta con demostrar que

$$(g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j)^{\top} = \langle g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j, F_k \rangle g_{\Sigma}^{kl} F_l.$$

Para esto, consideramos F_m fijo, entonces

$$\begin{aligned} \langle \langle g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j, F_k \rangle g_{\Sigma}^{kl} F_l, F_m \rangle &= \langle g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j, F_k \rangle g_{\Sigma}^{kl} \langle F_l, F_m \rangle \\ &= \langle g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j, F_k \rangle \delta_{km} \\ &= \langle g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j, F_m \rangle \\ &= \langle (g_{\Sigma}^{ij} D_{F_i} F_j)^{\top}, F_m \rangle. \end{aligned}$$

□

Definición 2.24. Sea $\Sigma \subset N \subset M$ tal que Σ es una hipersuperficie respecto a N . Definimos al campo vectorial *conormal* como el campo vectorial unitario normal a Σ y tangente a N . Lo denominaremos por la letra ν .

Observación 2.25. De la Proposición 2.23 se deduce inmediatamente que $H = \langle \tilde{H}, \nu \rangle = g_{\Sigma}^{ij} \langle D_{F_i} F_j, \nu \rangle$ y si hacemos $h_{ij} = \langle D_{F_i} F_j, \nu \rangle$ como en la Observación 2.8, la *curvatura media* de Σ puede expresarse como

$$H = g_{\Sigma}^{ij} h_{ij}.$$

2.3. Productos alabeados

En esta sección trataremos con las variedades producto $M = A \times B$, donde A y B son variedades. En la teoría básica de la Geometría Diferencial se aborda la métrica en este tipo de variedades (la suma de las métricas de cada componente). Pero ahora veremos una forma particular de variedad producto, donde la métrica vendrá acompañada de una función definida en la primera componente, la cual es nombrada *función de forma*, y es a lo que llamaremos *producto alabeado*. La geometría de M podrá ser expresada en términos de la función de forma y las geometrías de A y B .

Definición 2.26. Sean (A, g_A) y (B, g_B) variedades de Lorentz y $f > 0$ una función definida en A . El *producto alabeado* $M = A \times_f B$ es la pareja $(A \times B, g)$ con

$$g = \pi^*(g_A) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_B)$$

donde π y σ son la proyecciones de $A \times B$ sobre A y B respectivamente. Y a la función f se la llama *función de forma*.

Observación 2.27. Explícitamente, si $u, v \in T_{(p,q)}(A \times B)$ entonces

$$g(u, v) = g_A(d\pi(u), d\pi(v)) + f^2(p)g_B(d\sigma(u), d\sigma(v)).$$

Definición 2.28. Llamaremos *hojas* a las variedades $A \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ y *fibras* a las variedades $\{p\} \times B = \pi^{-1}(p)$, para $(p, q) \in A \times_f B$.

Observación 2.29. Denotaremos por $\mathfrak{L}(A)$ al conjunto de todos los levantamientos sobre las hojas y $\mathfrak{L}(B)$ al conjunto de todos los levantamientos sobre las fibras.

Lema 2.30. Si $X \in \mathfrak{L}(A)$ y $V \in \mathfrak{L}(B)$ entonces $[X, V] = 0$.

Una demostración puede ser consultada en [3].

Observación 2.31. Del lema anterior se deduce que si $X \in \mathfrak{L}(A)$ y $V \in \mathfrak{L}(B)$ entonces $0 = [X, V] = D_X V - D_V X$. Lo cual quiere decir que X y V comutan respecto a la conexión de Levi-Civita D .

Observación 2.32. El producto alabeado está caracterizado por lo siguiente

- (1) Para cada $q \in B$, la transformación $\pi|_{B \times \{q\}}$ es una *isometría* sobre B .
- (2) Para cada $p \in A$, la transformación $\sigma|_{\{p\} \times F}$ es una *homotecia* positiva de B con factor $\frac{1}{f(p)}$.
- (3) Para cada $(p, q) \in M$, la hoja $A \times q$ y la fibra $p \times B$ son ortogonales en (p, q) .

Observación 2.33. Dada $N \subset T_{(p,q)}(A \times B)$, N^\top denotará la proyección ortogonal de N en $T_{(p,q)}(\{p\} \times B)$ y N^\perp la proyección en $T_{(p,q)}(A \times \{q\})$.

Lema 2.34. Consideremos el producto alabeado $A \times_f B$, si $X, Y \in \mathfrak{L}(A)$ y $V, W \in \mathfrak{L}(B)$ entonces se satisface

- (1) $D_X Y \in \mathfrak{L}(A)$ es el levantamiento de $D_X Y$ en A .
- (2) $D_X V = D_V X = (\frac{X \cdot f}{f})V$.
- (3) $(D_V W)^\perp = II(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad } f$.
- (4) $(D_V W)^\top \in \mathfrak{L}(B)$ es el levantamiento de $\nabla_V W$ en B .

Una demostración de este resultado se puede encontrar en [3].

Proposición 2.35. Consideremos el punto (a, b) en el producto alabeado $A \times_f B$, entonces

- (a) $A \times \{b\} = \pi^{-1}(b)$ es totalmente geodésica.
- (b) $\{a\} \times B = \sigma^{-1}(a)$ es totalmente umbílica.

Demostración. (a) Por la parte (1) del Lema 2.34 tenemos que $D_X Y = (D_X Y)^\top$ para toda $X, Y \in \mathfrak{L}(A)$, por lo tanto de la Definición 2.5

$$II(X, Y) = D_X Y - (D_X Y)^\top = 0.$$

- (b) Por la parte (3) del Lema 2.34 tenemos que $II(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad } f$, por lo que basta demostrar que $\text{grad } f$ es ortogonal a $\{a\} \times B$. Para esto, sea $V \in \mathfrak{L}(B)$,

$$\langle \text{grad } f, V \rangle = V \cdot f = 0$$

pues el levantamiento de f es constante sobre las fibras.

□

Lema 2.36. *Sea $M = A \times_f B$ un producto alabeado con tensor de curvatura R . Si $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(A)$ y $U, V, W \in \mathfrak{L}(B)$.*

$$(1) \quad R_{XY}Z \in \mathfrak{L}(A) \text{ es el levantamiento de } {}^A R_{XY}Z.$$

$$(2) \quad R_{VX}Y = \frac{\text{Hess}f(X, Y)}{f}V.$$

$$(3) \quad R_{XY}V = R_{VW}X = 0.$$

$$(4) \quad R_{XV}W = \frac{\langle V, W \rangle}{f}D_X(\text{grad}f).$$

$$(5) \quad R_{VW}U = {}^B R_{VW}U - \frac{\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle}{f^2}(\langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V).$$

Una demostración de este lema se encuentra en [3].

Proposición 2.37. *Consideremos el producto alabeado $M = A \times_f B$ con $d = \dim B \geq 1$, y sean $X, Y \in \mathfrak{L}(A)$ y $V, W \in \mathfrak{X}(B)$. Entonces*

$$(1) \quad \text{Ric}(X, Y) = {}^A \text{Ric}(X, Y) - \frac{d}{f} \text{Hess}f(X, Y).$$

$$(2) \quad \text{Ric}(V, W) = {}^B \text{Ric}(V, W) - \langle V, W \rangle f^*, \text{ donde}$$

$$f^* = \frac{\Delta f}{f} + (d-1) \frac{\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle}{f^2}.$$

$$(3) \quad \text{Ric}(X, V) = 0$$

2.4. Espacios estáticos

En relatividad general, se dice que un espacio es *estático* si no cambia con el tiempo y además no rota. Este espacio es un caso especial de un espacio *estacionario*, el cual tampoco cambia con el tiempo; sin embargo, puede rotar. El espacio de Schwarzschild es un ejemplo de un espacio estático.

Definición 2.38. Un *observador* en un espacio arbitrario M , es un campo vectorial unitario U que es temporal y apunta al futuro.

Definición 2.39. U es *irrotacional* si

$$(\text{curl } U)(X, Y) = \langle D_X U, Y \rangle - \langle D_Y U, X \rangle = 0$$

sobre campos vectoriales $X, Y \perp U$.

Definición 2.40. Un espacio tiempo M es *estático* relativo a un observador U , si U es irrotacional y existe una función C^∞ , $h \geq 0$ en M tal que hU es un campo vectorial de Killing.

Definición 2.41. Sea S una 3-variedad riemanniana, I un intervalo abierto y $h \geq 0$ una función C^∞ en S . Sea t y σ las proyecciones estándar de $I \times S$ sobre I y S respectivamente. El *espacio tiempo estático* estándar $I_h \times S$ es la variedad $I \times S$ con métrica

$$-h(\sigma)^2 dt^2 + ds^2$$

donde ds^2 es el levantamiento de la métrica en S .

Observación 2.42. El producto $I_h \times S$ es el producto alabeado $S \times_h I$.

Proposición 2.43. Para $I_h \times S$ se satisface lo siguiente,

- (1) El campo $U = \frac{\partial_t}{h}$ es campo observador y $U = -h \operatorname{grad} t$.
- (2) U es irrotacional.
- (3) $hU = \partial_t$ es de Killing.

Demostración. (1) Notemos que ∂_t es temporal y como $h > 0$ entonces $\frac{\partial_t}{h}$ es unitario con lo cual se sigue que $U = \frac{\partial_t}{h}$ es un vector observador. Por otra parte, tenemos que $\langle \operatorname{grad} t, \partial_t \rangle = \partial_t \cdot t = 1$, esto implica que $\operatorname{grad} t = -\frac{\partial_t}{h^2}$. Por lo tanto $U = -h \operatorname{grad} t$.

- (2) Consideremos la igualdad $U = -h \operatorname{grad} t$ y $X, Y \perp U$ entonces

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} U)(X, Y) &= \langle D_X U, Y \rangle - \langle D_Y U, X \rangle \\ &= X \langle U, Y \rangle - \langle U, D_X Y \rangle - Y \langle U, X \rangle + \langle U, D_Y X \rangle \\ &= -\langle U, D_X Y \rangle + \langle U, D_Y X \rangle \\ &= -\langle U, [X, Y] \rangle \\ &= h \langle \operatorname{grad} t, [X, Y] \rangle \\ &= h[X, Y] \cdot t = 0. \end{aligned}$$

- (3) Consideremos $\{\partial_1 = \partial_t, \partial_2 = \partial_{u_2}, \partial_3 = \partial_{u_3}, \partial_4 = \partial_{u_4}\}$ base asociada a un sistema de coordenadas $\{t, u_2, u_3, u_4\}$ en $I_h \times S$. Así, de la fórmula de Koszul tenemos que

$$\begin{aligned} 2 [\langle D_{\partial_k} \partial_t, \partial_j \rangle + \langle D_{\partial_j} \partial_t, \partial_k \rangle] &= \partial_k \langle \partial_t, \partial_j \rangle + \partial_t \langle \partial_k, \partial_j \rangle - \partial_j \langle \partial_t, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_t, \partial_k \rangle \\ &\quad + \partial_t \langle \partial_j, \partial_k \rangle - \partial_k \langle \partial_t, \partial_j \rangle \\ &= 2\partial_t \langle \partial_k, \partial_j \rangle, \end{aligned}$$

para $k, j = 1, 2, 3, 4$. Y como $\langle \partial_k, \partial_j \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$ no depende de t entonces

$$\partial_t \langle \partial_k, \partial_j \rangle = 0,$$

lo cual, por el Lema 1.28, implica que ∂_t es de Killing.

□

Capítulo 3

Espacio de Schwarzschild

El espacio tiempo de Schwarzschild es el modelo relativista más simple del universo conteniendo una *estrella* singular. La estrella se supone estática, esféricamente simétrica y que es la única fuente de gravitación para el espacio tiempo. Este tipo de modelo puede considerarse una descripción relativista aproximada del campo gravitatorio del sistema solar. Y bajo ciertas condiciones también describe un tipo de agujero negro.

Karl Schwarzschild desarrolló esta geometría, al final de 1915, pocas semanas después de que Albert Einstein publicara su artículo fundamental sobre la *teoría de la relatividad general*.

Definición 3.1. El *espacio de Schwarzschild* es una variedad de Lorentz M equipada con la métrica

$$-(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}dr^2 + r^2g_{S2}.$$

donde $g_{S2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, métrica de S^2 . A esta métrica se le denomina *métrica de Schwarzschild*.

Antes de continuar se enunciará y demostrará un lema que utilizaremos en la construcción de la métrica de Schwarzschild.

Lema 3.2. Consideremos una 2-superficie con sistema de coordenadas $\{t, r\}$ y métrica $ds^2 = E(r)dt^2 + G(r)dr^2$. Entonces

$$(1) \quad \text{grad}r = \frac{\partial_r}{G}.$$

$$(2) \quad (a) \quad \text{Hess}_r(\partial_t, \partial_t) = \frac{E_r}{2G}.$$
$$(b) \quad \text{Hess}_r(\partial_t, \partial_r) = 0.$$

$$(c) \quad \text{Hessr}(\partial_r, \partial_r) = -\frac{G_r}{2G}.$$

$$(3) \quad \Delta r = \frac{1}{2G} \left[\frac{E_r}{E} - \frac{G_r}{G} \right].$$

Demostración. Dada la base canónica $\{\partial_1 = \partial_t, \partial_2 = \partial_r\}$ en la 2-superficie, se tiene que $g^{11} = \frac{1}{E(r)}$, $g^{22} = \frac{1}{G(r)}$ y $g^{ij} = 0$ para $i \neq j$. Así

(1)

$$\begin{aligned} \text{gradr} &= \sum_{i,j}^2 g^{ij} \partial_i(r) \partial_j \\ &= g^{11} \partial_t(r) \partial_t + g^{22} \partial_r(r) \partial_r \\ &= g^{22} (\partial_r \cdot r) \partial_r = \frac{\partial_r}{G}. \end{aligned}$$

(2) (a)

$$\begin{aligned} \text{Hessr}(\partial_t, \partial_t) &= \langle D_{\partial_t} \text{gradr}, \partial_t \rangle \\ &= \frac{1}{G} \langle D_{\partial_t} \partial_r, \partial_t \rangle \\ &= \frac{1}{G} \frac{\partial_r \cdot \langle \partial_t, \partial_t \rangle}{2} \\ &= \frac{E_r}{2G}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2\text{Hessr}(\partial_t, \partial_r) &= 2 \langle D_{\partial_t} \text{gradr}, \partial_r \rangle \\ &= \frac{1}{G} \partial_t \langle \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= \frac{1}{G} \partial_t (G(r)) = 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{Hessr}(\partial_r, \partial_r) &= \langle D_{\partial_r} \text{gradr}, \partial_r \rangle \\ &= \frac{\partial_r \langle \partial_r, \partial_r \rangle}{2G} \\ &= -\frac{G_r}{2G}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \text{trHessr} \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \text{Hessr}(\partial_i, \partial_j) \\
&= g^{11} \text{Hessr}(\partial_t, \partial_t) + g^{22} \text{Hessr}(\partial_r, \partial_r) \\
&= \frac{1}{2G} \left[\frac{E_r}{E} - \frac{G_r}{G} \right].
\end{aligned}$$

□

3.1. Construcción de la métrica de Schwarzschild

Para obtener la métrica de la Definición 3.1 es necesario considerar las condiciones que debe cumplir el modelo, las cuales ya mencionamos, y que son:

1. *Estática.* Existe al menos un sistema de coordenadas donde la métrica no depende de la coordenada temporal, esto es, que la estrella es estática. De la Definición 2.41 se puede considerar la variedad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ con métrica

$$A(x)dt^2 + g_0 \quad x \in \mathbb{R}^3$$

donde g_0 es el levantamiento de la métrica de \mathbb{R}^3 , aún por determinar. La proyección $t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado *el tiempo de Schwarzschild*.

Proposición 3.3. *El vector ∂_t es de Killing.*

La demostración de esta afirmación es la misma que la de la Proposición 2.43 inciso 3.

2. *Simetría esférica.* Dado que la estrella tiene simetría esférica cada transformación $\psi \in SO(3)$ en el grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3 induce un movimiento que puede ser definido como $\bar{\psi}(t, r, \theta, \phi) = (t, \psi(r, \theta, \phi))$ el cual debe ser una isometría. Es natural dar una descripción esférica de \mathbb{R}^3 , menos el origen, como $\mathbb{R}^+ \times S^2$, donde $\mathbb{R}^+ = \{\rho \in \mathbb{R} : \rho > 0\}$ y S^2 es la 2-esfera unitaria. La simetría esférica implica que la métrica g_0 en $\mathbb{R}^+ \times S^2 \approx \mathbb{R}^3 - \{0\}$ puede ser escrita como

$$g_0 = B(\rho)d\rho^2 + C(\rho)g_{S^2}$$

donde g_{S^2} es la métrica estándar de S^2 . Como para cada transformación $\psi \in SO(3)$ la diferencial de la transformación inducida $\text{id} \times \psi$ manda ∂_t en ∂_t entonces la función $A(x)$ solo depende de ρ . Esto demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *La métrica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2 \approx \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$ es*

$$A(\rho)dt^2 + B(\rho)d\rho^2 + C(\rho)g_{S^2}.$$

3. *Normalización.* Con un cambio de variable en \mathbb{R}^+ podemos reemplazar a $C(\rho)$ por r^2 y la métrica se transforma en

$$E(r)dt^2 + G(r)dr^2 + r^2g_{S^2}.$$

La proyección $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ es llamada *radio de Schwarzschild*. Con esta normalización cuando t y r son constantes la métrica se convierte en $r^2g_{S^2}$, la métrica de la esfera estándar $S^2(r)$ con curvatura gaussiana $1/r^2$ y área $4\pi r^2$ (ver figura 3.1).

La métrica anterior da una forma de interpretar al espacio tiempo de Schwarzschild como un producto alabeado, lo cual se expresa en la proposición siguiente.

Proposición 3.5. *El espacio de Schwarzschild es el producto alabeado $P \times_r S^2$ donde $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ es el semiplano $r > 0$ equipado con la métrica $E(r)dt^2 + G(r)dr^2$.*

4. *Condición de Minkowski en el infinito (condición en el vacío).* Dado que la única fuente de gravedad en este modelo es la estrella entonces, suficientemente lejos de esta, la influencia de la gravitación se hace cada vez más pequeña. De esta forma nosotros requerimos que cuando r tiende a infinito entonces la métrica de Schwarzschild se aproxime a la métrica del vacío (la métrica de Minkowski), es decir

$$E(r)dt^2 + G(r)dr^2 + r^2g_{S^2}$$

converja a

$$-dt^2 + dr^2 + r^2g_{S^2}$$

donde $E(r) \rightarrow -1$ y $G(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$.

La siguiente proposición nos dará la forma que deben tener $E(r)$ y $G(r)$ para que se cumpla esta condición.

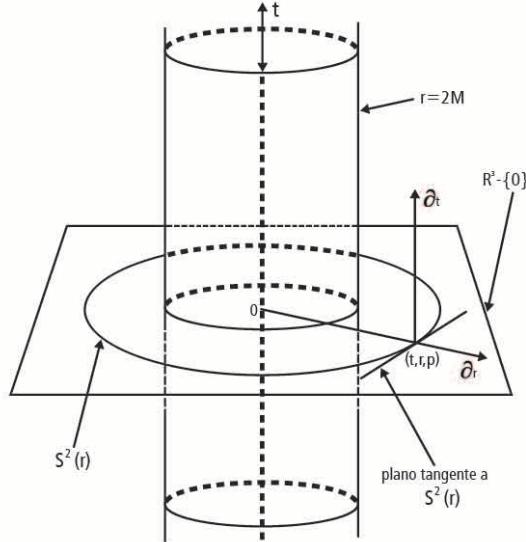


Figura 3.1: Espacio de Schwarzschild

Proposición 3.6. *El producto alabeado $P \times_r S^2$ con métrica*

$$E(r)dt^2 + G(r)dr^2 + r^2g_{S^2}$$

y curvatura de Ricci igual a cero, satisface la condición de Minkowski en el infinito si y solo si $E(r) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ y $G(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$.

Demostración. En las siguientes igualdades se aplicará la Proposición 2.37 con $d = \dim S^2 = 2$, $f = r$ y el hecho de que el producto tiene curvatura de Ricci igual a cero.

$$(1) \quad {}^P\text{Ric}(X, Y) = \frac{2\text{Hess } r(X, Y)}{r} \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{L}(P).$$

$$(2) \quad {}^{S^2}\text{Ric}(V, W) = \langle V, W \rangle r^* \quad \text{para } V, W \in \mathfrak{L}(S^2), \text{ donde}$$

$$r^* = \frac{\Delta r}{r} + \frac{\langle \text{grad } r, \text{grad } r \rangle}{r^2}.$$

De la Proposición 2.35 y de la Observación 2.32 se tiene que las hojas son totalmente geodésicas y la proyección es isométrica. Así, como $\dim(P) = 2$ entonces

$${}^P\text{Ric}(X, Y) = \langle X, Y \rangle K_P \langle X, Y \rangle$$

De esta manera, por la igualdad (1) tenemos

$${}^P\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = K_P \langle \partial_t, \partial_t \rangle = K_P E$$

y

$${}^P\text{Ric}(\partial_r, \partial_r) = K_P \langle \partial_r, \partial_r \rangle = K_P G,$$

y por el Lema 3.2

$${}^P\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = \frac{2\text{Hess } r(\partial_t, \partial_t)}{2} = \frac{E_r}{rG}$$

y

$${}^P\text{Ric}(\partial_r, \partial_r) = \frac{2\text{Hess } r(\partial_r, \partial_r)}{2} = -\frac{G_r}{rG},$$

combinando estas dos ecuaciones

$$\frac{E_r}{E} = -\frac{G_r}{G} \quad \text{o} \quad GE_r + G_r E = 0.$$

Esto implica que $(EG)_r = 0$, entonces EG es constante, y por las condiciones de límite sobre E y G , $EG = -1$.

Como en la ecuación (2) ${}^{S^2}\text{Ric}$ es el levantamiento a través de la proyección sobre las fibras, entonces $\text{Ric} = K_{S^2}g_{S^2} = g_{S^2}$. De aquí y de la igualdad (2) se tiene que

$$\langle V, W \rangle r^* = {}^{S^2}\text{Ric}(V, W) = g_{S^2}(V, W) = \frac{\langle V, W \rangle}{r^2},$$

con lo cual $r^* = \frac{1}{r^2}$. Luego, del Lema 3.2 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} = r^* &= \frac{\Delta r}{r} + \frac{\langle \text{grad}r, \text{grad}r \rangle}{r^2} \\ &= \frac{1}{2rG} \left[\frac{E_r}{E} - \frac{G_r}{G} \right] + \frac{\langle \partial_r, \partial_r \rangle}{r^2G^2} \\ &= \frac{1}{2rG} \left[\frac{E_r}{E} - \frac{G_r}{G} \right] + \frac{1}{r^2G}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\frac{E_r}{E} = -\frac{G_r}{G}$, obtenemos

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{G_r}{rG^2} + \frac{1}{r^2G},$$

en consecuencia

$$1 = \frac{G - rG_r}{G^2} = \left(\frac{r}{G}\right)_r.$$

De la igualdad anterior se deduce la ecuación $\frac{r}{G} = r + c$, donde c es una constante arbitraria. Si $c = -2m$ entonces

$$G(r) = \frac{r}{r - 2m} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1},$$

y dado que $EG = -1$, se concluye

$$E(r) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right).$$

□

3.2. Espacio de anti-deSitter-Schwarzschild

El espacio de anti-deSitter-Schwarzschild es una variedad riemanniana que se une a los diferentes espacios cuya métrica es solución de las ecuaciones de campo de Einstein. La definición que aquí se presenta se basa en la que se puede ver en [2], salvo un pequeño ajuste. El nombre *de Sitter* es en honor al físico, matemático y astrónomo holandés Willem de Sitter (1872-1934).

Definición 3.7. Sea $m > 0$ un número real fijo y s_0 la única solución positiva de la ecuación

$$1 - 2ms_0^{-1} + \lambda^2 s_0^2 = 0.$$

La 3-variedad anti-deSitter-Schwarzschild es la variedad $\hat{N} = S^2 \times [s_0, \infty)$ equipada con la métrica

$$\bar{g} = \frac{1}{1 - 2ms^{-1} + \lambda^2 s^2} ds^2 + s^2 g_{S^2}$$

donde g_{S^2} es la métrica estándar de la esfera unitaria S^2 .

Observación 3.8. Sea (\hat{N}, \bar{g}) la 3-variedad anti-deSitter-Schwarzschild, entonces se satisface lo siguiente:

1. La curvatura seccional de (\hat{N}, \bar{g}) se aproxima a -1 cerca del infinito, es decir, g es asintóticamente hiperbólico.
2. La frontera de M es $\partial\hat{N} = S^2 \times \{s_0\}$, llamada horizonte.

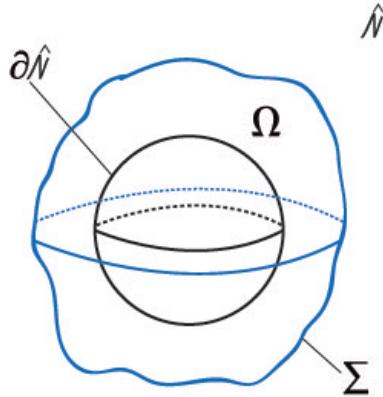


Figura 3.2: Espacio de anti-deSitter-Schwarzschild

3. Dado que $|S^2| = 4\pi r^2$ entonces $|\partial \hat{N}| = 4\pi s_0^2$.

La desigualdad de Minkowski para superficies convexas cerradas $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ establece que

$$\int_{\Sigma} H d\mu \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}$$

donde H es la curvatura media y $|\Sigma|$ denota el área de la superficie Σ . El siguiente teorema generaliza esta desigualdad para superficies en una variedad de anti-deSitter-Schwarzschild.

Antes de enunciar el teorema recordaremos dos definiciones importantes que utilizaremos aquí y en la siguiente sección.

Definición 3.9. Una variedad $\Sigma \subset M$ se dice que es *estrellada* si existe un punto $p \in \Sigma$ tal que para todo punto $q \in \Sigma$ la geodésica $\gamma : [p, q] \rightarrow M$ que une al punto p con el punto q satisface que $\gamma([p, q]) \subset \Sigma$.

Definición 3.10. Una variedad $\Sigma \subset N \subset M$ se dice que es *semi-convexa* si $\langle \vec{H}, \nu \rangle_p \geq 0$ para todo punto $p \in \Sigma$. Donde ν es el campo vectorial de la Definición 2.24.

Teorema 3.11. Consideremos Σ una 2-superficie, compacta, semi-convexa y estrellada contenida en el espacio de anti-deSitter-Schwarzschild \hat{N} de dimensión tres y Ω la región acotada por Σ y el horizonte $\partial \hat{N}$ (ver figura 3.2) entonces

$$\int_{\Sigma} f H d\mu - 6 \int_{\Omega} f d\text{vol} \geq 2|S^2|^{\frac{1}{2}} \left(|\Sigma|^{\frac{1}{2}} - |\partial \hat{N}|^{\frac{1}{2}} \right)$$

donde $f = 1 - 2ms^{-1} + \lambda^2s^2$. Más aún, la desigualdad se satisface si y solo si $\Sigma = S^2 \times \{s\}$.

La demostración de este teorema se puede consultar en [2], el cual está enunciado en forma general.

La siguiente proposición nos da la posibilidad de aplicar la desigualdad del Teorema 3.11 a superficies en un espacio obtenido al hacer $t = 0$ en el espacio de Schwarzschild.

Proposición 3.12. *La métrica*

$$\frac{1}{1 - 2mr^{-1}} dr^2 + r^2 g_{S^2}$$

puede deducirse, con un ajuste, de la métrica de anti-deSitter-Schwarzschild mediante un caso límite de esta.

Demostración. Consideremos la métrica de una 3-variedad de anti-deSitter Schwarzschild

$$\bar{g} = \frac{1}{1 - 2mm's^{-1} + \lambda^2s^2} ds^2 + s^2 g_{S^2}$$

con $m' > 0$. Si multiplicamos por el número m'^{-2} y hacemos $r = \frac{s}{m'}$ de donde se tiene que $dr = m'^{-1}ds$, obtenemos

$$\begin{aligned} m'^{-2}\bar{g} &= \frac{m'^{-2}}{1 - 2mm's^{-1} + \lambda^2s^2} ds^2 + m'^{-2}s^2 g_{S^2} \\ &= \frac{m'^{-2}}{1 - 2m\frac{s^{-1}}{m'^{-1}} + \lambda^2m'^2\frac{s^2}{m'^2}} ds^2 + \frac{s^2}{m'^2} g_{S^2} \\ &= \frac{1}{1 - 2mr^{-1} + \lambda^2m'^2r^2} dr^2 + r^2 g_{S^2}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\lim_{m' \rightarrow 0} \frac{1}{1 - 2mr^{-1} + \lambda^2m'^2r^2} dr^2 + r^2 g_{S^2} = \frac{1}{1 - 2mr^{-1}} dr^2 + r^2 g_{S^2},$$

lo cual concluye el resultado. □

Capítulo 4

Desigualdad de Gibbons-Penrose en el espacio de Schwarzschild

En 1973 R. Penrose presentó un argumento en el que expresó que la masa total de espacio tiempo que contiene un hoyo negro con horizonte de eventos de área total A debería de ser por lo menos $\sqrt{A/16\pi}$. Lo que en principio parecería una aseveración solamente física, se transformaría en una variedad de hermosas desigualdades en geometría riemanniana como es el caso de la llamada desigualdad riemanniana de Penrose. Esta desigualdad fue primero establecida por G. Huisken y T. Ilmanen en 1997 para el caso de un hoyo negro. Y luego en 1999 Hubert L. Bray la presentó para cualquier número de hoyos negros.

En las dos secciones siguientes mencionaremos unas importantes conjeturas respecto a la desigualdad de Penrose a modo de introducción. Primero se considera en el espacio de Minkowski y después en el espacio de Schwarzschild. Este último será el espacio en el cual desarrollaremos la sección tres, parte principal de esta tesis.

4.1. Conjetura: desigualdad sobre el espacio de Minkowski

A partir de este momento, y por el resto del trabajo, asumiremos que Σ es una superficie difeomorfa a S^2 espacial.

En esta sección supondremos que Σ está encajada en el espacio de Minkowski \mathbb{R}^4_1 . Fijamos un vector temporal dirigido al futuro $T_0 \in \mathbb{R}^4_1$ que satisface $\langle T_0, T_0 \rangle = -1$. Sean L y \underline{L} dos vectores nulos y normales a Σ tales que

$\langle L, \underline{L} \rangle = 2$. Supondremos que L está dirigido al futuro y \underline{L} está dirigido al pasado.

De la Proposición 2.22 se tiene que

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(\langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L).$$

Definición 4.1. Dado el campo vectorial de curvatura media \vec{H} definimos el *campo vectorial dual*

$$\vec{J} = \frac{1}{2}(\langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L).$$

La siguiente conjetura sobre las 2-superficies en el espacio de Minkowski fue propuesta por Penrose.

Conjetura 4.2. *Supongamos que la 2-superficie Σ es convexa y nula al pasado, en el sentido de que la hipersuperficie nula al pasado generada por Σ es C^∞ . Entonces*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, T_0 \rangle d\mu \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}. \quad (4.1)$$

Observación 4.3. En cada punto de Σ se pueden elegir direcciones nulas, unas que apunte hacia el futuro y otras al pasado. De esta manera, la *hipersuperficie nula al pasado* se genera por las geodésicas (de \mathbb{R}_1^4) cuyo vector de dirección apunta en la dirección nula al pasado en cada punto de Σ .

Esta desigualdad puede ser escrita en términos de \vec{H} , los vectores normales nulos L y \underline{L} y el vector temporal al futuro T_0 . Para llegar a esa nueva desigualdad necesitamos demostrar algunos resultados previos.

Proposición 4.4. *El vector \vec{J} satisface $\langle \vec{J}, \vec{J} \rangle = -\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$ y $\langle \vec{J}, \vec{H} \rangle = 0$.*

Demostración. Dado que $\langle L, L \rangle = 0 = \langle \underline{L}, \underline{L} \rangle$ y $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}, \vec{J} \rangle &= \frac{1}{4} \langle \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L, \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L \rangle \\ &= \frac{1}{4} [-\langle \vec{H}, L \rangle \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \underline{L}, L \rangle - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \vec{H}, L \rangle \langle L, \underline{L} \rangle] \\ &= -\langle \vec{H}, L \rangle \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle &= \frac{1}{4} \langle \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L, \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\langle \vec{H}, L \rangle \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \underline{L}, L \rangle + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \vec{H}, L \rangle \langle L, \underline{L} \rangle] \\ &= \langle \vec{H}, L \rangle \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle \vec{J}, \vec{J} \rangle = -\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$.

Finalmente

$$\begin{aligned}\langle \vec{J}, \vec{H} \rangle &= \frac{1}{4} [\langle \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L, \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L \rangle] \\ &= \frac{1}{4} [-\langle \vec{H}, L \rangle \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \underline{L}, L \rangle + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \vec{H}, L \rangle \langle L, \underline{L} \rangle] \\ &= -\langle \vec{H}, L \rangle \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \vec{H}, L \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Observación 4.5. El campo vectorial \vec{J} está únicamente caracterizado por las propiedades anteriores, salvo el signo. Dada la elección sobre \vec{H} , vector espacial, hace de \vec{J} un vector temporal al futuro.

Lema 4.6. *Sea $x : R \rightarrow \mathbb{R}_\nu^m$ una inmersión isométrica de una variedad lorentziana R de dimensión k en un espacio semi-euclíadiano. Entonces*

$$\Delta x = k\vec{H},$$

donde \vec{H} es el campo vectorial de curvatura media de la inmersión.

Una demostración de este lema se puede encontrar en [5].

Lema 4.7. *Sea R una variedad cerrada y orientable, $x : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión isométrica. Entonces*

$$\int_{\Sigma} \Delta x d\mu = 0.$$

Este lema se deduce inmediatamente del teorema de la divergencia.

Lema 4.8. *Consideremos a la 2-superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}_1^4$ con campo vectorial de curvatura media \vec{H} . Entonces*

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, T_0 \rangle d\mu = 0.$$

Demostración. Sea $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ inmersión isométrica. Dado que Σ es espacial y T_0 fijo, entonces de los Lemas 4.6 y 4.7 se deduce que

$$\int_{\Sigma} \langle T_0, \vec{H} \rangle d\mu = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle T_0, \Delta x \rangle d\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 T_0^i \int_{\Sigma} \Delta x_i d\mu = 0.$$

□

Proposición 4.9. *La desigualdad (4.1) puede ser escrita como*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, T_0 \rangle d\mu \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}. \quad (4.2)$$

Demostración. Por el Lema 4.8 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, T_0 \rangle d\mu &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle \langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L, T_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, T_0 \rangle + \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \vec{H}, T_0 \rangle \right]. \end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, T_0 \rangle d\mu = \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle L, T_0 \rangle d\mu$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, T_0 \rangle &= -\frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, T_0 \rangle - \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle L, T_0 \rangle \right] \\ &= -\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, T_0 \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, T_0 \rangle d\mu \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}.$$

□

Observación 4.10. En la demostración de la proposición pasada podemos notar que la desigualdad (4.2) no depende de la elección de L y \underline{L} salvo por la propiedad $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$, de esta manera si elegimos a \underline{L} tal que $\langle \underline{L}, T_0 \rangle = 1$, entonces (4.1) es equivalente a

$$\int_{\Sigma} \theta d\mu \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|},$$

donde $\theta = -\langle \vec{H}, L \rangle$ corresponde a la expansión nula exterior dirigida al futuro.

4.2. Conjetura: desigualdad sobre el espacio de Schwarzschild

Consideraremos a Σ encajada en el espacio de Schwarzschild M . Nuevamente sean L y \underline{L} dos vectores nulos normales de Σ tales que $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$ y que L está dirigido al futuro y \underline{L} está dirigido al pasado.

Aquí vuelve a ser válida la igualdad

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(\langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} + \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L).$$

Conjetura 4.11. *Sea Σ una 2-superficie espacial en el espacio de Schwarzschild M . Supongamos que la hipersuperficie nula al pasado generada por Σ es C^∞ . Entonces se satisface*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}. \quad (4.3)$$

Donde m es la masa total del espacio de Schwarzschild.

Observación 4.12. La hipersuperficie generada por Σ es en el sentido de la Observación 4.3.

Observación 4.13. En la siguiente sección se mostrará bajo qué condiciones se satisface esta desigualdad, a la cual llamaremos *desigualdad de Gibbons-Penrose*.

Al igual que en la sección anterior, vamos a desarrollar una desigualdad equivalente. Aquí será de vital importancia la hipótesis de que estamos en el espacio de Schwarzschild.

Lema 4.14. ∂_t es campo de Killing en M .

La prueba es análoga a la de la Proposición 2.43 inciso (3).

Observación 4.15. Note que en la demostración del lema anterior es importante el hecho de estar en el espacio de Schwarzschild, en particular en un espacio estático, pues los coeficientes de la métrica ninguno depende de t .

Lema 4.16. *Dado \vec{H} el campo vectorial de curvatura media de Σ , entonces se satisface la ecuación*

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle d\mu = 0.$$

Demostración. Sea $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal para $T_p(M)$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \vec{H}, \partial_t \rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^3 \epsilon_i (D_{e_i} e_i)^\perp, \partial_t \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^3 \epsilon_i \langle D_{e_i} e_i - (D_{e_i} e_i)^\top, \partial_t \rangle \\ &= \sum_{i=0}^3 \epsilon_i [e_i \langle e_i, \partial_t^\top \rangle - \langle e_i, D_{e_i} \partial_t \rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, \partial_t^\top \rangle] \\ &= \sum_{i=0}^3 \epsilon_i [-\langle e_i, D_{e_i} \partial_t \rangle + \langle e_i, \nabla_{e_i} \partial_t^\top \rangle].\end{aligned}$$

Dado que ∂_t es de Killing (Lema 4.14), por la Observación 1.29 tenemos que

$$\langle \vec{H}, \partial_t \rangle = \sum_{i=0}^3 \epsilon_i \langle e_i, \nabla_{e_i} \partial_t^\top \rangle = \operatorname{div}(\partial_t^\top).$$

Como Σ tiene frontera vacía, concluimos por el *teorema de la divergencia* la siguiente igualdad

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle d\mu = \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\partial_t^\top) d\mu = 0.$$

□

Proposición 4.17. *La Desigualdad (4.3) es equivalente a*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}.$$

Demostración. Por el Lema 4.16 y sustituyendo \vec{H} se tiene

$$0 = \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle d\mu = \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, \partial_t \rangle + \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \right].$$

Lo cual implica

$$\begin{aligned}-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle &= -\frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, \partial_t \rangle - \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle L, \partial_t \rangle \right] \\ &= -\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, \partial_t \rangle d\mu.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}.$$

□

4.3. Teoremas. Condiciones bajo las cuales se satisface la desigualdad de Gibbons-Penrose

En esta sección se supondrá que Σ está encajada en una hipersuperficie $N \subset M$ donde M es el espacio de Schwarzschild de dimensión cuatro. Se demostrará bajo qué condiciones en Σ y N se satisface la desigualdad (4.3).

4.3.1. Σ encajada a una hipersuperficie espacial totalmente geodésica

En esta primera parte nos enfocaremos en la hipótesis de que Σ es semi-convexa, estrellada (Definiciones 3.9 y 3.10) y que está encajada en una hipersuperficie espacial totalmente geodésica en el espacio de Schwarzschild. Utilizaremos el Teorema 3.11 para demostrar la desigualdad.

Observación 4.18. Supongamos que Σ está contenida en la hipersuperficie $N \subset M$ obtenida al hacer nula a la coordenada temporal, es decir $t = 0$, la cual por la Proposición 2.35 es *totalmente geodésica*, con métrica inducida

$$\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 g_{S^2}.$$

Definición 4.19. Definimos al campo vectorial temporal dirigido al futuro, unitario y normal a N , como

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \partial_t.$$

Antes de proceder con el enunciado y demostración del teorema central de esta sección, presentaremos unos resultados que nos serán de mucha ayuda.

Lema 4.20. *Los vectores $L = e_0 + \nu$ y $\underline{L} = -e_0 + \nu$ son nulos y normales a Σ , donde ν el vector conormal de Σ en N . Además L está dirigido al futuro y \underline{L} está dirigido al pasado.*

Demostración. Veamos que L es nulo, para esto

$$\begin{aligned} \langle L, L \rangle &= \langle e_0 + \nu, e_0 + \nu \rangle \\ &= \langle e_0, e_0 \rangle + 2\langle e_0, \nu \rangle + \langle \nu, \nu \rangle \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \langle \partial_t, \partial_t \rangle + 1 \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que e_0 y ν son normales a Σ , $L = e_0 + \nu$ también lo es. Finalmente como $\langle L, e_0 \rangle = -1 < 0$ entonces, por Definición 1.12, L está dirigido al futuro. Análogamente se demuestra que \underline{L} es nulo y normal a Σ . Además, ya que $\langle \underline{L}, e_0 \rangle = 1$ se concluye que \underline{L} está dirigido al pasado. \square

Lema 4.21. *El campo vectorial de curvatura media de $\Sigma \subset M$ está dado por $\vec{H} = -H\nu$ y su dual por $\vec{J} = He_0$.*

Demostración. La componente de la proyección de \vec{H} sobre ν está dada por

$$\begin{aligned}\langle \vec{H}, \nu \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \vec{H}, \underline{L} \rangle \langle L, \nu \rangle + \langle \vec{H}, L \rangle \langle \underline{L}, \nu \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle \vec{H}, \underline{L} \rangle + \langle \vec{H}, L \rangle) \\ &= H.\end{aligned}$$

Como Σ es semi-convexa entonces

$$\vec{H} = -H\nu.$$

Ahora, de acuerdo con la Definición 4.1 y lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \frac{1}{2} (\langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\langle \vec{H}, \nu \rangle + \langle \vec{H}, e_0 \rangle) \underline{L} - (\langle \vec{H}, -e_0 \rangle + \langle \vec{H}, \nu \rangle) L \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle \vec{H}, \nu \rangle (L - \underline{L}) + \langle \vec{H}, e_0 \rangle (-\underline{L} - L)) \\ &= \langle \vec{H}, \nu \rangle e_0 - \langle \vec{H}, e_0 \rangle \nu = He_0.\end{aligned}$$

\square

Teorema 4.22. *Si Σ es semi-convexa, estrellada y está contenida en la hipersuperficie espacial totalmente geodésica $N \subset M$, entonces la desigualdad*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}$$

se satisface.

Demostración. De la Proposición 3.12 se tiene que la métrica de la Observación 4.18, la métrica de N , se puede deducir de un caso límite de la métrica del

espacio de anti-deSitter-Schwarzschild. Por lo que se satisface la desigualdad del Teorema 3.11, así

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f H d\mu - 6 \int_{\Omega} f d\text{vol} &\geq 2|S^2|^{\frac{1}{2}}(|\Sigma|^{\frac{1}{2}} - |\partial N|^{\frac{1}{2}}) \\ &= (16\pi)^{\frac{1}{2}}(|\Sigma|^{\frac{1}{2}} - (16\pi m^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sqrt{16\pi|\Sigma|} - 16\pi m \end{aligned}$$

donde $f = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}$ y Ω es la región encerrada entre Σ y ∂N . Como f es una función positiva se cumple

$$\int_{\Sigma} f H d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|} + 6 \int_{\Omega} f d\text{vol} \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}.$$

Ahora, del Lema 4.21 obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu &= \int_{\Sigma} H \langle e_0, \partial_t \rangle d\mu \\ &= \int_{\Sigma} H \frac{\langle \partial_t, \partial_t \rangle}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} d\mu \\ &= \int_{\Sigma} f H d\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$- \int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}.$$

□

Observación 4.23. En [2] se puede consultar más detalles respecto a la veracidad de la primera desigualdad escrita en la demostración anterior.

4.3.2. Σ encajada a una hipersuperficie espacial totalmente umbílica

Ahora nos concierne el caso en el que Σ es semi-convexa, estrellada y está contenida en una hipersuperficie espacial totalmente umbílica y probaremos que en efecto la Desigualdad 4.3 se satisface bajo estas hipótesis. Para esto, nuevamente haremos uso del Teorema 3.11.

Definición 4.24. Sea $\rho = \rho(s)$ una función que satisface

$$\rho'(s) = \frac{\lambda s}{\left(1 - \frac{2m}{s}\right) \sqrt{1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2}}$$

para alguna constante $\lambda > 0$.

Lema 4.25. La transformación $\Psi(s, \theta, \phi) = (\rho(s), s, \theta, \phi)$ es un encaje de $(2m, \infty) \times S^2$ en el espacio de Schwarzschild en coordenadas (t, r, θ, ϕ) .

Demostración. La diferencial de Ψ está dada por

$$D\Psi(s, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \rho'(s) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el rango de la matriz Jacobiana es tres, Ψ es inmersión. Ahora notemos que la transformación C^∞

$$\bar{\Psi}(\rho(s), s, \theta, \phi) = (s, \theta, \phi)$$

es tal que

$$\begin{aligned} \Psi \circ \bar{\Psi}(\rho(s), s, \theta, \phi) &= (\rho(s), s, \theta, \phi) \\ \bar{\Psi} \circ \Psi(s, \theta, \phi) &= (s, \theta, \phi). \end{aligned}$$

Por lo tanto Ψ es un encaje.

□

Definición 4.26. Definimos a N como la imagen de Ψ , es decir

$$N = \{(t, r, \theta, \phi) : t = \rho(s), r = s\}.$$

Proposición 4.27. La métrica inducida sobre N está dada por

$$\frac{1}{1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2} ds^2 + s^2 g_{S^2}.$$

Además es isométrica a \bar{g} , la métrica de la 3-variedad anti-deSitter-Schwarzschild.

Demostración. Dada la métrica de Schwarzschild, Definición 3.1,

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 g_{S^2},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Psi^*g &= - \left(1 - \frac{2m}{s}\right) d(\rho(s))^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{s}} ds^2 + s^2 g_{S^2} \\
&= - \left(1 - \frac{2m}{s}\right) \left[\frac{\lambda s}{(1 - \frac{2m}{s}) \sqrt{1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2}} \right]^2 ds^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{s}} ds^2 + s^2 g_{S^2} \\
&= \left[\frac{-\lambda^2 s^2}{(1 - \frac{2m}{s})(1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2)} + \frac{1}{1 - \frac{2m}{s}} \right] ds^2 + s^2 g_{S^2} \\
&= \frac{(1 - \frac{2m}{s})^2}{(1 - \frac{2m}{s})^2(1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2)} ds^2 + s^2 g_{S^2} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2} ds^2 + s^2 g_{S^2}
\end{aligned}$$

es métrica de $(2m, \infty) \times S^2$. La isometría es inmediata de la Definición 3.7. \square

Observación 4.28. La función ρ , de la Definición 4.24, parece estar solo definida en $(2m, \infty)$, sin embargo podemos extender a N en el espacio de Schwarzschild de tal manera que el dominio en donde tome valores s sea (s_0, ∞) , recordando que s_0 es la única raíz positiva de la ecuación $1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2 = 0$, esto se puede hacer ya que

$$1 - \frac{2m}{s_0} = -\lambda^2 s_0^2 < 0$$

lo cual implica $s_0 < 2m$. Denotaremos por \hat{N} a dicha extensión, que es precisamente el espacio de anti-deSitter-Schwarzschild. Observemos además que $N \subset \hat{N}$ está encajada isométricamente.

Lema 4.29. *El conjunto $\{\Psi_s = \rho'(s)\partial_t + \partial_r, \Psi_\theta = \partial_\theta, \Psi_\phi = \partial_\phi\}$ forma una base para $T_p(N)$.*

Demostración. Dado que N está parametrizada por Ψ , entonces Ψ_s , Ψ_θ y Ψ_ϕ forman una base para $T_p(N)$. Pero

$$\begin{aligned}
\Psi_s &= \begin{pmatrix} \rho'(s) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho'(s)\partial_t + \partial_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_\theta &= \begin{pmatrix} \rho'(s) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \partial_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_\phi &= \begin{pmatrix} \rho'(s) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_\phi.\end{aligned}$$

□

Observación 4.30. A partir de aquí denotaremos a Ψ_s por ∂_s . Además si $b = 1 - \frac{2m}{s}$ entonces $f = \sqrt{b + \lambda^2 s^2}$.

Lema 4.31. El campo $e_0 = \frac{f}{b}\partial_t + \lambda s\partial_r$ es ortogonal a N .

Demostración. Sea $u \in T_p(N)$ entonces $u = a_1\partial_s + a_2\partial_\theta + a_3\partial_\phi$, así

$$\begin{aligned}\langle e_0, u \rangle &= \left\langle \frac{f}{b}\partial_t + \lambda s\partial_r, a_1\partial_s + a_2\partial_\theta + a_3\partial_\phi \right\rangle \\ &= \frac{f}{b}a_1\langle \partial_t, \partial_s \rangle + \lambda s a_1\langle \partial_r, \partial_s \rangle \\ &= \frac{f}{b}a_1\langle \partial_t, \rho'\partial_t + \partial_r \rangle + \lambda s a_1\langle \partial_r, \rho'\partial_t + \partial_r \rangle \\ &= \frac{f}{b}a_1\rho'\langle \partial_t, \partial_t \rangle + \lambda s a_1\langle \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= a_1[-f\rho' + \frac{\lambda s}{b}] \\ &= a_1[-f\frac{\lambda s}{fb} + \frac{\lambda s}{b}] = 0.\end{aligned}$$

□

Lema 4.32. Los campos $e_0 = \frac{f}{b}\partial_t + \lambda s\partial_r$, $e_1 = -f\partial_s$, $e_2 = \frac{1}{s}\partial_\theta$ y $e_3 = \frac{1}{s \operatorname{sen} \theta}\partial_\phi$ forman un marco ortonormal para M , adaptado a N .

Demostración. De la métrica de Schwarzschild y por como están definidos los e_i es claro que $\langle e_2, e_j \rangle = 0$ y $\langle e_3, e_k \rangle = 0$ para $j = 0, 1, 3$ y $k = 0, 1, 2$. Por

lo que solo basta con mostrar que $\langle e_0, e_1 \rangle = 0$ para la ortogonalidad de los campos vectoriales, para esto

$$\begin{aligned}\langle e_0, e_1 \rangle &= \left\langle \frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r, -f(\rho' \partial_t + \partial_r) \right\rangle \\ &= -\frac{f^2 \rho'}{b} \langle \partial_t, \partial_t \rangle - \lambda s f \langle \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= f^2 \frac{\lambda s}{bf} - \frac{\lambda s f}{b} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora se mostrará que son unitarios

$$\begin{aligned}\langle e_0, e_0 \rangle &= \left\langle \frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r, \frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right\rangle \\ &= \frac{f^2}{b^2} \langle \partial_t, \partial_t \rangle + \lambda^2 s^2 \langle \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= -\frac{f^2}{b} + \frac{\lambda^2 s^2}{b} \\ &= -\frac{b}{b} = -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_1 \rangle &= \langle -f(\rho' \partial_t + \partial_r), -f(\rho' \partial_t + \partial_r) \rangle \\ &= (\rho')^2 f^2 \langle \partial_t, \partial_t \rangle + f^2 \langle \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= -\frac{\lambda^2 s^2}{b^2 f^2} f^2 b + \frac{f^2}{b} \\ &= -\frac{\lambda^2 s^2}{b} + \frac{f^2}{b} \\ &= \frac{b}{b} = 1.\end{aligned}$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{s^2} \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = 1.$$

$$\langle e_3, e_3 \rangle = \frac{1}{s^2 \sin^2 \theta} \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle = 1.$$

Así, cada campo V lo podemos escribir como

$$V = \sum_{i=0}^3 \varepsilon_i \langle V, e_i \rangle e_i$$

donde $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$. □

Proposición 4.33. *La hipersuperficie N es umbílica, es decir, la segunda forma fundamental es proporcional a la métrica inducida.*

Demostración. Dado el marco ortonormal del Lema 4.32, donde e_0 es ortogonal a N , podemos calcular los valores propios del operador de forma mediante la expresión $\langle A(e_i), e_i \rangle$. Así

$$\begin{aligned}\langle A(e_2), e_2 \rangle &= -\langle D_{e_2} e_0, e_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2} \langle D_{\partial_\theta} e_0, \partial_\theta \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2} \langle D_{\partial_\theta} \left(\frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right), \partial_\theta \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2} \left[\frac{f}{b} \langle D_{\partial_\theta} \partial_t, \partial_\theta \rangle - \lambda s \langle D_{\partial_\theta} \partial_r, \partial_\theta \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{s^2} [0 + \lambda s^2] = -\lambda\end{aligned}$$

pues

$$2\langle D_{\partial_\theta} \partial_t, \partial_\theta \rangle = \partial_\theta \langle \partial_t, \partial_\theta \rangle + \partial_t \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle - \partial_\theta \langle \partial_\theta, \partial_t \rangle = \partial_t \cdot s^2 = 0$$

y

$$2\langle D_{\partial_\theta} \partial_r, \partial_\theta \rangle = \partial_\theta \langle \partial_r, \partial_\theta \rangle + \partial_r \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle - \partial_\theta \langle \partial_r, \partial_\theta \rangle = \partial_r \cdot s^2 = 2s.$$

$$\begin{aligned}\langle A(e_3), e_3 \rangle &= -\langle D_{e_3} e_0, e_3 \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \langle D_{\partial_\phi} e_0, \partial_\phi \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \langle D_{\partial_\phi} \left(\frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right), \partial_\phi \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left[\frac{f}{b} \langle D_{\partial_\phi} \partial_t, \partial_\phi \rangle + \lambda s \langle D_{\partial_\phi} \partial_r, \partial_\phi \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{s^2 \operatorname{sen}^2 \theta} [0 + \lambda s^2 \operatorname{sen}^2 \theta] = -\lambda\end{aligned}$$

ya que

$$2\langle D_{\partial_\phi} \partial_t, \partial_\phi \rangle = \partial_\phi \langle \partial_t, \partial_\phi \rangle + \partial_t \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle - \partial_\phi \langle \partial_\phi, \partial_t \rangle = \partial_t \cdot (s^2 \operatorname{sen} \theta) = 0$$

y

$$2\langle D_{\partial_\phi} \partial_r, \partial_\phi \rangle = \partial_\phi \langle \partial_r, \partial_\phi \rangle + \partial_r \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle - \partial_\phi \langle \partial_r, \partial_\phi \rangle = \partial_r \cdot (s^2 \operatorname{sen} \theta) = 2s \operatorname{sen} \theta.$$

Análogamente se calcula

$$\langle A(e_1), e_1 \rangle = -\lambda.$$

Ahora probaremos que $\langle A(e_i), e_j \rangle = 0$ para $i, j = 1, 2, 3$ tal que $i \neq j$. Dado que la segunda forma fundamental es simétrica, basta con probar los siguientes casos.

$$\begin{aligned} \langle A(e_1), e_2 \rangle &= -\langle D_{e_1} e_0, e_2 \rangle \\ &= -\langle D_{-f\partial_s} \left(\frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right), \frac{1}{s} \partial_\theta \rangle \\ &= \frac{f}{s} \left[\langle D_{\partial_s} \left(\frac{f}{b} \partial_t \right), \partial_\theta \rangle + \lambda \langle D_{\partial_s} (s \partial_r), \partial_\theta \rangle \right] \\ &= \frac{f}{s} \left[\left(\frac{f}{b} \right)' \partial_t + \frac{f}{b} D_{\partial_s} \partial_t, \partial_\theta \rangle + \lambda \langle \partial_r + s D_{\partial_s} \partial_r, \partial_\theta \rangle \right] \\ &= \frac{f}{s} \left(\frac{f}{b} \langle D_{\partial_s} \partial_t, \partial_\theta \rangle + \lambda s \langle D_{\partial_s} \partial_r, \partial_\theta \rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} 2\langle D_{\partial_s} \partial_t, \partial_\theta \rangle &= \partial_s \langle \partial_t, \partial_\theta \rangle + \partial_t \langle \partial_s, \partial_\theta \rangle - \partial_\theta \langle \partial_s, \partial_t \rangle \\ &= \partial_s \cdot 0 + \partial_t \cdot 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2\langle D_{\partial_s} \partial_t, \partial_\theta \rangle &= \partial_s \langle \partial_r, \partial_\theta \rangle + \partial_r \langle \partial_s, \partial_\theta \rangle - \partial_\theta \langle \partial_s, \partial_r \rangle \\ &= \partial_s \cdot 0 + \partial_r \cdot 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Si reemplazamos ∂_θ por ∂_ϕ en las igualdades anteriores podemos deducir

$$\begin{aligned} \langle A(e_1), e_3 \rangle &= -\langle D_{e_1} e_0, e_3 \rangle \\ &= -\langle D_{-f\partial_s} \left(\frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right), \frac{1}{s \sin \theta} \partial_\phi \rangle \\ &= \frac{f}{s \sin \theta} \left(\frac{f}{b} \langle D_{\partial_s} \partial_t, \partial_\phi \rangle + \lambda s \langle D_{\partial_s} \partial_r, \partial_\phi \rangle \right) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \langle A(e_2), e_3 \rangle &= -\langle D_{e_2} e_0, e_3 \rangle \\ &= -\langle D_{\frac{1}{s} \partial_\theta} \left(\frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right), \frac{1}{s \sin \theta} \partial_\phi \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2 \sin \theta} \langle D_{\partial_\theta} \left(\frac{f}{b} \partial_t + \lambda s \partial_r \right), \partial_\phi \rangle \\ &= -\frac{1}{s^2 \sin \theta} \left(\frac{f}{b} \langle D_{\partial_\theta} \partial_t, \partial_\phi \rangle + \lambda s \langle D_{\partial_\theta} \partial_r, \partial_\phi \rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

ya que

$$2\langle D_{\partial_\theta} \partial_t, \partial_\phi \rangle = \partial_\theta \langle \partial_t, \partial_\phi \rangle + \partial_t \langle \partial_\theta, \partial_\phi \rangle - \partial_\phi \langle \partial_\theta, \partial_t \rangle = 0$$

y

$$2\langle D_{\partial_\theta} \partial_r, \partial_\phi \rangle = \partial_\theta \langle \partial_r, \partial_\phi \rangle + \partial_r \langle \partial_\theta, \partial_\phi \rangle - \partial_\phi \langle \partial_\theta, \partial_r \rangle = 0.$$

Por lo tanto, de la Proposición 2.20, N es umbílica. \square

Ya estamos cerca de tener las herramientas necesarias para poder dar una demostración del teorema que nos concierne en esta sección, pero aún necesitamos de algunas suposiciones y resultados extras.

Por simplicidad vamos a suponer a partir de aquí que $\lambda = 1$. El caso general puede ser reducido a este caso especial mediante un ajuste, el cual veremos en la parte final de la demostración del teorema.

Definición 4.34. Consideremos a la 2-superficie Σ en N y ν el campo vectorial conormal de Σ . Definimos los campos $L = e_0 + \nu$ y $\underline{L} = -e_0 + \nu$.

Lema 4.35. Los vectores $L = e_0 + \nu$ y $\underline{L} = -e_0 + \nu$ son nulos y normales a Σ . Además $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$.

Demostración. Como $\nu \in T_p(N)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle L, L \rangle &= \langle e_0 + \nu, e_0 + \nu \rangle \\ &= \langle e_0, e_0 \rangle + 2\langle e_0, \nu \rangle + \langle \nu, \nu \rangle \\ &= -1 + 0 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto L es nulo. Ahora, como e_0 y ν son ortogonales a Σ , $L = e_0 + \nu$ también lo es. Análogamente se demuestra que \underline{L} es nulo y normal a Σ . Finalmente

$$\langle L, \underline{L} \rangle = -\langle e_0, e_0 \rangle + \langle \nu, \nu \rangle = 2.$$

\square

Lema 4.36. El campo vectorial de curvatura media se puede expresar como $\vec{H} = -H\nu + 2e_0$ y su dual por $\vec{J} = He_0 - 2\nu$.

Demostración. Como $\Sigma \subset N \subset M$, por la Proposición 2.19 tenemos que

$$II_{\Sigma \subset M}(X, Y) = II_{\Sigma \subset N}(X, Y) + II_{N \subset M}(X, Y)$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Considerando X_1, X_2 base ortonormal de $\mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\vec{H}_{\Sigma \subset M} = \vec{H}_{\Sigma \subset N} + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II(X_i, X_i).$$

Como ν es el campo vectorial conormal, entonces

$$\vec{H}_{\Sigma \subset N} = -H\nu$$

donde $H = \langle \vec{H}_{\Sigma \subset N}, \nu \rangle$. Por otro lado, dado que N es totalmente umbílica, en todo punto $p \in \Sigma$ se satisface que

$$II(X_i, X_i) = \langle X_i, X_i \rangle e_0 = e_0.$$

De aquí

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II(X_i, X_i) = 2e_0.$$

Con lo cual obtenemos

$$\vec{H}_{\Sigma \subset M} = -H\nu + 2e_0.$$

Por lo tanto, de lo anterior y la Definición 4.1

$$\vec{J} = \langle \vec{H}, e_0 \rangle \nu - \langle \vec{H}, \nu \rangle e_0 = He_0 - 2\nu.$$

□

Observación 4.37. Dado que N y \hat{N} son isométricas entonces podremos hacer algunos cálculos en \hat{N} que se preservarán en N . Esto será útil ya que \hat{N} es variedad de anti-deSitter-Schwarzschild y podremos aplicar el Teorema 3.11.

Lema 4.38. *La siguiente igualdad es válida en \hat{N}*

$$\text{div}_{\bar{g}}(sf\partial_s) = 3f. \quad (4.4)$$

Demostración. Consideremos $\{e_1 = -f\partial_s, e_2 = \frac{1}{s}\partial_\theta, e_3 = \frac{1}{s \sin \theta}\partial_\phi\}$ base orthonormal en \hat{N} . Entonces

$$\begin{aligned} \langle D_{E_1}(sf\partial_s), E_1 \rangle &= \langle D_{-f\partial_s}(sf\partial_s), -f\partial_s \rangle \\ &= f^2 \left[\langle (sf' + f)\partial_s + sfD_{\partial_s}\partial_s, \partial_s \rangle \right] \\ &= f^2 \left[(sf' + f) \frac{1}{f^2} + sf \langle D_{\partial_s}\partial_s, \partial_s \rangle \right] \\ &= f^2 \left[(sf' + f) \frac{1}{f^2} + sf \left(\frac{1}{2} \partial_s \langle \partial_s, \partial_s \rangle \right) \right] \\ &= f^2 \left[(sf' + f) \frac{1}{f^2} + sf \left(-\frac{f'}{f^3} \right) \right] \\ &= sf' + f - sf' \\ &= f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_2}(sf\partial_s), E_2 \rangle &= \frac{f}{s} \langle D_{\partial_\theta}\partial_s, \partial_\theta \rangle \\
&= -\frac{f}{s} \langle \partial_s, D_{\partial_\theta}\partial_\theta \rangle \\
&= -\frac{f}{s} \left[\frac{1}{2} (\partial_\theta \langle \partial_\theta, \partial_s \rangle + \partial_\theta \langle \partial_\theta, \partial_s \rangle - \partial_s \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle) \right] \\
&= -\frac{f}{s} \left[-\frac{1}{2} \partial_s(s^2) \right] \\
&= -\frac{f}{s} (-s) \\
&= f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_3}(sf\partial_s), E_3 \rangle &= \frac{f}{s \operatorname{sen}^2 \theta} \langle D_{\partial_\phi}\partial_s, \partial_\phi \rangle \\
&= -\frac{f}{s \operatorname{sen}^2 \theta} \langle \partial_s, D_{\partial_\phi}\partial_\phi \rangle \\
&= -\frac{f}{s \operatorname{sen}^2 \theta} \left[\frac{1}{2} (\partial_\phi \langle \partial_\phi, \partial_s \rangle + \partial_\phi \langle \partial_\phi, \partial_s \rangle - \partial_s \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle) \right] \\
&= -\frac{f}{s \operatorname{sen}^2 \theta} \left[-\frac{1}{2} \partial_s(s^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \right] \\
&= -\frac{f}{s \operatorname{sen}^2 \theta} (-s \operatorname{sen}^2 \theta) \\
&= f.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{div}_{\bar{g}}(sf(s)\partial_s) = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \langle D_{E_i}(sf(s)\partial_s), E_i \rangle = 3f(s).$$

□

Definición 4.39. A $\{s\} \times S^2$ se le denomina *superficie de nivel de s* donde $s : (s, \theta, \phi) \in \hat{N} \rightarrow s \in [s_0, \infty)$.

Lema 4.40. *Dada una superficie de nivel de s en \hat{N} se satisface*

$$\int_{\partial \hat{N}} \langle \nu, sf(s)\partial_s \rangle d\mu = 4\pi s_0^3. \quad (4.5)$$

*Demuestra*ción. Consideremos la variedad $\{s\} \times S^2$ donde $s \in [s_0, \infty)$. Si hacemos $\partial_1 = \partial_s$, $\partial_2 = \partial_\theta$ y $\partial_3 = \partial_\phi$ entonces

$$\bar{g}(\partial_i, \partial_j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

De aquí $\bar{g}^{11} = f^2$, $\bar{g}^{22} = \frac{1}{s^2}$, $\bar{g}^{33} = \frac{1}{s^2 \sin^2 \theta}$ y $\bar{g}^{ij} = 0$ para $i \neq j$. Así, en una superficie de nivel de s se tiene que

$$\text{grad } s = \bar{g}^{ij}(\partial_i \cdot s)\partial_j = \bar{g}^{1j}(\partial_s \cdot s)\partial_j = \bar{g}^{11}\partial_s = f^2\partial_s$$

y

$$\|\text{grad } s\| = \sqrt{\langle \text{grad } s, \text{grad } s \rangle} = \sqrt{f^4 \langle \partial_s, \partial_s \rangle} = f.$$

Con lo cual obtenemos

$$\nu = \frac{\text{grad } s}{\|\text{grad } s\|} = f\partial_s.$$

Ahora, si consideramos las integrales sobre $\{s\} \times S^2$ y sustituyendo a ν se tiene

$$\int_{\{s\} \times S^2} \langle \nu, sf\partial_s \rangle d\mu = \int_{\{s\} \times S^2} \langle \nu, s\nu \rangle d\mu = \int_{\{s\} \times S^2} sd\mu.$$

Por lo tanto, al tomar el límite $s \rightarrow s_0$, y de la Observación 3.8, se concluye que

$$\int_{\partial \hat{N}} \langle \nu, sf\partial_s \rangle d\mu = s_0 \int_{\partial \hat{N}} d\mu = s_0(4\pi s_0^2) = 4\pi s_0^3.$$

□

Observación 4.41. Recordemos que $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial \hat{N}$, Teorema 3.11, entonces dada una orientación positiva en el interior de Ω , la orientación en la frontera de esta región queda determinada por la orientación en Σ y $\partial \hat{N}$. Esta orientación será positiva en alguna componente y negativa en la otra. Vamos a suponer que $\partial \hat{N}$ tiene orientación negativa.

Proposición 4.42. *Dado que $\Sigma \subset N \subset \hat{N}$, entonces*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu = \int_{\Sigma} H f d\mu - 6 \int_{\Omega} f d\text{vol} - 8\pi s_0^3$$

donde Ω es la región encerrada entre $\partial \hat{N}$ y Σ .

Demostración. En el Lema 4.36 se obtuvo que $\vec{J} = He_0 - 2\nu$, sustituyendo esta ecuación tenemos la siguiente igualdad

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu = -\int_{\Sigma} H \langle e_0, \partial_t \rangle d\mu + 2 \int_{\Sigma} \langle \nu, \partial_t \rangle d\mu. \quad (4.6)$$

Con un cálculo sencillo obtenemos

$$-\langle e_0, \partial_t \rangle = -\langle \frac{f}{b} \partial_t + s \partial_r, \partial_t \rangle = -\frac{f}{b} \langle \partial_t, \partial_t \rangle = f.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (\partial_t)^\top &= \sum_{i=1}^3 \langle \partial_t, e_i \rangle e_i \\ &= \langle \partial_t, e_1 \rangle e_1 \\ &= \langle \partial_t, -f(\rho' \partial_t - \partial_r) \rangle e_1 \\ &= -\rho' f \langle \partial_t, \partial_t \rangle e_1 \\ &= (\frac{s}{bf} fb) e_1 \\ &= s(-f \partial_s) \\ &= -sf \partial_s \end{aligned}$$

así

$$\langle \nu, \partial_t \rangle = \langle \nu, (\partial_t)^\top \rangle = -\langle \nu, sf \partial_s \rangle.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (4.6) se tiene

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu = \int_{\Sigma} f H d\mu - 2 \int_{\Sigma} \langle \nu, sf \partial_s \rangle d\mu. \quad (4.7)$$

De la Observación 4.28, la igualdad (4.7) puede considerarse como una ecuación en una 3-variedad de anti-deSitter-Schwarzschild \hat{N} a través de la isometría dada por la Proposición 4.27. Recordemos que la variedad \hat{N} tiene métrica

$$\bar{g} = \frac{1}{f(s)^2} ds^2 + s^2 g_{S^2}$$

para $s \in [s_0, \infty]$. Ahora, dado que $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial\hat{N}$ donde $\partial\hat{N}$ es el horizonte y Ω es la región encerrada entre $\partial\hat{N}$ y Σ (ver figura 3.2) tenemos que

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nu, sf \partial_s \rangle d\mu = \int_{\Sigma} \langle \nu, sf \partial_s \rangle d\mu - \int_{\partial\hat{N}} \langle \nu, sf \partial_s \rangle d\mu$$

el signo menos en la última integral viene dado de la Observación 4.41.

Aplicando el teorema de la divergencia a la parte izquierda de la igualdad, se tiene

$$\int_{\Sigma} \langle \nu, sf\partial_s \rangle d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\bar{g}}(sf\partial_s) d\operatorname{vol} + \int_{\partial\hat{N}} \langle \nu, sf\partial_s \rangle d\mu. \quad (4.8)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.4) y (4.5) en la igualdad (4.8) llegamos a

$$\int_{\Sigma} \langle \nu, sf(s)\partial_t \rangle d\mu = \int_{\Omega} 3fd\operatorname{vol} + 4\pi s_0^3.$$

Finalmente al sustituir esta igualdad en la ecuación (4.5) concluimos que

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu = \int_{\Sigma} Hfd\mu - 6 \int_{\Omega} fd\operatorname{vol} - 8\pi s_0^3.$$

□

Teorema 4.43. *Sea Σ una 2-superficie semi-convexa y estrellada que pertenece a la hipersuperficie totalmente umbílica $N \subset M$. Entonces la desigualdad*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}$$

se satisface.

Demostración. De la Proposición 4.42 se tiene

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu = \int_{\Sigma} Hfd\mu - 6 \int_{\Omega} fd\operatorname{vol} - 8\pi s_0^3. \quad (4.9)$$

Por otra parte, del Teorema 3.11 se deduce la desigualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} fHd\mu - 6 \int_{\Omega} fd\operatorname{vol} &\geq 2|S^2|^{\frac{1}{2}} \left(|\Sigma|^{\frac{1}{2}} - |\partial\hat{N}|^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2(4\pi)^{\frac{1}{2}} \left[|\Sigma|^{\frac{1}{2}} - (4\pi s_0^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \sqrt{16\pi|\Sigma|} - 8\pi s_0 \end{aligned}$$

y de la ecuación $1 - 2ms_0^{-1} + \lambda^2 s_0^2 = 0$ obtenemos $2m = (s_0^3 + s_0)$ para $\lambda = 1$. Por lo tanto, al combinar la desigualdad anterior y la igualdad (4.9) concluimos

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu &\geq \sqrt{16\pi|\Sigma|} - 8\pi(s_0^3 + s_0) \\ &= \sqrt{16\pi|\Sigma|} - 16\pi m. \end{aligned}$$

Ahora, para el caso general $\lambda > 0$ lo podemos reducir al caso $\lambda = 1$ de la siguiente manera: sea s_0 la única solución positiva de la ecuación $1 - 2ms_0^{-1} + \lambda^2 s_0^2 = 0$ entonces $s'_0 = \lambda s_0$ es la única solución positiva de la ecuación $1 - 2m's_0'^{-1} + s'_0{}^2 = 0$ con $m' = \lambda m > 0$. □

4.3.3. Σ encajada a una hipersuperficie nula

En esta sección vamos a suponer que la 2-superficie Σ está contenida en una hipersuperficie nula N del espacio de Schwarzschild M . Para esta parte reduciremos todo al caso de una hipersuperficie umbílica, por lo que se usará el Teorema 4.43.

Definición 4.44. Sea M que denota el espacio de Schwarzschild en coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Consideremos $\Phi : (2m, \infty) \times S^2 \rightarrow M$ dada por

$$\Phi(s, \theta, \phi) = (\epsilon(s), s, \theta, \phi)$$

$$\text{donde } \epsilon(s) = s + 2m \log\left(\frac{s}{2m} - 1\right).$$

La imagen de Φ es la *hipersuperficie*

$$N = \{(t, r, \theta, \phi) : t = s + 2m \log\left(\frac{s}{2m} - 1\right), r = s, s > 2m\}.$$

Proposición 4.45. La hipersuperficie N es nula.

Demostración. Recordemos que la métrica del espacio de Schwarzschild está dada por

$$g = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}dr^2 + r^2 g_{S^2}.$$

Como Φ es una inmersión entonces la métrica inducida sobre N es

$$\begin{aligned} \Phi^*g &= -(1 - \frac{2m}{s})d(\epsilon(s))^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{s}}ds^2 + s^2 g_{S^2} \\ &= -(1 - \frac{2m}{s})(\frac{1}{1 - \frac{2m}{s}})^2 ds^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{s}}ds^2 + s^2 g_{S^2} \\ &= s^2 g_{S^2}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $\Phi_s = \epsilon'(s)\partial_t + \partial_r$ es un campo tangente a N . Sea $X \in \mathfrak{X}(N)$ tal que $X \neq 0$ y tangente a S^2 , entonces

$$\Phi^*g(\Phi_s, X) = s^2 g_{S^2}(\Phi_s^\top, X)$$

donde Φ_s^\top denota la parte tangente del campo Φ_s a S^2 . Pero

$$\Phi_s^\top = \sum_{ij}^2 g^{ij} \langle \Phi_s, \partial_i \rangle \partial_j = 0$$

con $\partial_1 = \partial_\theta$ y $\partial_2 = \partial_\phi$. Por lo tanto

$$\Phi^*g(\Phi_s, X) = 0$$

para todo $X \neq 0$. □

Proposición 4.46. *Como Σ es una 2-superficie espacial entonces se puede representar como una gráfica radial*

$$\Sigma = \{(t, r, \theta, \phi) : t = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right), r = u(\theta, \phi), (\theta, \phi) \in S^2\}$$

con parametrización $\Psi : S^2 \rightarrow N \subset M$ definida por

$$\Psi(\theta, \phi) = (\epsilon(u(\theta, \phi)), u(\theta, \phi), \theta, \phi)$$

para alguna función $u : S^2 \rightarrow (2m, \infty)$ y donde $\epsilon(r) = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right)$.

Demostración. De la Definición 4.44 se deduce que podemos definir una 2-superficie en N como la imagen del encaje $\Psi : S^2 \rightarrow N \subset M$ definido como

$$\Psi(\theta, \phi) = (\epsilon(u(\theta, \phi)), u(\theta, \phi), \theta, \phi)$$

para alguna función $u : S^2 \rightarrow (2m, \infty)$. Cuya imagen mencionada es

$$\{(t, r, \theta, \phi) : t = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right), r = u(\theta, \phi), (\theta, \phi) \in S^2\}.$$

Además, de la Proposición 4.45 podemos deducir que la métrica inducida sobre esta 2-superficie es $r^2 g_{S^2}$, la cual es positiva definida. Por lo tanto, como Σ es espacial entonces

$$\Sigma = \{(t, r, \theta, \phi) : t = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right), r = u(\theta, \phi), (\theta, \phi) \in S^2\}.$$

□

Proposición 4.47. *Para cada $\lambda > 0$, sea ρ_λ la única solución de la ecuación diferencial ordinaria*

$$\rho'(s) = \frac{\lambda s}{(1 - \frac{2m}{s}) \sqrt{1 - \frac{2m}{s} + \lambda^2 s^2}}$$

tal que $\rho_\lambda(4m) = 4m$. Entonces $\rho_\lambda(s)$ converge a la función $\epsilon(s) = s + 2m \log\left(\frac{s}{2m} - 1\right)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ en el intervalo $(2m, \infty)$.

Definición 4.48. Sea $\Phi_\lambda : (2m, \infty) \times S^2 \rightarrow M$ dada por

$$\Phi_\lambda(s, \theta, \phi) = (\rho_\lambda(s), s, \theta, \phi).$$

Además, para cada $\lambda > 0$ la imagen de Φ_λ es la *hipersuperficie*

$$\hat{N}_\lambda = \{(t, r, \theta, \phi) : t = \rho_\lambda(s), r = s, s > 2m\}.$$

Definición 4.49. Sea $\Psi_\lambda : S^2 \rightarrow M$ dada por

$$\Psi_\lambda(\theta, \phi) = (\rho_\lambda(u(\theta, \phi)), u(\theta, \phi), \theta, \phi).$$

Consecuentemente para cada $\lambda > 0$, la imagen de Ψ_λ es la *2-superficie*

$$\Sigma_\lambda = \{(t, r, \theta, \phi) : t = \rho_\lambda(r), r = u(\theta, \phi), (\theta, \phi) \in S^2\}$$

donde $u : S^2 \rightarrow (2m, \infty)$.

Proposición 4.50. La hipersuperficie \hat{N}_λ es umbílica e isométrica a la variedad de anti-deSitter-Schwarzschild de dimensión tres. Además la 2-superficie Σ_λ puede ser interpretada como una superficie estrellada contenida en \hat{N}_λ .

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Proposición 4.33. \square

Observación 4.51. Nuevamente en esta sección L y \underline{L} denotan los *vectores nulos normales* a Σ tal que uno está dirigido al futuro y otro al pasado, además satisfacen que $\langle L, \underline{L} \rangle = 2$. Como N es nula entonces en cada punto están definidas dos direcciones nulas, por lo que podemos suponer que L es un vector nulo dirigido al futuro.

Proposición 4.52. Las siguientes afirmaciones son ciertas cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

1. La hipersuperficie N_λ converge a la hipersuperficie N y la 2-superficie Σ_λ converge a la 2-superficie Σ .
2. El campo vectorial de curvatura media de Σ_λ converge al campo vectorial de curvatura media de Σ y el vector dual de Σ_λ converge al vector dual de Σ .
3. El campo vectorial conormal ν_λ converge a un vector paralelo a L .

Demostración. 1. Dadas las parametrizaciones de las Definiciones 4.48 y 4.49

$$\Phi_\lambda(s, \theta, \phi) = (\rho_\lambda(s), s, \theta, \phi)$$

$$\Psi_\lambda(\theta, \phi) = (\rho_\lambda(u(\theta, \phi)), u(\theta, \phi), \theta, \phi)$$

y por la Proposición 4.47 se tiene que

$$\rho_\lambda(s) \rightarrow \epsilon(s)$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Esto implica que

$$\Phi_\lambda \rightarrow \Phi$$

y

$$\Psi_\lambda \rightarrow \Psi$$

Por lo tanto

$$N_\lambda \rightarrow N$$

y

$$\Sigma_\lambda \rightarrow \Sigma.$$

2. Primero, si escribimos a \vec{H}_λ y \vec{H} en términos de las parametrizaciones de Σ y Σ_λ se tiene que

$$\vec{H}_\lambda = \vec{H}_{\Sigma_\lambda \subset N_\lambda} = (g_\lambda^{ij} D_{(\Psi_\lambda)_j} (\Psi_\lambda)_i)^\perp \rightarrow (g^{ij} D_{\Psi_j} \Psi_i)^\perp = \vec{H}_{\Sigma \subset N} = \vec{H}.$$

Por otra parte, sea $\ell_\lambda = p_\lambda + tL_\lambda$ recta nula al futuro normal a Σ_λ que pasa por el punto $p_\lambda \in \Sigma_\lambda$ con dirección L_λ . Si $\lambda \rightarrow \infty$, $\Sigma_\lambda \rightarrow \Sigma$ entonces $p_\lambda \rightarrow p \in \Sigma$ y por la Proposición 1.23 $L_\lambda \rightarrow L$. Además, si $u_\lambda \in \ell_\lambda$ y $v_\lambda \in T_{p_\lambda} \Sigma_\lambda$ entonces $\langle u_\lambda, v_\lambda \rangle = 0$, luego si $\lambda \rightarrow \infty$ tenemos que $\langle u, v \rangle = 0$ donde $u \in \ell$ y $v \in T_p \Sigma$. Por lo tanto ℓ_λ converge a $\ell = p + tL$ recta nula al futuro normal a Σ .

Análogamente $\underline{\ell}_\lambda = p_\lambda + s\underline{L}_\lambda$ converge a $\underline{\ell} = p + s\underline{L}$ recta nula al pasado normal a Σ .

Así, por la Definición 4.49

$$\vec{J}_\lambda \rightarrow \vec{J}$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

3. Sea $q_\lambda \in \Sigma_\lambda$ y $\nu_\lambda(q_\lambda)$ vector conormal unitario exterior de Σ_λ en N_λ . Dado que Σ_λ y N_λ convergen a la 2-superficie Σ y a la hipersuperficie nula N , respectivamente, entonces $\nu_\lambda(q_\lambda)$ converge a un vector tangente a N y normal a Σ en un punto $q \in \Sigma$, esto implica que $\nu_\lambda(q_\lambda) \rightarrow cL(q)$, donde $c \in \mathbb{R}$, cuando $\lambda \rightarrow \infty$. \square

Teorema 4.53. *Si Σ pertenece a la hipersuperficie nula $N \subset M$, entonces la desigualdad*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi |\Sigma|}.$$

se satisface.

Demostración. Como $\langle \vec{H}, L \rangle$ y $\langle \vec{H}, \underline{L} \rangle$ son estrictamente positivas entonces la curvatura media de Σ_λ , vista dentro de N_λ , es estrictamente positiva cuando λ es suficientemente grande y por la Proposición 4.52 se concluye que Σ_λ es estrellada y semi-convexa. De esta manera Σ_λ cumple con las hipótesis del Teorema 4.43 por lo que se satisface la desigualdad

$$-\int_{\Sigma_\lambda} \langle \vec{J}_\lambda, \partial_t \rangle d\mu_\lambda + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi |\Sigma_\lambda|}. \quad (4.10)$$

Ahora, supongamos que $\lambda \rightarrow \infty$. Como

$$d\mu_\lambda = |\det(g_{ij})_\lambda|^{\frac{1}{2}} d\theta \wedge d\phi$$

y

$$d\mu = |\det(g_{ij})|^{\frac{1}{2}} d\theta \wedge d\phi$$

entonces $d\mu_\lambda$ converge a $d\mu$, esto implica

$$|\Sigma_\lambda| \rightarrow |\Sigma|.$$

Por lo tanto, de la Proposición 4.52 concluimos que la desigualdad (4.10) converge a

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}.$$

□

4.3.4. Σ encajada a una hipersuperficie temporal estática convexa

Las hipótesis del teorema ahora son que Σ está contenida en una hipersuperficie *estática convexa*, la cual será construida con ayuda de la proyección de Σ sobre la rebanada $t = 0$ del espacio de Schwarzschild. En esta subsección cuando se hable de segunda forma fundamental se referirá a h_{ij} como en la Observación 2.8.

Definición 4.54. Sea $\Sigma \subset M$ 2-superficie, $\pi : (t, r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$ la proyección sobre la rebanada $t = 0$ y $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ parametrización de Σ dada por

$$F(x) = (\tau(x), \hat{F}(x))$$

donde $\tau : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\hat{F} : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \hat{\Sigma}$ es la *parametrización* de $\hat{\Sigma} = \pi(\Sigma)$.

Observación 4.55. Como en la subsección 4.3.2. la rebanada $t = 0$ es totalmente geodésica y ∂_t es el campo vectorial de Killing.

Observación 4.56. En esta sección se tendrá la convención de notación $F_i = \partial_i F$ y $\tau_i = \partial_i \tau$.

Definición 4.57. Sea N una hipersuperficie temporal completa en un espacio estático. Decimos que N es *estático convexo* si $N = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, x \in \hat{\Sigma}\}$ para alguna 2-superficie $\hat{\Sigma} \subset M$, y tal que la segunda forma fundamental \hat{h}_{ab} y la métrica inducida \hat{g}_{ab} de $\hat{\Sigma}$ en M satisfacen $\hat{h}_{ab} \geq \Omega^{-1}(\hat{\nu} \cdot \Omega)\hat{g}_{ab} > 0$. Donde $\hat{\nu}$ denota el campo vectorial conormal exterior a $\hat{\Sigma}$.

Observación 4.58. La condición $\hat{h}_{ab} \geq \Omega^{-1}\hat{\nu}(\Omega)\hat{g}_{ab} > 0$ tiene una interpretación geométrica natural: esta condición implica que la segunda forma fundamental H de la hipersuperficie temporal N es no negativa cuando se evalúa en vectores nulos, es decir, $H(X, X) \geq 0$ si X es nulo y tangente a N .

Proposición 4.59. La métrica inducida en $\hat{\Sigma}$ relativa a Σ es

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + f^2\tau_i\tau_j$$

donde $f = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}$.

Demostración. Dada la parametrización $F(x) = (\tau(x), \hat{F}(x))$, los vectores tangentes a Σ son

$$F_i = \tau_i \partial_t + \hat{F}_i.$$

De aquí, la métrica inducida en Σ es

$$\begin{aligned} g_{ij} = \langle F_i, F_j \rangle &= \langle \hat{F}_i + \tau_i \partial_t, \hat{F}_j + \tau_j \partial_t \rangle \\ &= \langle \hat{F}_i, \hat{F}_j \rangle + \tau_i \tau_j \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= \hat{g}_{ij} - (1 - \frac{2m}{r})\tau_i \tau_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $f = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}$, la métrica inducida en $\hat{\Sigma}$ relativa a Σ está dada por

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + f^2\tau_i\tau_j.$$

□

Proposición 4.60. La matriz inversa de la métrica \hat{g}_{ij} está dada por

$$\hat{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2}$$

donde $|\nabla \tau|^2 = g^{ij} \tau_i \tau_j$.

Demostración. Consideremos la métrica inducida \hat{g} como en la Proposición 4.59, entonces

$$\begin{aligned} \hat{g}_{im} \hat{g}^{mj} &= (g_{im} + f^2 \tau_i \tau_m) \left(g^{mj} - \frac{f^2 g^{mk} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} \right) \\ &= g_{im} g^{mj} - g_{im} \frac{f^2 g^{mk} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} + g^{mj} f^2 \tau_i \tau_m - f^2 \tau_i \tau_m \frac{f^2 g^{mk} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} \\ &= \delta_{ij} - \delta_{ik} \frac{f^2 g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} - \frac{f^2 |\nabla \tau|^2 f^2 g^{jl} \tau_i \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} + f^2 g^{mj} \tau_i \tau_m \\ &= \delta_{ij} - \frac{f^2 g^{jl} \tau_i \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} (1 + f^2 |\nabla \tau|^2) + f^2 g^{jm} \tau_i \tau_m \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

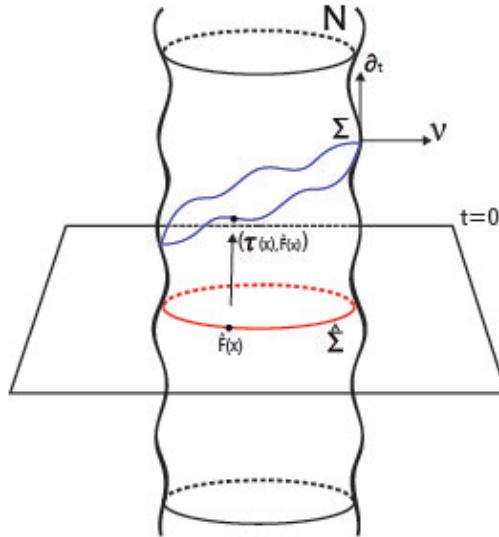


Figura 4.1: Σ encajada en un espacio estático convexo

La última igualdad se da haciendo un ajuste de índices. \square

En la siguiente proposición relacionaremos la segunda forma fundamental de Σ con la segunda forma fundamental de $\hat{\Sigma}$.

Proposición 4.61. *Existe una extensión de $\hat{\nu}$ a un campo vectorial ν definido en una vecindad U de N tal que $[\nu, \partial_t] = 0$ y $\langle \nu, \partial_t \rangle = 0$. Además ν es normal tanto a Σ como a $\hat{\Sigma}$.*

Demostración. Sea $\hat{\nu}$ el campo vectorial conormal a $\hat{\Sigma}$. Dado que $\hat{\nu}$ es tangente a la rebanada $t = 0$, existe un abierto $\hat{U} \subset \hat{\Sigma}$ tal que para cada punto de este se satisface $\langle \hat{\nu}, \partial_t \rangle = 0$. Si definimos al vector $\nu = (t, \hat{\nu})$ entonces para todo punto del abierto $U = \{t\} \times \hat{U} \subset N$ se satisface que $\langle \nu, \partial_t \rangle = 0$. La ortogonalidad de ν a $\hat{\Sigma}$ y Σ se deduce del hecho que ν es ortogonal a N .

Finalmente, de la Proposición 3.5 tenemos la forma de ver al espacio de Schwarzschild como producto alabeado, de esta manera notamos que $\nu \in \mathcal{L}(\{p\} \times \mathbb{R}^+ \times_r S^2)$ y $\partial_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \{q\})$, donde $q \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2$ (ver figura 4.1). Por lo tanto del Lema 2.30 se concluye que $[\nu, \partial_t] = 0$. \square

A partir de aquí los resultados se consideran en la vecindad U donde existe la extensión ν .

Lema 4.62. *La siguiente ecuación se satisface*

$$\langle F_i, D_{F_j} \nu \rangle = \hat{h}_{ij} - \tau_i \tau_j f(\nu \cdot f)$$

donde \hat{h}_{ij} es la segunda forma fundamental de $\hat{\Sigma}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\langle F_i, D_{F_j} \nu \rangle &= \langle \tau_i \partial_t + \hat{F}_i, D_{\tau_j \partial_t + \hat{F}_j} \nu \rangle \\ &= \langle \hat{F}_i, D_{\hat{F}_j} \nu \rangle + \tau_i \tau_j \langle \partial_t, D_{\partial_t} \nu \rangle + \tau_i \langle \partial_t, D_{\hat{F}_j} \nu \rangle + \tau_j \langle \hat{F}_i, D_{\partial_t} \nu \rangle.\end{aligned}$$

De la proposición anterior sabemos que $[\nu, \partial_t] = 0$, lo cual implica $D_\nu \partial_t = D_{\partial_t} \nu$. Así

$$\langle F_i, D_{F_j} \nu \rangle = \langle \hat{F}_i, D_{\hat{F}_j} \nu \rangle + \tau_i \tau_j \langle \partial_t, D_\nu \partial_t \rangle + \tau_j \langle \hat{F}_i, D_\nu \partial_t \rangle + \tau_i \langle \partial_t, D_{\hat{F}_j} \nu \rangle.$$

Calcularemos estos cuatro términos utilizando que ν es normal a Σ y $\hat{\Sigma}$, junto con el hecho de que ∂_t es de Killing. Primero notemos que

$$\langle \hat{F}_i, D_{\hat{F}_j} \nu \rangle = -\langle \nu, D_{F_j} \hat{F}_i \rangle = \hat{h}_{ij}.$$

Para el segundo término

$$\begin{aligned}\tau_i \tau_j \langle \partial_t, D_\nu \partial_t \rangle &= \tau_i \tau_j \frac{1}{2} [\nu \langle \partial_t, \partial_t \rangle] \\ &= -\tau_i \tau_j \frac{1}{2} [\nu \cdot f^2] \\ &= -\tau_i \tau_j f (\nu \cdot f).\end{aligned}$$

Para calcular los últimos dos términos notemos primero que

$$\begin{aligned}\langle \nu, [\partial_t, \hat{F}_i] \rangle &= \langle \nu, D_{\partial_t} \hat{F}_i \rangle - \langle \nu, D_{\hat{F}_i} \partial_t \rangle \\ &= \partial_t \langle \nu, \hat{F}_i \rangle - \langle D_{\partial_t} \nu, \hat{F}_i \rangle - \langle \nu, D_{\hat{F}_i} \partial_t \rangle \\ &= -\langle D_{\partial_t} \nu, \hat{F}_i \rangle - \langle \nu, D_{\hat{F}_i} \partial_t \rangle \\ &= -\langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle - \langle \nu, D_{\hat{F}_i} \partial_t \rangle \\ &= \langle \nu, D_{\hat{F}_i} \partial_t \rangle - \langle \nu, D_{\hat{F}_i} \partial_t \rangle = 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle \partial_t, [\nu, \hat{F}_i] \rangle &= \langle \partial_t, D_\nu \hat{F}_i \rangle - \langle \partial_t, D_{\hat{F}_i} \nu \rangle \\ &= \nu \langle \partial_t, \hat{F}_i \rangle - \langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle - [\hat{F}_i \langle \partial_t, \nu \rangle - \langle D_{\hat{F}_i} \partial_t, \nu \rangle] \\ &= -\langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle + \langle D_{\hat{F}_i} \partial_t, \nu \rangle \\ &= -\langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle - \langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle \\ &= -2 \langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 2\langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle &= \nu \langle \partial_t, \hat{F}_i \rangle + \partial_t \langle \nu, \hat{F}_i \rangle - \hat{F}_i \langle \nu, \partial_t \rangle \\ &- \langle \nu, [\partial_t, \hat{F}_i] \rangle + \langle \partial_t, [\nu, \hat{F}_i] \rangle + \langle \hat{F}_i, [\nu, \partial_t] \rangle \\ &= -\langle \nu, [\partial_t, \hat{F}_i] \rangle + \langle \partial_t, [\nu, \hat{F}_i] \rangle \\ &= -2\langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_i \rangle = 0.$$

Finalmente, dado que ∂_t es de Killing se tiene

$$\langle \partial_t, D_{\hat{F}_j} \nu \rangle = -\langle \nu, D_{\hat{F}_j} \partial_t \rangle = \langle D_\nu \partial_t, \hat{F}_j \rangle = 0.$$

Con lo cual concluimos

$$\langle F_i, D_{F_j} \nu \rangle = \hat{h}_{ij} - \tau_i \tau_j f(\nu \cdot f).$$

□

Lema 4.63. *La siguiente igualdad es válida*

$$\frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} f^{-1}(\nu \cdot f) \hat{g}_{ij} = |\nabla \tau|^2 f(\nu \cdot f).$$

Demostración. Notemos que

$$\frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} = g^{ij} - \hat{g}^{ij}$$

así

$$\begin{aligned} (g^{ij} - \hat{g}^{ij}) f^{-1}(\nu \cdot f) \hat{g}_{ij} &= g^{ij} \hat{g}_{ij} f^{-1}(\nu \cdot f) - \delta_{ij} f^{-1} \nu \cdot f \\ &= g^{ij} (g_{ij} + f^2 \tau_i \tau_j) f^{-1}(\nu \cdot f) - \delta_{ij} f^{-1} \nu \cdot f \\ &= \delta_{ij} f^{-1}(\nu \cdot f) + |\nabla \tau|^2 f(\nu \cdot f) - \delta_{ij} f^{-1}(\nu \cdot f) \\ &= |\nabla \tau|^2 f(\nu \cdot f). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.64. *Sea \vec{H} el campo vectorial de curvatura media de Σ en N . Entonces*

$$-\langle \vec{H}, \nu \rangle = \hat{H} + \frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} \left(\hat{h}_{ij} - f^{-1}(\nu \cdot f) \hat{g}_{ij} \right)$$

donde $\hat{H} = \hat{g}^{ij} \hat{h}_{ij}$ es la curvatura media de $\hat{\Sigma}$.

Demostración. De los Lemas 4.62 y 4.63 se tiene que

$$\begin{aligned}
-\langle \vec{H}, \nu \rangle &= -\langle g^{ij} D_{F_j} F_i, \nu \rangle \\
&= g^{ij} \langle F_i, D_{F_j} \nu \rangle \\
&= g^{ij} \left(\hat{h}_{ij} - \tau_i \tau_j f(\nu \cdot f) \right) \\
&= g^{ij} \hat{h}_{ij} - |\nabla|^2 f(\nu \cdot f) \\
&= \left(\hat{g}^{ij} + \frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} \right) \hat{h}_{ij} - \frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} f^{-1}(\nu \cdot f) \hat{g}_{ij} \\
&= \hat{H} + \frac{f^2 g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l}{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} \left(\hat{h}_{ij} - f^{-1}(\nu \cdot f) \hat{g}_{ij} \right).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.65. *La siguiente desigualdad se satisface en N*

$$-\langle \vec{H}, \nu \rangle \geq \hat{H}.$$

Demostración. Como N es estático convexo se tiene que

$$\hat{h}_{ij} - f^{-1}(\nu \cdot f) \hat{g}_{ij} \geq 0.$$

Además notemos

$$g^{ik} g^{jl} \tau_k \tau_l \geq 0.$$

Por lo tanto, de la Proposición 4.64, se concluye la desigualdad

$$-\langle \vec{H}, \nu \rangle \geq \hat{H}.$$

□

Observación 4.66. Considerando a ∂_t^\top que denota la parte tangente a Σ de ∂_t , lo cual implica que ∂_t^\perp es la parte normal a Σ . Además, como $\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle = -(f^2 + \langle \partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle) < 0$, pues Σ es espacial, entonces ∂_t^\perp es temporal.

Definición 4.67. Sea $w = \frac{\partial_t^\perp}{\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}}$ vector temporal, unitario y normal a Σ . Definimos $L = w + \nu$ y $\underline{L} = -w + \nu$.

Lema 4.68. *Los vectores $L = w + \nu$ y $\underline{L} = -w + \nu$ son nulos y normales a Σ . Además L está dirigido al futuro y \underline{L} está dirigido al pasado.*

Demostración. Como $\langle \partial_t, \nu \rangle = 0$ y $\langle \partial_t^\top, \nu \rangle = 0$ entonces $\langle \partial_t^\perp, \nu \rangle = 0$. De esta manera

$$\begin{aligned}\langle L, L \rangle &= \langle w + \nu, w + \nu \rangle \\ &= \langle w, w \rangle + 2\langle w, \nu \rangle + \langle \nu, \nu \rangle \\ &= \frac{1}{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle} \langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle + \frac{2}{\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}} \langle \partial_t^\perp, \nu \rangle + \langle \nu, \nu \rangle \\ &= -1 + 0 + 1 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto L es nulo. Ahora, dado que w y ν son normales a Σ entonces $w + \nu = L$ también lo es. Finalmente, como

$$\begin{aligned}\langle L, \partial_t \rangle &= \langle w + \nu, \partial_t \rangle \\ &= \langle w, \partial_t \rangle + \langle \nu, \partial_t \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}} \langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle < 0\end{aligned}$$

entonces L está dirigido al futuro. Análogamente se demuestra que \underline{L} es nulo y normal a Σ . Además, dado que $\langle \underline{L}, \partial_t \rangle = -\frac{1}{\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}} \langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle > 0$ se concluye que \underline{L} está dirigido al pasado. \square

Lema 4.69. *La siguiente igualdad se satisface*

$$\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle} = f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2}.$$

Demostración. Consideremos la base $\{F_1, F_2\}$ para $T_p(\Sigma)$ asociada al sistema de coordenadas x_1, x_2 en U . Expresamos a ∂_t^\top en términos de esta base, observando antes que

$$\langle \partial_t^\top, F_i \rangle = \langle \partial_t, \hat{F}_i + \tau_i \partial_t \rangle = -f^2 \tau_i$$

obtenemos la ecuación

$$\partial_t^\top = g^{ij} \langle \partial_t^\top, F_i \rangle F_j = -f^2 g^{ij} \tau_i F_j.$$

Por lo que deducimos

$$\partial_t^\perp = \partial_t + f^2 g^{ij} \tau_i F_j.$$

Así

$$\begin{aligned}\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle &= \langle \partial_t, \partial_t \rangle + f^2 g^{ij} \tau_i \langle \partial_t, F_j \rangle + f^2 g^{kl} \tau_k \langle \partial_t, F_l \rangle + f^4 g^{ij} g^{kl} \tau_i \tau_k \langle F_j, F_l \rangle \\ &= -f^2 - f^4 g^{ij} \tau_i \tau_j - f^4 g^{kl} \tau_k \tau_l + f^4 g^{ij} \delta_{kj} \tau_i \tau_k \\ &= -f^2 - f^4 g^{kl} \tau_k \tau_l \\ &= -f^2 - f^4 |\nabla \tau|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle} = f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2}.$$

□

Lema 4.70. *Dado \vec{J} el vector dual se cumple la siguiente igualdad*

$$-\langle \vec{J}, \partial_t \rangle = -\langle \vec{H}, \nu \rangle f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2}.$$

Demostración. Por el lema anterior, basta con demostrar que

$$\langle \vec{J}, \partial_t \rangle = \langle \vec{H}, \nu \rangle \sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}.$$

Dado que

$$\vec{J} = \frac{1}{2} (\langle \vec{H}, L \rangle \underline{L} - \langle \vec{H}, \underline{L} \rangle L).$$

Sustituyendo los valores de L y \underline{L} tenemos

$$\vec{J} = \langle \vec{H}, w \rangle \nu - \langle \vec{H}, \nu \rangle w.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle &= -\langle \vec{H}, \nu \rangle \langle w, \partial_t \rangle \\ &= -\langle \vec{H}, \nu \rangle \frac{\langle \partial_t^\perp, \partial_t \rangle}{\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}} \\ &= \langle \vec{H}, \nu \rangle \frac{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}{\sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}} \\ &= \langle \vec{H}, \nu \rangle \sqrt{-\langle \partial_t^\perp, \partial_t^\perp \rangle}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.71. *Las formas de volumen de Σ y $\hat{\Sigma}$ están relacionadas mediante la ecuación*

$$d\hat{\mu} = \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} d\mu.$$

Demostración. Dado que F y \hat{F} están definidas en el mismo abierto U , entonces las formas de volumen de Σ y $\hat{\Sigma}$ están dadas por

$$d\mu = |\det g_{ij}|^{1/2} dx_1 \wedge dx_2$$

y

$$d\hat{\mu} = |\det \hat{g}_{ij}|^{1/2} dx_1 \wedge dx_2$$

respectivamente. Sea $x_0 \in U$ tal que F_1 y F_2 formen un marco ortonormal, entonces $g_{ij} = \delta_{ij}$ en x_0 , así

$$d\mu_{x_0} = dx_1 \wedge dx_2$$

y

$$d\hat{\mu}_{x_0} = |\det \hat{g}_{ijx_0}|^{\frac{1}{2}} dx_1 \wedge dx_2.$$

Pero, dada la igualdad $\hat{g}_{ij} = g_{ij} + f^2 \tau_i \tau_j$ se tiene que

$$\det \hat{g}_{ijx_0} = \begin{vmatrix} 1 + f^2 \tau_1^2 & f^2 \tau_1 \tau_2 \\ f^2 \tau_2 \tau_1 & 1 + f^2 \tau_2^2 \end{vmatrix} = 1 + f^2 (\tau_2^2 + \tau_1^2) = 1 + f^2 |\nabla \tau|^2.$$

Por lo tanto

$$d\hat{\mu} = \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} d\mu.$$

□

Proposición 4.72. *Sea \vec{H} el vector de curvatura media de Σ en M y \vec{J} el vector dual. Entonces se cumple la desigualdad*

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu \geq \int_{\hat{\Sigma}} \hat{H} f d\hat{\mu}.$$

Demostración. Por el Lema 4.70 tenemos que

$$-\langle \vec{J}, \partial_t \rangle = -\langle \vec{H}, \nu \rangle f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2}.$$

Luego, de la Proposición 4.65 obtenemos la desigualdad

$$-\langle \vec{J}, \partial_t \rangle \geq \hat{H} f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2}.$$

Integrando ambos lados de la desigualdad sobre Σ , recordando que tanto F como \hat{F} están definidas en el mismo abierto U , y por el Lema 4.71 concluimos

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu &\geq \int_{\Sigma} \hat{H} f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} d\mu \\ &= \int_U \hat{H} f \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} d\mu \\ &= \int_U \hat{H} f d\hat{\mu} \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} \hat{H} f d\hat{\mu}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.73. Sean $|\Sigma|$ y $|\hat{\Sigma}|$ que denotan las áreas de Σ y $\hat{\Sigma}$ respectivamente. Entonces se satisface la desigualdad

$$|\hat{\Sigma}| \geq |\Sigma|.$$

Demostración. Primero notemos que

$$\sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} \geq 1$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \int_{\Sigma} 1 \cdot d\mu &\leq & \int_{\Sigma} \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} d\mu \\ &= & \int_U \sqrt{1 + f^2 |\nabla \tau|^2} d\mu \\ &= & \int_U 1 \cdot d\hat{\mu} \\ &= & \int_{\Sigma} 1 \cdot d\hat{\mu} \\ &= & |\hat{\Sigma}|. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.74. Sea Σ que está contenida en la hipersuperficie temporal estática convexa $N \subset M$. Entonces la desigualdad

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}$$

se satisface.

Demostración. Como Σ es difeomorfo a S^2 y Σ es difeomorfo a $\hat{\Sigma}$ entonces podemos suponer que $\hat{\Sigma}$ es estrellada y convexa. Luego, como $\hat{\Sigma}$ pertenece a la intersección de la hipersuperficie obtenida la hacer $t = 0$ y N , la cual es totalmente geodésica, (ver figura 4.1) entonces cumple las hipótesis del Teorema 4.22 que nos proporciona la validez de la desigualdad

$$\int_{\hat{\Sigma}} \hat{H} f d\hat{\mu} \geq \sqrt{16\pi|\hat{\Sigma}|} - 16\pi m.$$

Así, de la Proposición 4.72, la desigualdad anterior y el Lema 4.73 obtenemos

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle &\geq \int_{\hat{\Sigma}} \hat{H} f d\hat{\mu} \\ &\geq \sqrt{16\pi|\hat{\Sigma}|} - 16\pi m \\ &\geq \sqrt{16\pi|\Sigma|} - 16\pi m. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\int_{\Sigma} \langle \vec{J}, \partial_t \rangle d\mu + 16\pi m \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}.$$

□

Bibliografía

- [1] Brendle Simon and Wang Mu-Tao, *A Gibbons-Penrose inequality for surfaces in Schwarzschild spacetime.* Comm. Math. Phys. 330, 33-43 (2014).
- [2] Brendle Simon, Hung Pei-Ken and Wang Mu-Tao, *A Minkowski inequality for hypersurfaces in the anti-de Sitter-Schwarzschild manifold.* Comm. Pure Appl. Math. 69 , no. 1, 124–144 (2016).
- [3] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity.* Academic Press, New York (1983).
- [4] John K. Beem, Paul E. Ehrlich and Kevin L. Easley, *Global Lorentzian Geometry.* Marcel Dekker, Inc, New York (1996).
- [5] Bang-Yen Chen *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -invariants and Applications.* World Scientific Publishing (2011).