Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

Superficies con curvaturas gaussiana y media constantes cero en el espacio de Minkowski de dimensión tres

Tesis

Que para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Fernando Adrián Frías Ochoa

Director de Tesis:
Dr. Gabriel Ruiz Hernández
2018

Gabriel Ruiz Hernández
Presidente

Óscar Alfredo Palmas Velasco
Secretario

Jesús Jerónimo Castro
Vocal

Francisco Gerardo Jímenez López
Suplente

José Enrique Crespo Baltar
Suplente

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

Superficies con curvaturas gaussiana y media constantes cero en el espacio de Minkowski de dimensión tres

Tesis

Que para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Fernando Adrián Frías Ochoa

Director de Tesis:
Dr. Gabriel Ruiz Hernández
2018

Gabriel Ruiz Hernández
Presidente

Óscar Alfredo Palmas Velasco
Secretario

Jesús Jerónimo Castro
Vocal

Francisco Gerardo Jímenez López
Suplente

José Enrique Crespo Baltar
Suplente

Dedicado a todas aquellas personas que creyeron fielmente en mí.

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios que dispuso en mi vida todo lo necesario para lograr esta meta, eso incluye a mis padres que me apoyaron en todo, a mis hermanos por estar ahí para mí en todo momento, a mi novia que creyó en mí y a todas aquellas personas que de alguna u otra forma sirvieron de apoyo en mi formación tanto personal como académica, a todos ellos les tengo un gran afecto y estoy muy agradecido con todo ellos.

"Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN115017. Agradezo a la DGAPA-UNAM la beca recibida".

Resumen

En el presente trabajo se busca responder a la pregunta ¿cuáles son las superficies que tienen curvaturas gaussiana K y media H constantes cero en el espacio de Minkowski?. Como se verá en el resultado principal, la respuesta a esta última pregunta en el caso de Minkowski es notablemente diferente a la del caso euclidiano. Es bien conocido que la respuesta a nuestra pregunta en el caso euclidiano de $\mathbb{R}^3$ son los planos, es decir, las únicas superficies en $\mathbb{R}^3$ con $K \equiv 0 \equiv H$ son los planos, sin embargo en el espacio de Minkowski no necesariamente. Existen superficies en dicho espacio que tienen ambas curvaturas constantes cero pero no son planos, tales superficies son una clase en particular de superficies regladas, desde luego los planos de un cierto tipo llamados *no degenerados* tienen también amabas curvaturas constantes cero, de modo que este trabajo abre una puerta para comparar la geometría del espacio euclidiano con la del espacio de Minkowski. Asimismo aquí se presentan algunas técnicas para trabajar geometría diferencial de superficies en $\mathbb{R}^3_1$.

Introducción

El tema principal que atañe a este trabajo es una clase muy particular de superficies en $\mathbb{R}^3_1$ (lo que ello signifique) que estudiaremos desde el punto de vista geométrico utilizando las herramientas del cálculo vectorial y el álgebra lineal. Una manera intuitiva de describir a las superficies se hace a través de su curvatura, podemos fijarnos en cada punto de una superficie y estudiar cómo se curva la superficie en las inmediaciones de tal punto, esto nos puede dar una idea (al menos local) sobre la forma de la superficie. Para ello se tienen que definir herramientas muy precisas que nos ayuden en tal trabajo, por ejemplo, podría suceder que se estudie una superficie dada, posteriormente otra y obtengamos que ambas superficies se curvan de la misma forma, entonces podemos preguntarnos si son la misma superficie, evidentemente la respuesta es no, porque puede darse el caso en que las superficies tengan la misma forma pero se encuentren en lugares diferentes en el espacio o quizá hasta con alguna rotación, lo cual hace que ya no sean la misma superficie. Entonces el problema ahora consiste en definir aquellas cosas que caracterizan a las superficies, mismas que las hacen similares o diferentes, este tipo de preguntas pueden ser bien respondidas desde el punto de vista de la "geometría diferencial".

Al igual que en muchas áreas de las matemáticas se pueden presentar conceptos y/o herramientas en diferentes espacios, por ejemplo, podemos hablar de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ o hablar también de conjuntos abiertos en espacios topológicos, igualmente se puede hablar de vectores en $\mathbb{R}^n$ o de una matriz como vector, de la misma manera que podemos considerar superficies inmersas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, o tomarlas en otros espacios con propiedades distintas a las bien conocidas en $\mathbb{R}^3$. Las superficies que estudiaremos aquí las consideraremos inmersas en el *espacio de Minkowski* de dimensión tres y que denotaremos por $\mathbb{R}^3_1$.

El pensar en superficies en general resulta un campo amplio de trabajo, que si bien ya ha sido muy estudiado desde el siglo XVIII, aún se pueden presentar resultados nuevos si se piensa en superficies que satisfacen algunas propiedades muy particulares, es por ello que consideramos en el presente texto a un tipo especial de superficies, a saber aquellas con curvaturas media y gaussiana constantes cero.

Como se definirá en su momento la geometría de $\mathbb{R}^3_1$ permite clasificar algunos objetos geométricos como los vectores, las rectas, más en general las curvas, los planos, etc. En particular, las superficies se pueden clasificar de acuerdo a las propiedades de su producto escalar definido en dicho objeto, esta propiedad que posteriormente se definirá con precisión las clasifica como *superficies degeneradas* y *no degeneradas*. Las superficies en las que aquí nos centramos aparte de tener las condiciones antes mencionadas sobre las curvaturas media y gaussiana serán no degeneradas, desde luego que se puede presentar el estudio de las superficies degeneradas pero ese no es el objetivo de este trabajo.

Quizá el lector haya leído antes acerca de las superficies con curvaturas media y gaussiana, al menos en el caso euclidiano, un estudio muy amigable y esquemático sobre superficies es presentado en [6] en el que se trata el caso euclidiano, ahí el lector podrá convencerse de que en el caso euclidiano las superficies con curvaturas media y gaussiana constantes cero son sólo los planos, así pues el punto principal que se quiere exhibir en este trabajo es que en el caso de $\mathbb{R}^3_1$ la respuesta es que sí, efectivamente los planos tienen ambas curvaturas constantes cero, pero

además existen otro tipo de superficies que cumplen con dicha condición y que no son planos, como se ha mencionado antes un cierto tipo de superficies llamadas *superficies regladas* con alguna condición extra.
En la literatura es muy común encontrar comparaciones y diferenciar objetos, mismas que nos permiten identificar de buena manera las cosas, y las matemáticas no son la excepción, existen muchas comparaciones de todos los tipos: las relaciones de orden, las relaciones de equivalencia, la comparación de topologías, por citar algunas. Visto de esta forma el presente trabajo muestra una manera de comparar una de las tantas diferencias que existen entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3_1$, espacios que en muchos aspectos son muy parecidos y en otros diferentes, es en este sentido en el que nuestro trabajo puede ser considerado como un aporte al estudio de la geometría.
Quisiera además mencionar un texto que fue de mucha ayuda para la realización de este trabajo [7], el cual es una muy buena referencia para introducir al estudio de superficies en el espacio de Minkowski de dimensión 3, puesto que abarca superficies con otras características y no solo se enfoca en las curvaturas gaussiana y media, el lector puede encontrar más ejemplos y herramientas en dicha referencia que le sirvan como una buena guía sobre este tema. Otra referencia importante es [4], en ella se pueden encontrar algunas interpretaciones físicas de los conceptos aquí presentados y sus aplicaciones en el marco de la teoría especial de la relatividad.
El texto está escrito de manera que en el primer capítulo se exponen las definiciones básicas que constituyen el espacio de Minkowski de dimensión tres, además se hace un esfuerzo por ver cómo es la geometría de tal espacio haciendo contraste con la geometría euclidiana. En la sección de álgebra lineal se encuentran algunas proposiciones que serán de suma importancia para probar los resultados principales, ahí la proposición de mayor importancia muestra las tres posibilidades que puede tener la representación matricial de una transformación lineal que va de un plano temporal en sí mismo (*veáse Teorema 1.4.17*). Como sabemos en el caso euclidiano, es decir, un plano con producto interno (que en este marco de estudio es llamado un plano espacial), la representación matricial de una transformación lineal en un plano espacial siempre se puede diagonalizar, lo que nos permitirá clasificar las posibilidades de la matriz de representación del operador de forma, mismo que se introduce en el capítulo dos.
En este capítulo se presentan las definiciones de la aplicación de Gauss, el operador de forma y las curvaturas gaussiana y media para el caso del espacio de Minkowski de dimensión tres, así como las técnicas para calcular dichas curvaturas. Además se introducen varios ejemplos que sirven de ayuda para ilustrar el tipo de superficies de las que se va a hablar y que de igual manera son útiles para el tipo de razonamiento a seguir, en esta sección de técnicas de cálculo y ejemplos se muestra una parte del problema principal, pues en el Ejemplo 2.3.4 se calculan las curvaturas de la superficie que ahí se presenta y que posteriormente en el capítulo cuatro se muestra que son sólo este tipo de superficies y los planos los que poseen ambas curvaturas constantes cero.
Al final del capítulo se muestran varios resultados que resuelven una parte del problema, para una superficie espacial el operador de forma es siempre diagonalizable (*veáse Teorema 2.4.3*), lo cual puede ser visto como el caso euclidiano del problema principal, se muestra también que una superficie con operador de forma constante cero tiene que ser un plano. Con este último resultado, se demuestra que en el caso espacial y el caso temporal con operador de forma diagonalizable con ambas curvaturas gaussiana y media constantes cero, la superficie tiene que ser un plano. En dicho capítulo también se muestra el resultado recíproco, es decir que un plano tiene operador de forma constante cero y por lo tanto tiene curvaturas gaussiana y media constantes cero.
El capítulo tres presenta herramientas más sofisticadas que son de utilidad en la prueba del teorema principal, también se aprovechan dichas herramientas para definir las superficies umbílicas y mostrar cuáles son todas estas, para así enfatizar un caso particular en que la superficie es temporal y el operador de forma tiene dos vectores propios nulos, en tal caso lo que se concluye

es que la superficie o es parte de un plano temporal o de una superficie de De Sitter (*veáse el Corolario 3.3.4*). Entre las definiciones importantes presentadas en este capítulo se encuentran la de conexión del espacio de Minkowski, misma que ha de servir para definir la conexión inducida y la segunda forma fundamental de una superficie, dichos conceptos harán ver que las superficies con curvaturas gaussiana y media son superficies regladas, lo cual se utiliza en el capítulo cuatro.
El capítulo cuatro tiene como parte principal hablar sobre las superficies regladas con ciertas condiciones adicionales tal como se les consideró en el Ejemplo 2.3.4. En la Proposición 4.1.1, se obtienen de manera general y explícita los valores de las curvaturas gaussiana y media para una superficie reglada con ciertas condiciones sobre sus curvas que le generan, de manera inmediata se observa la condición especial para que ambas curvaturas sean constantes cero, posteriormente se procede al cálculo del operador de forma de las superficies regladas con tales condiciones.
El resultado principal es el Teorema 4.2.4:

Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficies tipo tiempo con $H \equiv 0 \equiv K$, entonces o M es parte de un plano o bien se puede parametrizar como $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tT_0$, dónde $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 = \langle T_0, T_0 \rangle$ y T_0 es un vector constante nulo.

Dicho en palabras, muestra que las condiciones de curvatura gaussiana y media constantes cero conducen a que localmente la superficie es parte de un plano o bien, parte del tipo especial de superficies regladas como las que se presentan al inicio del capítulo.
Para mostrar tal afirmación primero se toma el caso en el que operador de forma es diagonalizable y junto con las condiciones impuestas sobre las curvaturas conduce a que el operador de forma es constante cero y como se comentó anteriormente esto lleva a que la superficie es parte de un plano; para el segundo caso se aplican las hipótesis sobre las curvaturas y se hace notar que el operador de forma tiene una dirección principal nula con valor propio asociado cero, posteriormente se muestra que la segunda forma fundamental de dicha dirección principal es cero, así por propiedades que se presentan en el capítulo tres, la conexión del espacio de dicha dirección coincide con la conexión inducida, a su vez forma un conjunto linealmente dependiente con la dirección principal nula, propiedad que escrita en términos de la curva integral de la dirección principal nula nos dice que tal curva es una recta nula, de ahí se concluye que la superficie es localmente una superficie reglada y reparametrizando se obtiene parametrización final que concluye el teorema, así mismo se presentan varios ejemplos explícitos con sus correspondientes gráficas.
En el capítulo cuatro también se muestra otro teorema (Teorema 4.2.8), el cual establece de qué forma son las superficies temporales con curvatura media constante cero, también llamadas superficies mínimas:

Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie temporal. La superficie es mínima ($H \equiv 0$) si y sólo si localmente se puede parametrizar como $\varphi(t,s) = \alpha(t) + \beta(s)$ con $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0 = \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle$, $\alpha : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, $\beta : (c,d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ y $\langle \alpha'(t), \beta'(s) \rangle \neq 0$.

Para probar la suficiencia basta con tomar la parametrización y aplicar las técnicas expuestas en el capítulo dos para calcular sus curvaturas gaussiana y media. Mientras que dada la hipótesis de la curvatura media constante cero se usa el Lema 4.2.7 para obtener en principio una parametrización, posteriormente la demostración se centra en obtener el valor de la derivada parcial mixta de la parametrización finalmente mediante integración, una vez terminada la demostración se presenta un ejemplo explícito y una gráfica de este.
De esta manera el lector puede seguir el texto ayudado de varios ejemplos tanto para realizar cálculos como para visualizar de manera satisfactoria las superficies, además la estructura del texto pretende ser autocontenida y en caso de que el lector requiera más detalles o profundizar más al final, se incluyen en la bibliografía los libros y documentos base de este trabajo.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

El espacio de Minkowski de dimensión tres

1.1. La métrica de Lorentz

El espacio de Minkowski $n-dimensional$ rigurosamente hablando no es más que considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ usual, es decir, elementos de la forma $(x_1, ..., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., n$, tomar las suma de elementos usual, es decir, sean $u = (u_1, ..., u_n)$ y $v = (v_1, ..., v_n)$, entonces $u + v = (u_1 + v_1, ..., u_n + v_n)$ y multiplicación por escalar usual, sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u = (\lambda u_1, ..., \lambda u_n)$, lo cual define un espacio vectorial, adicionalmente considerar el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ de elementos de la manera siguiente

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + ... + u_{n-1} v_{n-1} - u_n v_n,$$

a dicho producto se le conoce como *métrica de Lorentz*. A tal espacio vectorial con el producto antes mencionado se le llama *Espacio de Minkowski de dimensión n* y se denota por $\mathbb{R}_1^n$.

Como el título lo menciona el espacio en el cual se centrará la investigación será el caso de dimensión 3, es decir en $\mathbb{R}_1^3$.

Definición 1.1.1 (Producto escalar) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, si $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal ($\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$), es simétrico ($\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$) para cualesquiera $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ y además es no degenerado (sea $v \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\langle u, w \rangle = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}_1^3$, entonces $v = 0$), se dice que $\langle , \rangle$ es un *producto escalar* sobre V. (*veáse*, [5, pág 47])

Observación 1.1.2 (La métrica de Lorentz es un producto escalar) Veremos a continuación que la métrica de Lorentz es un producto escalar. Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ elementos de $\mathbb{R}_1^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- (Bilinealidad) $\langle \alpha u + v, w \rangle = (\alpha u_1 + v_1) w_1 + (\alpha u_2 + v_2) w_2 - (\alpha u_3 + v_3) w_3 = \alpha u_1 w_1 + v_1 w_1 + \alpha u_2 w_2 + v_2 w_2 - \alpha u_3 w_3 - v_3 w_3 = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- (Simétrico) $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 = v_1 u_1 + v_2 u_2 - v_3 u_3 = \langle v, u \rangle$.
- (No degenerado) sea $v \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}_1^3$, $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3 = 0$ para todo $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$, entonces $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ y por tanto $v = 0$.

Por lo tanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar.

Definición 1.1.3 La **"norma"** inducida por el producto de Lorentz se calcula de la siguiente forma $\|u\| = \sqrt{|\langle u, u\rangle|}$.

Nótese el énfasis que se hizo en la palabra norma puesto que la norma que induce el producto de Lorentz no es una norma como tal ya que no satisface el postulado de positivo definido, así que el llamarlo norma es un abuso de lenguaje pero a partir de ahora en adelante se le seguirá llamando norma, puesto que en la practica así se le llama, teniendo en claro lo que esto significa.

En particular un producto escalar puede cumplir que $\langle \cdot, \cdot \rangle > 0 (< 0)$ para todo $u, v \neq 0$ elementos de $\mathbb{R}^3_1$, en tal caso decimos que el producto es positivo (negativo) definido y dicho producto se le llama producto interno.
Nótese que la métrica de Lorentz no es un producto interno dado que el vector $e_1 = (1, 0, 0)$ es tal que $\langle e_1, e_1\rangle = 1$ mientras que $e_3 = (0, 0, 1)$ es tal que $\langle e_3, e_3\rangle = -1$.

Definición 1.1.4 Dados $u, v \in \mathbb{R}^3_1$, se dice que son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$.

El conjunto de los vectores ortogonales a sí mismos se le conoce como *cono de luz de* $\mathbb{R}^3_1$ que denotaremos por C. Cualquier elemento $u = (u_1, u_2, u_3) \in C$ cumple la siguiente ecuación $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$.

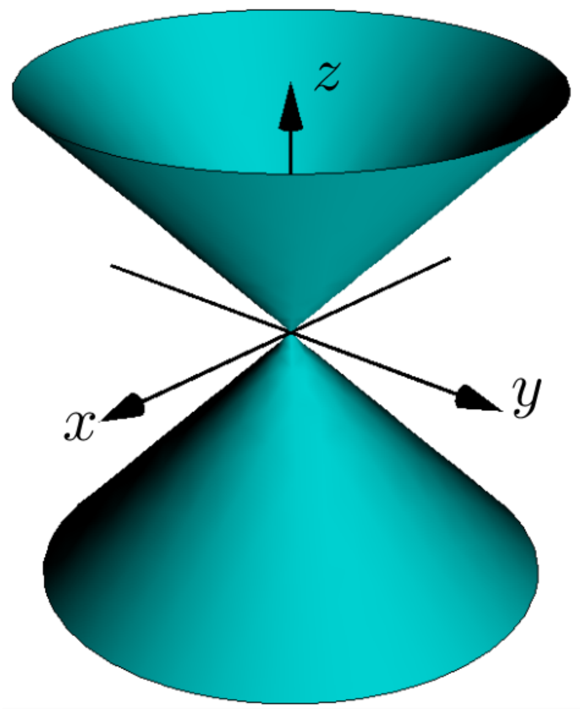

Figura 1.1: Cono de luz

Un concepto muy útil es el de producto cruz, el cual dados $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ nos da un vector $u \times v$ que es ortogonal a ambos, si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, v_1 u_2 - u_1 v_2)$$

A dicho producto se le conoce como *producto cruz lorentziano*.

1.2. Caracter causal

Una cierta clasificación es importante cuando se tratan temas dentro de la “geometría de Lorentz”, esta clasificación se le conoce como *caracter causal* y sirve para clasificar vectores, curvas, superficies y subespacios vectoriales, y se dice que tal vector, curva, superficie , etc, tiene un caracter causal, el cual puede ser de tipo espacio, tipo tiempo o tipo luz, también se les llama espacial, temporal o nulo.

Definición 1.2.1 Sea $u \in \mathbb{R}^3_1$ un vector. Decimos que u tiene caracter causal tipo:

- espacio si $\langle u, u \rangle > 0$,
- tiempo si $\langle u, u \rangle < 0$ o bien,
- luz si $\langle u, u \rangle = 0$.

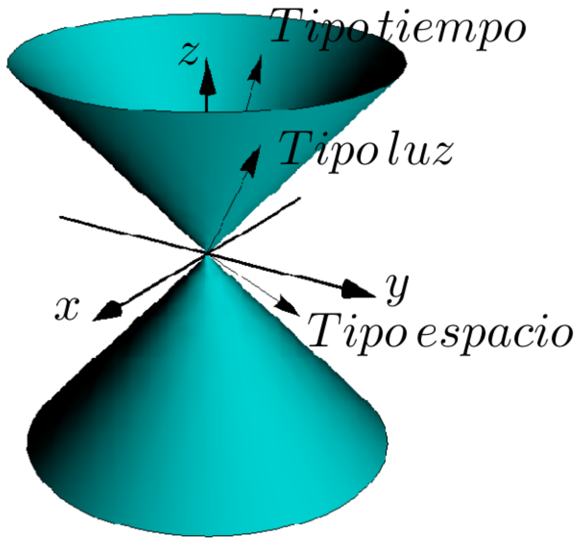

Figura 1.2: Caracter causal de vectores

Definición 1.2.2 Sea $u \in \mathbb{R}^3_1$, decimos que $v \in \mathbb{R}^3_1$ es ortogonal a u si $\langle u, v \rangle = 0$.

Además dado cualquier vector $u \in \mathbb{R}^3_1$ tal que $u = (x, y, z)$ un vector ortogonal a u está dado por

$$v = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

pues

$$\langle u, v \rangle = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2) - z\sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

y por otro lado

$$\langle v, v \rangle = -x^2 - y^2 + z^2 = -\langle u, u \rangle,$$

es decir, el carcater causal de v depende directamente del caracter causal de u. Dicho de otro modo tenemos lo siguiente:

- espacial, si v es temporal,
- temporal, si v es espacial,

- nulo, si v es nulo.

Ejemplo 1.2.3 El vector $u = (2, 0, 1)$ es tipo espacio pues $\langle u, u\rangle = 2^2 + 0^2 - 1^2 = 3 > 0$.

Ejemplo 1.2.4 El vector $v = (1, 0, 2)$ es tipo tiempo pues $\langle v, v\rangle = 1^2 + 0^2 - 2^2 = -3 < 0$.

Ejemplo 1.2.5 El vector $w = (1, 0, 1)$ es tipo luz pues $\langle w, w\rangle = 1^2 + 0^2 - 1^2 = 0$

Similarmente podemos definir el caracter causal de curvas, sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$: decimos que la curva $\alpha(s)$ tiene caracter causal espacial, temporal o nulo si $\alpha'(s)$ tiene caracter causal espacial, temporal o nulo respectivamente para todo $s \in I$, en otras palabras:

Definición 1.2.6 Caracter causal de curvas en $\mathbb{R}^3_1$ Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, llamamos a $\gamma(s)$ curva en $\mathbb{R}^3_1$ y decimos que tiene caracter casual

- espacial, si $\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle > 0$ para todo $s \in I$,
- temporal, si $\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle < 0$ para todo $s \in I$,
- nulo, si $\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = 0$ para todo $s \in I$.

Ejemplo 1.2.7 La curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definida como $\gamma(s) = (\operatorname{sen} s, \cos s, 0)$ es tipo espacio, pues $\gamma'(s) = (\cos s, -\operatorname{sen} s, 0)$ y $\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s - 0^2 = 1 > 0$ para todo $s\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.8 La curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definida como $\beta(s) = (\cosh s, 0, \operatorname{senh} s)$ es tipo tiempo, pues $\beta'(s) = (\operatorname{senh} s, 0, \cosh s)$ y $\langle \beta'(s), \beta'(s)\rangle = \operatorname{senh}^2 s + 0^2 - \cosh^2 s = -(\cosh^2 s - \operatorname{senh}^2 s) = -1 < 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.9 Y por último la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definida como $\alpha(s) = (\operatorname{sen} s, \cos s, s)$ es tipo luz, pues $\alpha'(s) = (\cos s, -\operatorname{sen} s, 1)$ y $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s - 1^2 = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Presentamos ahora un resultado sobre curvas nulas que en su momento será utilizado.

Proposición 1.2.10 Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ una curva nula tal que $\gamma''(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$ para todo $s \in I$, entonces γ es parte de una recta nula.

Demostración Escríbase $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, entonces

$$\gamma'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) \text{ y } \gamma''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s)), \text{ dado que } \langle \gamma', \gamma'\rangle = 0$$

entonces $\langle \gamma', \gamma''\rangle = 0$, además por hipótesis se tiene que $x''(s) = \lambda(s)x'(s)$, $y''(s) = \lambda(s)y'(s)$ y $z''(s) = \lambda(s)z'(s)$, que también podemos reescribir como

$$ln(x'(s))' = \frac{x''(s)}{x'(s)} = \lambda(s),\ ln(y'(s))' = \frac{y''(s)}{y'(s)} = \lambda(s) \text{ y } ln(z'(s))' = \frac{z''(s)}{z'(s)} = \lambda(s),$$

con lo cual $x'(s) = ae^{f(s)}$, $y'(s) = be^{f(s)}$ y $z'(s) = ce^{f(s)}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes tales que $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ y $f'(s) = \lambda(s)$, que escrito de otra forma nos queda que $\gamma'(s) = e^{f(s)}T_0$, donde $T_0 = (a, b, c)$, i.e., T_0 es un vector constante nulo, integrando tenemos pues que $\gamma(s) = h(s)T_0 + v$ con $h'(s) = e^{f(s)}$ y v un vector fijo, es decir, γ es una recta tipo luz. □

Ahora como hemos visto ya $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$, es decir el producto escalar está definido en todo $\mathbb{R}^3_1$, pero si restringimos $\langle \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, donde V es un subespacio vectorial, a la cual llamamos *métrica inducida en* V o MI podemos definir el caracter causal de un subespacio vectorial V.

Definición 1.2.11 Sean V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, decimos que $V \subset \mathbb{R}^3_1$ tiene caracter causal :

- espacial si la métrica inducida es no degenerada positiva definida, es decir, la métrica restringida a V es un producto interno,
- temporal si considerando la métrica restringida es no degenerada y tenemos que

  $$max\{dimW : W \text{ es un subespacio vectorial de } V \text{ y MI es negativa definida}\} = 1,$$

  decimos que la métrica restringida es *lorentziana*,
- nulo si la métrica inducida es degenerada.

Nótese que la MI puede ser degenerada, por ejemplo, considérese $\ell = \{v \in \mathbb{R}^3_1 : v = \lambda(1,0,1)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}\}$, es decir ℓ es la recta generada por $w = (1,0,1)$, donde $\langle w,w\rangle = 0$, con lo cual w tiene caracter causal nulo, tomemos $u \in \ell$, entonces $u = \alpha w$ de manera que $\langle u,u\rangle = \alpha^2\langle w,w\rangle = 0$ y claramente $u \neq 0$ si $\alpha \neq 0$, por lo tanto MI es degenerada.

Definición 1.2.12 Un subespacio vectorial cuya métrica inducida es no degenerada, se dice *subespacio no degenerado.*

Por lo tanto si un subespacio V es no degenerado entonces o es espacial, o bien es temporal.

Se puede visualizar también de una manera muy geométrica el caracter causal de planos en $\mathbb{R}^3_1$ que pasan por el origen tal como se presenta en el siguiente lema.

Proposición 1.2.13 Sea P un plano que pasa por el origen. El plano es:

- espacial si y sólo si no interseca el cono de luz.
- temporal si y sólo si interseca al cono de luz pero no es tangente a este.
- nulo si y sólo si es tangente al cono de luz, i,e., el plano y el cono de luz sólo se intersecan a lo largo de una recta nula.

Demostración Para el primer inciso supongamos que P es un plano espacial, esto es (por definición), la métrica inducida es positiva definida, así pues todos los vectores de la superficie son espaciales, es decir, el plano no interseca al cono de luz, pues este solo consta de vectores nulos y en el interior los vectores son temporales.
Ahora si V es temporal se tiene que $max\{dimU : \langle\cdot,\cdot\rangle\mid_U$ es negativa definida$\} = 1$, es decir, existe un vector v temporal que pertenece al plano P y dado que los vectores temporales están acotados por el cono de luz se sigue que P interseca al cono de luz, y esto no puede ser tangente al cono de luz pues un plano tangente al cono de luz no contiene vectores temporales.
Por último si P es un plano nulo, entonces la MI es degenerada, esto es, que exista una dirección v nula que vive en el plano P y que además es ortogonal al dicho plano, en particular es ortogonal a sí mismo ($\langle v,v\rangle = 0$), así P es tangente al cono de luz a lo largo de la recta generada por V: Si este no fuese el caso, se tendría que existe un vector temporal en P para el cual la recta generada por ese vector tendría MI negativa definida, es decir, P sería un plano temporal, lo cual es una contradicción con el hecho de que P es nulo. Por lo tanto P es tangente al cono de luz a lo largo de una recta nula. $\square$

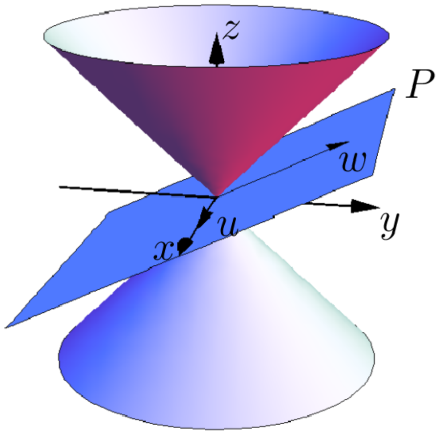

Figura 1.3: Plano espacial generado por $u = (1, 0, 0)$ y $v = (0, 2, 1)$.

Ejemplo 1.2.14 El plano generado por los vectores $u = (1, 0, 0)$ y $v = (0, 2, 1)$ es tipo espacio como se puede ver geométricamente, su ecuación está dada por $2z - y = 0$.

Ejemplo 1.2.15 El plano generado por los vectores $u = (0, 1, 2)$ y $v = (1, 1, 2)$ es tipo espacio que de igual forma puede comprobarse observado su gráfica que es transversal al cono de luz, su ecuación está dada por $2y - z = 0$.

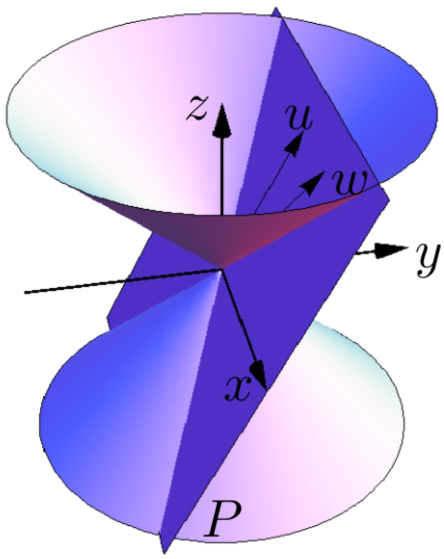

Figura 1.4: Plano temporal generado por $u = (0, 1, 2)$ y $v = (1, 1, 2)$.

Ejemplo 1.2.16 Por último el plano generado por los vectores ortogonales al vector $u = (1, 0, 1)$ es tipo luz ya que es tangente al cono de luz a lo largo de la recta generada por el vector u, su ecuación está dada por $x - z = 0$.

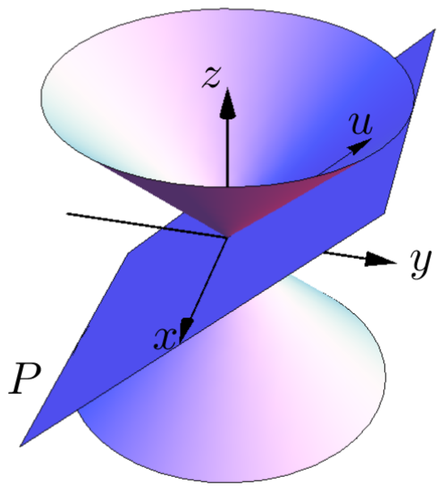

Figura 1.5: Plano nulo generado por los vectores ortogonales a $u = (1, 0, 1)$.

1.3. Espacio de Minkowski de dimensión dos

Sea $A = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| = 1\}$ en $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle_E)$ donde $\langle , \rangle_E$ denota el producto interno euclidiano, entonces un vector $u = (x, y) \in A$ es tal que $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, por lo tanto A representa el círculo unitario como se muestra en la siguiente figura.
Dado que el espacio en el que se está trabajando es el espacio euclidiano recordemos que en

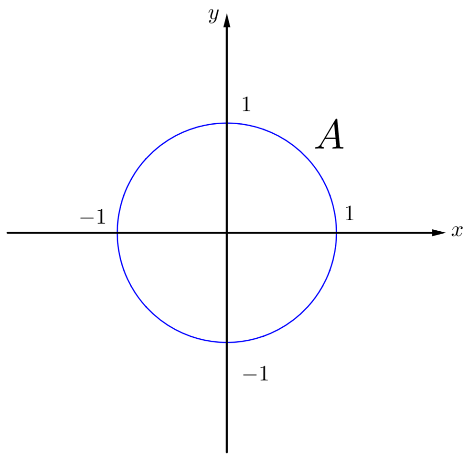

Figura 1.6: Conjunto A en el plano euclidiano con el producto $\langle , \rangle_E$

este espacio un conjunto B es compacto si y sólo si es *cerrado* y *acotado*.
Pero si A está en $\mathbb{R}^2_1$, es decir, tenemos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales y el producto de dos vectores $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ es $\langle u, v \rangle_L = x_1x_2 - y_1y_2$, entonces la norma que induce este producto es la $\|u\| = \sqrt{|x_1^2 - y^2|}$, con lo cual un vector $u = (x_1, y_1)$ vive en A si cumple que $\|u\| = \sqrt{|x_1^2 - y_1^2|} = 1$ si y sólo si $x_1^2 - y^2 = \pm 1$ que es un conjunto de 4 hipérbolas como se muestra a continuación
Recordemos que si B es un conjunto compacto, entonces B es cerrado y acotado, aplicando la contrapositiva de esta implicación tenemos que si un conjunto B no es cerrado o no es acotado, entonces B no es compacto, obsérvese que en este caso A *no es acotado* (con la métrica euclidana) y por tanto A no es compacto.

En la práctica la mayoría de las personas están familiarizadas con las características intrínse-

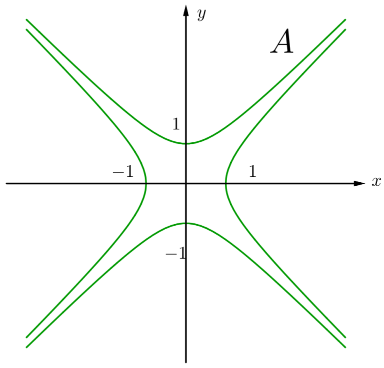

Figura 1.7: Conjunto A en $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar $\langle u, v\rangle_L$

cas de la geometría del espacio euclidiano, entre dichas características está el visualizar dos vectores ortogonales como los vectores cuyo ángulo que se forma entre ellos es de exactamente 90°, pero en la geometría de Lorentz dos vectores ortogonales no necesariamente forman un ángulo de 90° como veremos a continuación:
Considérese el plano $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial, pero tomemos el producto escalar de Lorentz, esto es, para dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ el producto escalar entre ellos se calcula como $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2$, es decir considérese el espacio de Minkowski de dimensión 2, $\mathbb{R}^2_1$. En dicho espacio el cono de luz es el conjunto $C = \{u : \mathbb{R}^2_1 : u_1^2 - u_2^2 = 0\} \setminus \{0\}$.

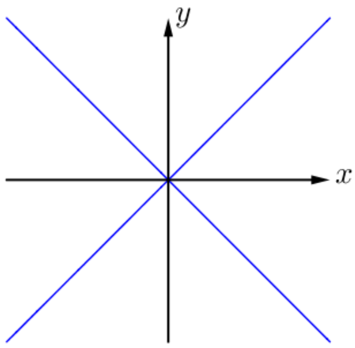

Figura 1.8: Cono de luz en $\mathbb{R}^2_1$

En el momento en el que se definió el cono de luz se hizo la observación de que el cono de luz podía ser visto como el lugar geométrico de los vectores nulos, de igual manera podemos dar una imagen geométrica sobre el lugar dónde se encuentran los vectores espaciales y temporales. Los vectores temporales se ubican por dentro del cono de luz mientras que los vectores espaciales se encuentran por fuera tal como se presenta en la siguiente imagen.

Consideremos un vector $v \in \mathbb{R}^2_1$ tipo espacio, en geometría euclidiana dado un vector existe una circunferencia de un cierto radio que contiene a dicho vector, de manera similar existe una hipérbola con ecuación $x^2 - y^2 = a$ que contiene a v, de tal suerte que podemos ver que v se puede escribir como $v = (a \cosh \varphi, a \operatorname{senh} \varphi)$, claramente $\langle v, v\rangle = a$, un vector w ortogonal a v se puede escribir como $w = (a \operatorname{senh} \varphi, a \cosh \varphi)$, es fácil ver que $\langle v, w\rangle = 0$ y que $\langle w, w\rangle = -a$, con lo cual existe otra hipérbola cuya ecuación es $x^2 - y^2 = -a$ que contiene a w, de manera que podemos ver a un vector ortogonal a v como el vector geométricamente reflejado con respecto al cono de luz.

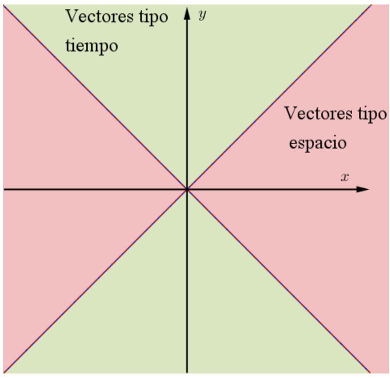

Figura 1.9: Lugar geométrico de los vectores espaciales y temporales

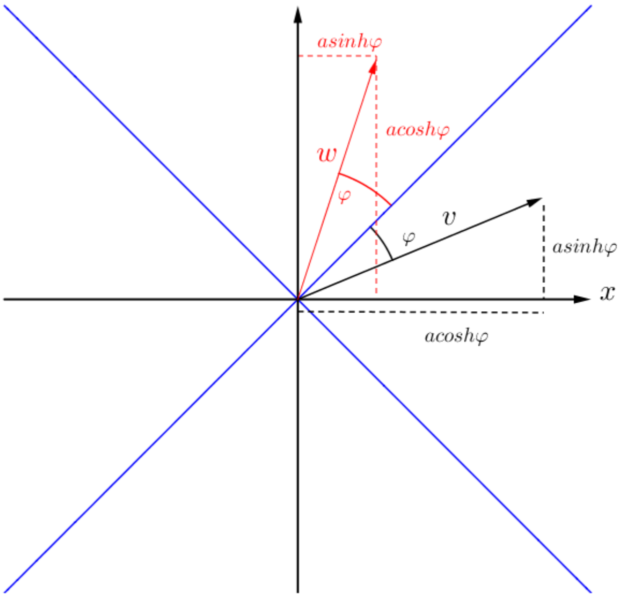

Figura 1.10: Un vector ortogonal a v es geométricamente el reflejado con respecto al cono de luz.

Ahora en base a esta representación geométrica sobre la ortogonalidad de vectores podemos conocer el caracter causal de un vector ortogonal a otro conociendo el caracter causal de sólo uno de ellos, Sea $v \in \mathbb{R}^2_1$ y $w \in \mathbb{R}^2_1$ un vector ortogonal a v, entonces w tiene caracter causal

- espacial, si v es temporal,
- temporal, si v es espacial,
- nulo, si v es nulo.

1.4. Álgebra lineal de $\mathbb{R}^3_1$

En esta sección se tratará de mostrar algunas propiedades de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3_1$, bases ortogonales, combinaciones lineales, entre otras. Comenzaremos considerando la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$, nótese que $\epsilon_1 = \langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \epsilon_2 = 1$ y $\langle e_3, e_3\rangle = \epsilon_3 = -1$, por lo que e_1 y e_2 son espaciales y e_3 es temporal, además $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ para $i, j = 1, 2, 3$ y $i \neq j$, a la cual se le conoce también como *base ortonormal.*

Definición 1.4.1 (Bases ortonormales) Si tenemos una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3_1$, tal que $\langle v_i, v_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, donde $\epsilon_i = \langle v_i, v_i \rangle$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, donde $\epsilon_i = \pm 1$. A tal base también se le llamará base ortonormal.

Sin embargo habrá otro tipo de bases que nos serán de mucha ayuda a lo largo del presente trabajo conocidas como *bases pseudo-ortonormales.*

Definición 1.4.2 Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3_1$ tales que $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$, $\epsilon_1 = 1$ y $\langle v_2, v_3 \rangle = 1$, a tal base se le llama base pseudo-ortonormal. En particular, para un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^3_1$ de dimensión dos, una base pseudo-ortonormal de V es una base $\{v, w\}$ de V tal que $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 0$ y $\langle v, w \rangle = 1$.

Definición 1.4.3 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un subespacio vectorial, y sea $V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3_1 : \langle u, v \rangle = 0 \forall v \in V\}$, a $V^\perp$ le llamaremos *complemento ortogonal de V.*

Para comenzar será útil hacer ver que $V^\perp$ es un subespacio vectorial pues si $u, v \in V^\perp$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y w un elemento cualquiera de V, entonces $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0$, ya que $u, v \in V^\perp$, de manera que $\alpha u + v \in V^\perp$, lo que demuestra que $V^\perp$ es un subespacio vectorial. Los siguientes dos teoremas nos muestran algunas relaciones que existen entre V y $V^\perp$

Proposición 1.4.4 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_1$, entonces

- $dim\mathbb{R}^3_1 = dimV + dimV^\perp$
- $(V^\perp)^\perp = V$

Demostración Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un subespacio vectorial, si $V = \mathbb{R}^3_1$, entonces $V^\perp = 0$, ya que la métrica de Lorentz es un producto escalar, en particular es no degenerado, es decir, el único vector que es ortogonal a todo el espacio $\mathbb{R}^3_1$ es $v = 0$ y por lo tanto $dim\mathbb{R}^3_1 = dim\mathbb{R}^3_1 + 0 = dimV + dimV^\perp$.
Supongamos que $dimV = n$, donde $n = 1$ o bien $n = 2$, sean $\{v_1, v_n\}$ una base de V y defínase una transformación lineal de la siguiente manera, sea $T : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^n$, dada por $Tv = (\langle v, v_1 \rangle, \langle v, v_n \rangle)$ y ahora obsérvese que el núcleo de T es precisamente $V^\perp$, ya que $\{v_1, v_n\}$ es base de V, nótese también que $dimV = dimT(\mathbb{R}^3_1)$ nuevamente por el hecho de que $\{v_1, v_n\}$ es base de V y por el teorema del rango de álgebra lineal sabemos que

$$dim\mathbb{R}^3_1 = dimN(T) + dimR(T) = dimV^\perp + dimV,$$

ahora aplicando este resultado tenemos que

$$dim\mathbb{R}^3_1 = dimV^\perp + dim(V^\perp)^\perp = dimV + dimV^\perp,$$

por lo tanto $dim(V^\perp)^\perp = dimV$.
Por último sea $v \in V$, entonces v es ortogonal a todos los elementos de $V^\perp$, por lo tanto $v \in (V^\perp)^\perp$, así $V \subset (V^\perp)^\perp$ y dado que $dim(V^\perp)^\perp = dimV$, concluimos pues que $V = (V^\perp)^\perp$.
□

Proposición 1.4.5 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un subespacio no degenerado, entonces se cumple que $\mathbb{R}^3_1 = V \oplus V^\perp$ a la cual llamamos *suma ortogonal* y $V^\perp$ también es no degenerado.

Demostración Por la proposición anterior tenemos que $dim\mathbb{R}^3_1 = dimV + dimV^\perp$, por lo que si probamos $V \cap V^\perp = \{0\}$, concluimos $\mathbb{R}^3_1 = V \oplus V^\perp$. Sea $v \in V \cap V^\perp$, por lo tanto v es ortogonal a todos los elementos de V, pero al mismo tiempo $v \in V$ y dado que V es no degenerado por hipótesis se concluye que $v = 0$. Claramente $0 \in V \cap V^\perp = \{0\}$, pues tanto V como $V^\perp$ son subespacios vectoriales. Por lo tanto $\mathbb{R}^3_1 = V \oplus V^\perp$.
Ahora tómese $w \in V^\perp$ tal que $\langle w, v\rangle = 0$ para todo $v \in V^\perp$, como w es ortogonal a V pues $w \in V^\perp$ y también es ortogonal a $V^\perp$ por la elección de w, entonces w es ortogonal a $\mathbb{R}^3_1$ ya que $\mathbb{R}^3_1 = V \oplus V^\perp$, pero la métrica de Lorentz es no degenerada por lo tanto $w = 0$ y por tanto $V^\perp$ es no degenerado. □

La siguiente proposición nos ayudará a visualizar la geometría de los vectores nulos.

Proposición 1.4.6 Sean $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ vectores nulos, entonces $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si $\langle u, v\rangle = 0$.

Demostración Supongamos que $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente, es decir, $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\langle u, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = 0$, pues v es un vector nulo.
Supongamos que $u = (a, b, c)$, $v = (x, y, z)$ y $\langle u, v\rangle = ax + by - cz = 0$, por hipótesis $\langle u, u\rangle = a^2 + b^2 - c^2 = 0$ y $\langle v, v\rangle = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, así

$$c^2z^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2,$$

por otro lado $c^2z^2 = (ax + by)^2 = a^2x^2 + 2axby + b^2y^2$, igualando las últimas dos ecuaciones obtenemos $2axby = a^2y^2 + b^2x^2$, con lo cual $(ay - bx)^2 = 0$, con lo cual $ay + bx = 0$, despejando llegamos a que $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, o equivalentemente $a = \lambda x$ y $b = \lambda y$, sustituyendo en la ecuación del producto de u con v tenemos $cz = \lambda x^2 + \lambda y^2 = \lambda(x^2 + y^2) = \lambda z^2$, de manera que $c = \lambda z$. Por lo tanto $u = \lambda v$. □

Observación 1.4.7 La proposición anterior es equivalente a que dos vectores nulos $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ son linealmente independientes si y sólo si $\langle u, v\rangle \neq 0$.

Teorema 1.4.8 Todo espacio vectorial $V \neq 0$ no degenerado con producto escalar tiene una base ortonormal.

Demostración Sea $\langle \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ el producto escalar sobre V. Supongamos que $\langle v, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, dado que la métrica es no degenerada por ser un producto escalar se concluye que $V = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto existe un vector $v \in V$ tal que $\langle v, v\rangle \neq 0$. Tómese $v/\|v\|$, supóngase por inducción que existen $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ base ortonormal de V. Por lo que tenemos que probar que existe un vector unitario que es ortogonal a $span\{e_1, ..., e_{n-1}\}$. Sea $w = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{n-1}e_{n-1}$ y $A = a_{ij}$ donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ si $i = j$, de manera que la matriz A es invertible puesto que $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ base ortonormal, por lo tanto si $\Sigma_j\Sigma_i\alpha_j a_{ij} = 0$ si y sólo si $\alpha_j = 0$, pues las columnas de A son linealmente independientes por ser A invertibles con lo cual $w = 0$ y por tanto el producto escalar inducido en $span\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ es no degenerado, de manera que $span\{e_1, ..., e_{n-1}\}^\perp$ también lo es por la proposición 1.4.5, lo cual nos permite tomar un vector $e_n \in span\{e_1, ..., e_{n-1}\}^\perp$ unitario que es ortogonal a $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$, y nuevamente como consecuencia de la proposición 1.4.5 $\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n\}$ es una base ortonormal de V. □

Lema 1.4.9 Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal de un subespacio vectorial V con producto escalar y $\epsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$, entonces para cualquier elemento $v \in V$ se puede experesar como

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\langle v, e_i\rangle e_i.$$

Demostración Para demostrar el resultado basta con probar que

$$\langle v - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = 0$$

para todo e_j con $j = 1, ..., n$, pues $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerado, esto implica que $v - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i = 0$, lo cual demuestra el resultado. Pero

$$\langle v - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i, e_j \rangle$$

$$= \langle v, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle \delta_{ij} = \langle v, e_j \rangle - \epsilon_j \langle v, e_j \rangle \epsilon_j = 0$$

para todo $j = 1, ..., n$. □

De manera muy similar podemos expresar cualquier vector $v \in V$ de una manera muy especial para una base pseudo-ortonormal, donde V es un plano tipo tiempo.

Proposición 1.4.10 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un plano tipo tiempo y $\{v, w\}$ base pseudo-ortonormal, entonces cualquier vector $u \in V$ se puede expresar como

$$u = \langle u, w \rangle v + \langle u, v \rangle w.$$

Demostración Sea $\{v, w\}$ base pseudo-ortonormal y $u \in V$, Nótese que si para cualesquiera $u_1, u_2 \in V$ tenemos que $\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle$ y $\langle u_1, w \rangle = \langle u_2, w \rangle$, es decir u_1 y u_2 son tales que coinciden los sus productos con los elementos de la base entonces $\langle u_1 - u_2, v \rangle = 0 = \langle u_1 - u_2, w \rangle$, entonces $u_1 - u_2$ es ortogonal a todo elemento $u \in V$ pues $\{v, w\}$ es base de V y dado que el producto es no degenerado se sigue que $u_1 - u_2 = 0$, es decir, $u_1 = u_2$.
Por lo tanto basta probar que $\langle u, v \rangle = \langle \langle u, w \rangle v + \langle u, v \rangle w, v \rangle$ y $\langle u, w \rangle = \langle \langle u, w \rangle v + \langle u, v \rangle w, w \rangle$, pero

$$\langle \langle u, w \rangle v + \langle u, v \rangle w, v \rangle = \langle u, v \rangle \langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Similarmente,

$$\langle \langle u, w \rangle v + \langle u, v \rangle w, w \rangle = \langle u, w \rangle \langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle,$$

donde se ha usado que $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 0$ y $\langle v, w \rangle = 1$.
Por lo tanto

$$u = \langle u, w \rangle v + \langle u, v \rangle w.$$

□

Teorema 1.4.11 Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to W$ lineal e invertible, entonces $T^{-1} : W \to V$ también es lineal.

Demostración Sean $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$T^{-1}(\alpha x + y) = T^{-1}(\alpha T(T^{-1}(x)) + T(T^{-1}(y)))$$

$$= T^{-1}(T(\alpha T^{-1}(x) + T^{-1}(y))) = \alpha T^{-1}(x) + T^{-1}(y).$$

Por lo tanto T^{-1} es lineal. □

Ahora se va a introducir un concepto nuevo, a saber el llamado *índice de un producto escalar*.

Definición 1.4.12 Sea V un espacio vectorial con producto escalar $\langle,\rangle_V$, definimos el índice de dicho producto como $max\{dimU : U \subset V \text{ subespacio vectorial } \text{ y } \langle,\rangle_U < 0\}$.

Podemos por lo tanto mostrar un resultado que nos indica cuál es la relación entre subespacios con sus respectivos productos escalares.

Lema 1.4.13 Los espacios vectoriales V y W con productos escalares $\langle,\rangle_V$ y $\langle,\rangle_W$ son de la misma dimensión y del mismo índice si y sólo si existe una isometría lineal entre V y W.

Demostración Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ base ortonormal de V y $\{e'_1, ..., e'_n\}$ base ortonormal de W, nótese que dichas bases cuentan con la misma cantidad de elementos pues tenemos el supuesto de que $dimV = dimW = n$. Puesto que $\langle,\rangle_V$ y $\langle,\rangle_W$ tienen el mismo índice podemos ordenar ambas bases de tal manera que $\langle e_i, e_i\rangle_V = \langle e'_i, e'_i\rangle_W$ para todo $i = 1, ..., n$.
Sea $T : V \to W$ lineal tal que $Te_i = e'_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Sean $v = \Sigma_{j=1}^n a_j e_j$ y $w = \Sigma_{k=1}^n b_k e_k$, entonces

$$\langle Tv, Tw\rangle_W = \langle T\Sigma_{j=1}^n a_j e_j, T\Sigma_{k=1}^n b_k e_k\rangle_W$$
$$= \langle \Sigma_{j=1}^n a_j Te_j, \Sigma_{k=1}^n b_k Te_k\rangle_W = \langle \Sigma_{j=1}^n a_j e'_j, \Sigma_{k=1}^n b_k e'_k\rangle_W$$
$$= \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{k=1}^n a_j b_k \langle e'_j, e'_k\rangle_W = \Sigma_{j=1}^n a_j b_j \langle e'_j, e'_j\rangle_W$$
$$= \Sigma_{j=1}^n a_j b_j \langle e_j, e_j\rangle_V = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{k=1}^n a_j b_k \langle e_j, e_k\rangle_V$$
$$= \langle \Sigma_{j=1}^n a_j e_j, \Sigma_{k=1}^n b_k e_k\rangle_V = \langle u, w\rangle$$

pues $\{e_1, ..., e_n\}$ y $\{e'_1, ..., e'_n\}$ son bases ortonormales y además $\langle e_i, e_i\rangle_V = \langle e'_i, e'_i\rangle_W$, por lo tanto T preserva productos escalares.
Ahora hay que probar que T es biyectiva, pero si $Tv = 0$, entonces para todo $w \in V$ $0 = \langle 0, Tw\rangle_W = \langle Tv, Tw\rangle_W = \langle v, w\rangle_V$ esto implica que $v = 0$ por ser $\langle,\rangle_V$ no degenerado, por tanto $N(T) = \{0\}$, i,e., T es inyectiva o bien $dimN(T) = 0$. Además por hipótesis tenemos que $dimV = dimW$ y por el teorema del rango tenemos que $dimV = dimW = dimN(T) + dimR(T) = dimR(T)$, es decir, T es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. Hemos demostrado que existe una isometría lineal entre V y W.

Para demostrar la suficiencia sean $(V, \langle,\rangle_V)$ y $(W, \langle,\rangle_W)$ espacios vectoriales con productos escalares, supongamos que existe $T : V \to W$ isometría lineal, entonces $dimV = dimW$, puesto que T es un isomorfismo, además T preserva productos escalares, así si $\{e_1, ..., e_n\}$ es base ortonormal tenemos entonces que $\epsilon_i\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle_V = \langle Te_i, e_j\rangle_W$, i,e., $\{Te_1, ..., Te_n\}$ es un base ortonormal de W ordenando ambas bases tenemos pues que $\langle,\rangle_V$ y $\langle,\rangle_W$ tienen el mismo índice, lo que demuestra la necesidad del teorema. □

Como una consecuencia de este lema tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 1.4.14 Sea $(V, \langle,\rangle_V)$ un espacio vectorial real de dimensión 2 con producto interno. Entonces $(V, \langle,\rangle_V)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle_E)$, donde $\langle,\rangle_E$ es el producto interno euclidiano usual.

Demostración Dado que V y $\mathbb{R}^2$ tienen la misma dimensión y $\langle,\rangle_V$ y $\langle,\rangle_E$ el mismo índice ya que $\langle,\rangle_V$ es un producto interno, entonces por el teorema anterior $(V, \langle,\rangle_V)$ y $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle_E)$ son isométricos. □

Corolario 1.4.15 Sea $(V, \langle,\rangle_V)$ un espacio vectorial real de dimensión 2 con producto escalar de índice 1. Entonces $(V, \langle,\rangle_V)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2_1, \langle,\rangle_L)$, donde $\mathbb{R}^2_1$ es $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial y si $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2_1$ y $v = (v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2_1)$, entonces $\langle u, v\rangle_L = u_1v_1 - u_2v_2$.

Demostración La demostración es análoga a la del corolario anterior. □

Una propiedad que será de mucha ayuda a lo largo del texto será la siguiente.

Definición 1.4.16 Sea $T : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial con producto escalar, se dice que T es *autoadjunto* si para todo $v, w \in V$ se cumple que $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$.

Teorema 1.4.17 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un plano tipo tiempo y $T : V \to V$ una transformación lineal y autoadjunta. Entonces T tiene alguna de las siguientes representaciones para alguna base β de V

- $[T]_\beta$ es una matriz diagonal para alguna base ortonormal β,
- $[T]_\beta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix}$ para alguna base pseudo-ortonormal β,
- $[T]_\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ para alguna base ortonormal β.

Demostración La demostración procederá en dos casos.
Primer caso: Supongamos que existe $x \in V$ con $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, supongamos que T tiene un valor propio, este caso se divide en 2 subcasos:

∘ Si x es no nulo, i,e., $\langle x, x\rangle \neq 0$
∘ Si x es nulo, í,e., $\langle x, x\rangle = 0$

Si $\epsilon_1 = \langle x, x\rangle \neq 0$, sea $y \in V$ tal que $\langle x, y\rangle = 0$, entonces $\langle y, y\rangle = -\langle x, x\rangle$, así $\beta = \{\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\}$ es una base ortonormal para V, así

$$Ty = \epsilon_1 \frac{\langle Ty, x\rangle}{\|x\|^2} x + \epsilon_2 \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2} y$$

$$= \epsilon_1 \frac{\langle y, Tx\rangle}{\|x\|^2} x + \epsilon_2 \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2} y = \epsilon_1 \frac{\langle y, \lambda x\rangle}{\|x\|^2} x + \epsilon_2 \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2} y$$
$$= \lambda\epsilon_1 \frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|^2} x + \epsilon_2 \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2} y = \epsilon_2 \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2} y = \mu y$$

definiendo $\mu = \epsilon_2 \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2}$, esto muestra que y también debe ser un valor propio de T, entonces la representación de T en la base ortonormal β es

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

es decir, $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.
Si $\epsilon_1 = \langle x, x\rangle = 0$, supongamos que $x = (x_1, x_2)$, entonces $y = \frac{(x_1, -x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \in V$ es un vector tal que $\langle y, y\rangle = 0$ y $\langle x, y\rangle = 1$, i,e., $\beta = \{x, y\}$ es una base pseudo-ortonormal, de manera que para cualquier vector $u = \langle u, y\rangle x + \langle u, x\rangle y$, por lo tanto

$$Ty = \langle Ty, y\rangle x + \langle Ty, x\rangle y$$

$$= \langle Ty, y\rangle x + \langle y, Tx\rangle y = \langle Ty, y\rangle x + \langle y, \lambda x\rangle y$$
$$= \langle Ty, y\rangle x + \lambda\langle y, x\rangle y = \langle Ty, y\rangle x + \lambda y$$

Si $\langle Ty, y\rangle = 0$, entonces $Ty = \lambda y$ y recordemos que estamos bajo el supuesto de que $Tx = \lambda x$, entonces T tiene la siguiente representación en la base pseudo-ortonormal β

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

que de nuevo es una matriz diagonal.
Pero si $\langle Ty, y\rangle \neq 0$ definimos nuevos vectores $u, v \in V$ tales que $u = \frac{y}{\sqrt{|\langle Ty,y\rangle|}}$ y $v = x\sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |}$, nuevamente $\beta = \{u, v\}$ forman una base pseudo-ortonormal, entonces

$$T(u) = \frac{Ty}{\sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |}} = \frac{\langle Ty, y\rangle x + \lambda y}{\sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |}}$$

$$= \frac{\langle Ty, y\rangle x}{\sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |}} + \frac{\lambda y}{\sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |}} = \lambda u \pm v.$$

Y,

$$T(v) = \sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |}Tx = \lambda x\sqrt{|\ \langle Ty, y\rangle\ |} = \lambda v,$$

por lo tanto T tiene la siguiente representación en la base pseudo-ortonormal β

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \pm 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

lo que concluye el primer caso en el que suponemos que T tiene al menos un valor propio.
Segundo caso:
Supongamos que T no tiene ningún valor propio, sea $f(\lambda)$ el polinomio característico de T, dado que T no tiene valor propios reales, por el teorema fundamental del álgebra $f(\lambda)$ tiene dos raíces complejas conjugadas $\lambda = a + bi$ con $b \neq 0$ y $\overline{\lambda}$ es el otro valor propio. Permitiendo que $[T]$ opere sobre vectores $z \in \mathbb{C}^2$ tenemos que $[T]z = \lambda z$ para algún $z \in \mathbb{C}^2$, además siendo $[T]$ una matriz con coeficientes reales se obtiene lo siguiente $\overline{[T]z} = \overline{[T]}\overline{z} = [T]\overline{z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}$, con lo cual el vector apropiado asociado al valor propio $\overline{\lambda}$ es $\overline{z}$, donde dicho vector es aquel que se toma considerando conjugadas las entradas del vector $z \in \mathbb{C}^2$, en la referencia [3, pág 340] se puede encontrar el siguiente teorema:
Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ con $\lambda = a - bi$ $(b \neq 0)$ valor propio de A y $v \in \mathbb{C}^2$ vector asociado a λ, entonces $A = PCP^{-1}$, $P = [Rev\ Imv]$ y

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

con lo cual existe una base de V tal que la representación de T con respecto a esa base β es

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Además como los coeficientes de $[T]$ son todos números reales se tiene que los valores propios son $\lambda = a + bi$ y $\overline{\lambda}$ asociados con los vectores $(1, -i)$ y $(1, i)$ respectivamente, nótese que $\langle (1, -i), (1, i)\rangle = 0$, así que se puede obtener una base ortonormal cuya representación de $[T]$ sea de la forma (1). □

Proposición 1.4.18 Sea $T : V \to V$ lineal, autoadjunta y V un plano temporal. Si existen dos vectores propios nulos de T linealmente independientes, entonces $T = \lambda Id$, donde $Id : V \to V$ es la transformación identidad en V.

Demostración Sean $u, v \in V$ vectores nulos linealmente independientes tales que son valores propios de T, como hemos visto al principio de esta sección dos vectores nulos son linealmente independientes si y sólo si $\langle u, v\rangle \neq 0$, consideremos que $\langle u, v\rangle > 0$ tomando $-v$ si $\langle u, v\rangle < 0$. Ahora tómense $x := u/\langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}}$ y $y := v/\langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}}$, los vectores $\{x, y\}$ siguen siendo vectores nulos pero ahora con la propiedad de que $\langle x, y\rangle = 1$, es decir, $\{x, y\}$ es base pseudo-ortonormal de V. Además dichos vectores también siguen siendo vectores propios por la linealidad de T, digamos que $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $Tx = ax$ y $Ty = by$, como T es autoadjunta se tiene que

$$a = a\langle x, y\rangle = \langle ax, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, by\rangle = b\langle x, y\rangle = b,$$

por lo tanto $Tx = ax$ y $Ty = ay$, nuevamente por la linealidad de T se tiene que $T = aId$. $\square$

Proposición 1.4.19 Sea V un subespacio vectorial, $T : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta y $u \in V$ un vector no nulo que es vector propio de T, entonces el vector ortogonal a u también es vector propio de T.

Demostración Sea $u \in V$ tal que $Tu = \lambda u$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $v \in V$ ortogonal a u, considerando la base ortonormal $\{\frac{u}{\langle u,u\rangle}, \frac{v}{\langle v,v\rangle}\}$ tenemos que

$$Tv = \frac{\langle Tv, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u + \frac{\langle Tv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v,$$

pero,

$$\langle Tv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle = \langle v, \lambda u\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = 0.$$

Por lo tanto $Tv = \frac{\langle Tv,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$, es decir, v es vector propio de T. $\square$

Proposición 1.4.20 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un plano degenerado entonces dada cualquier base $\{v, w\}$ se tiene que $detI = 0$

Proposición 1.4.21 Sea V un subespacio no degenerado de dimensión dos y sea $\{v, w\}$ una base para V, entonces cualquier elemento $z \in V$ se puede expresar como

$$z = \frac{1}{detI}[(\langle w, w\rangle\langle z, v\rangle - \langle v, w\rangle\langle z, w\rangle)v + (-\langle v, w\rangle\langle z, v\rangle + \langle v, v\rangle\langle z, w\rangle)w],$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}.$$

Demostración Expresemos z en la base como $z = av + bw$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, queremos ver qué forma tienen los coeficientes a y b, tenemos lo siguiente

$$\langle z, v\rangle = a\langle v, v\rangle + b\langle v, w\rangle \text{ y } \langle z, w\rangle = a\langle v, w\rangle + b\langle w, w\rangle,$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \langle z, v\rangle \\ \langle z, w\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

despejando tenemos que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = I^{-1}\begin{pmatrix} \langle z, v\rangle \\ \langle z, w\rangle \end{pmatrix},$$

donde

$$I^{-1} = \frac{1}{detI}\begin{pmatrix} \langle w, w\rangle & -\langle v, w\rangle \\ -\langle w, v\rangle & \langle v, v\rangle \end{pmatrix}.$$

recordando que I es invertible por ser V un subespacio no degenerado. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{detI}\begin{pmatrix} \langle w,w\rangle & -\langle v,w\rangle \\ -\langle w,v\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle z,v\rangle \\ \langle z,w\rangle \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{array}{c} a = \frac{1}{detI}(\langle w,w\rangle\langle z,v\rangle - \langle v,w\rangle\langle z,w\rangle) \\ \\ b = \frac{1}{detI}(-\langle v,w\rangle\langle z,v\rangle + \langle v,v\rangle\langle z,w\rangle) \end{array},$$

sustituyendo los valores de a y b obtenemos el resultado deseado. $\square$

Definamos nuevamente la matriz I como en la proposición anterior, podemos usar dicha matriz para definir el caracter causal de un subespacio vectorial, por simplicidad presentaremos sólo la prueba para el caso de dimensión dos.

Proposición 1.4.22 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_1$ de dimensión dos, V es un subespacio no degenerado si y sólo si $detI \neq 0$.

Demostración Supongamos que V es no degenerado y sea $\{v, w\}$ una base cualquiera de V y tomemos un elemento $u \in V$, entonces $u = av + bw$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, así

$$\begin{cases} \langle u,v\rangle = a\langle v,v\rangle + b\langle v,w\rangle \\ \langle u,w\rangle = a\langle v,w\rangle + b\langle w,w\rangle \end{cases} \tag{2}$$

en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \langle u,v\rangle \\ \langle u,w\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle v,w\rangle & \langle w,w\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

el sistema (1) es equivalente a $aI_1 + bI_2$, donde I_1, I_2 son las columnas de la matriz I, entonces $aI_1 + bI_2 = 0$ es equivalente a $\langle u,v\rangle = 0$ y $\langle u,w\rangle = 0$, como $\{v, w\}$ es una base de V se sigue que $u = 0$ pues V es no degenerado, así $a = b = 0$, i.e., I_1 y I_2 son columnas linealmente independientes y por tanto I es de rango máximo, así $detI \neq 0$.
Ahora queremos probar que si $detI \neq 0$ entonces V es no degenerado, pero lo que probaremos será la contrapositiva, es decir, supondremos que V es degenerado y llegaremos a que $detI = 0$. Como V es degenerado, sabemos que existe $u \in V$ tal que $u \neq 0$ y $\langle u,v\rangle = 0$ y $\langle u,w\rangle = 0$, tenemos además que $u = av + bw$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ con a y b no simultáneamente cero pues $u \neq 0$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

equivalentemente $aI_1 + bI_2 = 0$, así I_1 y I_2 son linealmente dependientes pues a y b no son simultáneamente cero, por lo tanto $detI = 0$. $\square$

Proposición 1.4.23 Sea $V \subset \mathbb{R}^3_1$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_1$ de dimensión dos, V es temporal si y sólo si dada una base $\{v, w\}$ se tiene que $detI < 0$.

Demostración Supongamos que V es temporal, entonces como la métrica restringida es lorentziana, existe $w \in V$ tal que $\langle w,w\rangle < 0$, supongamos $\langle w,w\rangle = -1$, sea $v \in V$ tal que $\{v, w\}$ es una base ortonormal de V y tomemos $\{u, z\}$ una base cualquiera de V, entonces

$$u = \langle u,v\rangle v - \langle u,w\rangle w \text{ y } z = \langle z,v\rangle v - \langle z,w\rangle w$$

así

$$\langle u,u\rangle = \langle u,v\rangle^2 - \langle u,w\rangle^2,\ \langle z,z\rangle = \langle z,v\rangle^2 - \langle z,w\rangle^2$$

$$\langle u, z \rangle = \langle u, v \rangle \langle z, v \rangle - \langle u, w \rangle \langle z, w \rangle$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, z \rangle \\ \langle u, z \rangle & \langle z, z \rangle \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle z, v \rangle & \langle z, w \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u, v \rangle & \langle z, v \rangle \\ -\langle u, w \rangle & -\langle z, w \rangle \end{pmatrix},$$

por lo tanto, si

$$A := \begin{pmatrix} \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle z, v \rangle & \langle z, w \rangle \end{pmatrix}$$

entonces

$$detI = detA(-detA^t) = -(detA)^2 < 0.$$

Ahora supongamos que $detI < 0$, es decir

$$\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle < 0,$$

tomando un $\{v, w\}$ como base ortonormal tenemos que $\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle < 0$, es decir, ó $\langle v, v \rangle > 0$ y $\langle w, w \rangle < 0$, ó bien $\langle v, v \rangle < 0$ y $\langle w, w \rangle > 0$, así necesariamente algún vector de la base ortonormal es temporal, i.e., la métrica restringida a V es lorentziana, por lo tanto V es temporal. $\square$

Capítulo 2

Geometría de superficies en $\mathbb{R}^3_1$

2.1. Superficies en $\mathbb{R}^3_1$

El concepto de superficie suave da la imagen geométrica de una "sábana" en el espacio sin picos, que localmente es muy parecida a $\mathbb{R}^2$, pero qué se quiere decir cuando uno dice "localmente" o "muy parecida", para ello definiremos ciertas funciones que parametrizan localmente a un abierto de una superficie $M \subset \mathbb{R}^3_1$, M se considera un espacio topológico con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^3_1$.
Recordemos antes que una función $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $\varphi(x_1, ..., x_n) = (\varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_n))$ es C^∞ si para todo $i = 1, .., m$ $\varphi_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es C^∞ *(si todas sus derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas)*. A las funciones φ_i se les conoce como *funciones coordenadas de* φ. Recordemos que la matriz jacobiana para el caso de una función $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$ se define como

$$J_\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Definición 2.1.1 Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función C^∞; φ es una inmersión C^∞ si $J_\varphi(x_0, y_0)$ tiene rango 2, i.e., *sus dos columnas son linealmente independientes* para todo $(x_0, y_0) \in U$.

El objetivo es poder parametrizar localmente a todo punto de M sobre un abierto de $\mathbb{R}^2$, lo cual haremos a través de inmersiones C^∞ que para fines de consistencia pediremos que dichas inmersiones sean además inyectivas y continuas con inversa continua, es decir, que sean homeomorfismos en su imagen. A estas funciones se les llamará *cartas* C^∞.

Definición 2.1.2 Una superficie C^∞ es un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3_1$ tal que para todo $p \in M$ existe un carta $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset M$ con U y $p \in V$ abiertos de $\mathbb{R}^2$ y M respectivamente.
Nota: De aquí en adelante nos referiremos a las superficies C^∞ como simplemente superficies.

Tal como se trabaja en geometría euclidiana un *vector tangente* $v \in M$ se ve como el vector velocidad de una curva contenida en M.

Definición 2.1.3 Un vector $v \in \mathbb{R}^3_1$ es tangente a una superficie $M \subset \mathbb{R}^3_1$ en $p \in M$ si existe una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$.

Definimos pues el *plano tangente a* M *en* p como $\{v \in \mathbb{R}^3_1 : v \text{ es vector tangente a M en p}\}$, y se denota como T_pM.

Proposición 2.1.4 El plano tangente T_pM es un plano.

Demostración Sea $p \in M$, entonces existe $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \varphi(U) \subset M$, con φ carta C^∞ y $p \in \varphi(U)$. Sea $v \in T_pM$, entonces también existe $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$, dado que φ es un homeomorfismo pordemos escoger una curva $\beta : I \to U$ con $\beta(t) = (u(t), v(t))$ definiendola como $\beta(t) := (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t)$, de manera que $\alpha = \varphi \circ \beta$, así por la regla de la cadena tenemos que $\alpha'(t) = J_\varphi(\beta(t))(\beta'(t))$ que es equivalente a $\alpha'(t) = u'(t)\varphi_x + v'(t)\varphi_y$, donde $\varphi_x = (\varphi_{1_x}, \varphi_{2_x}, \varphi_{3_x})$ y $\varphi_y = (\varphi_{1_y}, \varphi_{2_y}, \varphi_{3_y})$, de modo que hemos escrito cualquier vector tangente como combinación lineal de $\{\varphi_x, \varphi_y\}$, por otro lado no es difícil ver que $\{\varphi_x, \varphi_y\}$ son linealmente independientes pues $J\varphi$ es de rango máximo, por lo que $\{\varphi_x, \varphi_y\}$ es una base de T_pM,por lo tanto T_pM es un plano. □

Observación 2.1.5 Es importante hacer notar que T_pM es un subespacio vectorial, pues si $v, w \in T_pM$, entonces $v = a\varphi_x + b\varphi_y$ y $w = c\varphi_x + d\varphi_y$, por lo tanto $\alpha v + w = (\alpha a + c)\varphi_x + (\alpha b + d)\varphi_y$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, dicho vector $\alpha v + w$ pudo ser escrito como combinación lineal de la base $\{\varphi_x, \varphi_y\}$ por lo tanto $\alpha v + w \in T_pM$, de manera que T_pM es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_1^3$ de dimensión 2.

Se ha hablado ya de funciones C^∞ de un abierto de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, pero ahora necesitamos hablar de funciones C^∞ de M a $\mathbb{R}$, entonces la pregunta es cómo se puede hablar de funciones diferenciables con un dominio tan peculiar como lo es un abierto en una superficie dado que sólo podemos hablar de diferenciabilidad en un dominio abierto.

Definición 2.1.6 Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se llama C^∞ o lisa en $p \in M$ si ésta es la restricción de una función $F : V \subset \mathbb{R}_1^3 \to \mathbb{R}$ con $p \in V$, V abierto de $\mathbb{R}_1^3$ y F función C^∞, i.e., $f(U \cap M) = F(U \cap M)$. *Veáse* [2, pág 2].

Con esta definición podemos extender el concepto de diferenciabilidad en M a funciones $F : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ si cada una de sus funciones coordenadas es función real valuada en M y es de clase C^∞
A continuación se presentan maneras de nombrar campos vectoriales sobre M:

Definición 2.1.7 Un campo vectorial C^∞ a lo largo de una superficie lisa M es una aplicación C^∞ y $X : M \to \mathbb{R}_1^3$.

- X se llama campo vectorial tangente si $X(p) \in T_pM$ para todo $p \in M$.
- X se llama campo vectorial transversal si $X(p) \notin T_pM$ para todo $p \in M$.
- En particular, X se llama campo vectorial ortogonal si $X(p) \in T_pM^\perp$.

Definición 2.1.8 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie que no se autoinseca. Decimos que M es orientable si existe un campo vectorial ξ definido en todo M tal que $\xi(p) \neq 0$ $\xi \notin T_pM$ para todo $p \in M$.

Las superficies que consideramos en este trabajo son todas orientables, por lo que convendremos omitir el decir que son orientables. Así como se ha dado el caracter causal de vectores, planos y subespacios podemos dar el caracter causal de superficies, el cual será un concepto ampliamente utilizado.

Definición 2.1.9 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie. Decimos que M tiene caracter causal espacial, temporal o nulo, si para todo $p \in M$ el plano tangente T_pM es espacial, temporal o nulo.

Ejemplo 2.1.10 El cono de luz es una superficie tipo luz, dado que por 1.2.13 todo plano tangente tipo luz es tangente al cono de luz y por tanto el cono es tipo luz.

Ejemplo 2.1.11 (El espacio de De Sitter $\mathbb{S}^2_1(r)$) El conjunto definido como $\mathbb{S}^2_1(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : x^2 + y^2 - z^2 = r^2\}$ se le conoce como el espacio de De Sitter de radio r, donde el superíndice 2 indica la dimensión de este.
No es difícil ver que un campo vectorial normal a la superficie es $\xi(x, y, z) = (x, y, z)$; como $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2_1(r)$, entonces ξ es un campo vectorial tipo espacio, de manera que el complemento ortogonal de ξ, es decir, el plano tangente T_pM, es tipo tiempo, de manera que $\mathbb{S}^2_1(r)$ es una superficie temporal.

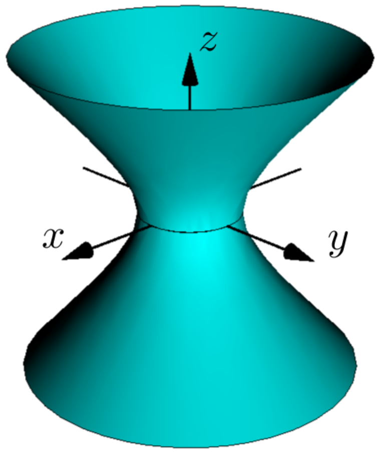

Figura 2.1: Espacio de De Sitter $\mathbb{S}^2_1(r)$

Ejemplo 2.1.12 (El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(r)$) El plano hiperbólico se define como $\mathbb{H}^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : x^2 + y^2 - z^2 = -r^2\}$. Similarmente al espacio de De Sitter se tiene que un campo vectorial normal a $\mathbb{H}^2(r)$ está dado por $\xi(x, y, z) = (x, y, z)$ que es un campo vectorial tipo tiempo por lo tanto T_pM es espacial y así $\mathbb{H}^2(r)$ también.

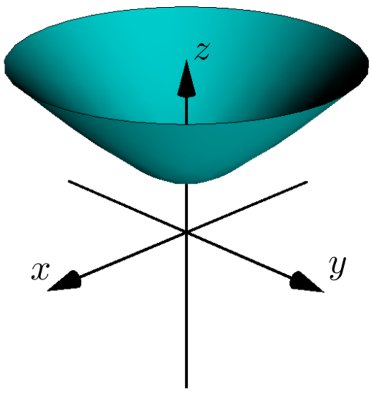

Figura 2.2: El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(r)$

Como se vió en los dos ejemplos anteriores el campo vectorial normal a la superficie es y será un referente constante en lo que resta del presente trabajo, en especial nos referimos a la llamada *aplicación de Gauss* que no es más que considerar dicho campo vectorial de norma uno y ortogonal a la superficie $\xi : U \subset M \to \mathbb{R}^3_1$, donde ξ está definido localmente en un abierto $U \subset M$, esto dado que localmente podemos tomar una carta $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \to U \subset M$ y definir

$\xi = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|}$. Hemos definido localmente la aplicación de Gauss, pero podemos extenderlo a un campo vectorial $\widetilde{\xi}$ unitario normal a la superficie definiéndolo de la siguiente forma

$$\widetilde{\xi}(q) = \begin{cases} \xi(q), & \text{si } \langle \varphi_x \times \varphi_y, e_3 \rangle < 0, \\ -\xi(q), & \text{si } \langle \varphi_x \times \varphi_y, e_3 \rangle > 0. \end{cases}$$

de tal suerte que si $q \in V_p$ y $q \in V_{p'}$ con V_p y $V_{p'}$ dominios de cartas φ_p y $\varphi_{p'}$, entonces $\widetilde{\xi}_p(q) = \widetilde{\xi}_{p'}(q)$ ya que $\widetilde{\xi}$ es el único vector normal unitario tal que $\langle \widetilde{\xi}, e_3 \rangle < 0$. Así pues podemos tomar la aplicación de Gauss sobre toda la superficie. Nótese que la palabra "normalizado" en $\mathbb{R}^3_1$ tiene el siguiente sentido $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle = \pm 1$ tal y como se ha visto antes.

Observación 2.1.13 Recordemos ahora que el caracter causal de subespacios, se define restringiendo la métrica de Lorentz al subespacio, en particular la métrica de Lorentz restringida a T_pM se llama *primera forma fundamental* y la denotamos por $I_{M,p}$ o simplemente I, formalmente $I : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ se define como $I(v, w) = \langle v, w \rangle$ para $v, w \in T_pM$. Por lo tanto el caracter causal de la superficie está determinado también por las propiedades del determinante de I. *revísese* [7].

2.2. El operador de forma S_p y las curvaturas media y gaussiana.

Una definición clásica en la teoría de superficies es la del *operador de forma*, que no es más que considerar la derivada direccional de la aplicación de Gauss ξ.

Definición 2.2.1 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, ξ la aplicación de Gauss de M, $p \in M$, $v \in T_pM$ y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^3_1$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$ para algún $t_0 \in I$. Entonces definimos el operador de forma de M en p, denotado por S_p o simplemente S, como

$$S_p(v) = -\frac{d}{dt}(\xi \circ \alpha)(t)|_{t=t_0}.$$

El operador de forma satisface las propiedades usuales de su análogo en la geometría euclidiana tal como se verá en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.2 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$ y consideremos el operador de forma en p S_p, dicho operador satiface las siguientes propiedades:

- $S_p : T_pM \to T_pM$
- S_p es una transformación lineal en T_pM
- para todo $v, w \in T_pM$ y $p \in M$ se cumple que $\langle S(v), w \rangle = \langle v, S(w) \rangle$, es decir, S es un operador autoadjunto en T_pM.

Demostración De la definición para $v \in T_pM$ tenemos que $S(v) = -D_v\xi$, donde ξ es la aplicación de Gauss. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^3_1$ una curva tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$ para algún $t_0 \in I$, como $\langle \xi(p), \xi(p) \rangle = \pm 1$ para todo $p \in M$, en particular $\langle \xi(\alpha(t)), \xi(\alpha(t) \rangle = \pm 1$, entonces $2\langle \frac{d\xi(\alpha(t))}{dt} |_{t=t_0}, \xi(\alpha(t)) \rangle = 2\langle D_v\xi, \xi(\alpha(t)) \rangle = 0$, es decir, $D_v\xi$ es ortogonal a ξ por lo que $D_v\xi \in T_pM$ y por tanto $S(v) = -D_v\xi \in T_pM$ pues T_pM es un subespacio vectorial, así $S : T_pM \to T_pM$.

Ahora tomemos $v, w \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tales que $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = \gamma(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \lambda v + w$, $\beta'(t_0) = \lambda v$ y $\gamma'(t_0) = w$, entonces

$$D_{\lambda v+w} = \frac{d}{dt}(\xi \circ \alpha(t)) \mid_{t=t_0} = \xi_{*\alpha(t_0)}\alpha'(t_0) = \xi_{*p}(\beta'(t_0) + \gamma'(t_0)) = \lambda \xi_{*p}(v) + \xi_{*p}(w)$$

$$= \lambda \frac{d}{dt}(\xi \circ \beta(t)) \mid_{t=t_0} + \frac{d}{dt}(\xi \circ \gamma(t)) \mid_{t=t_0} = \lambda D_v \xi + Dw\xi,$$

donde ξ_{*p} denota la matriz jacobiana de ξ en el punto p, por lo tanto $S(\lambda v + w) = \lambda S(v) + S(w)$, i.e., S es una transformación lineal.
Para demostrar la simetría consideremos una carta $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \varphi(U) \subset M$ con $p \in \varphi(U)$ y $\varphi(u_0, v_0) = p$ para algún $(u_0, v_0) \in U$, entonces $S(\varphi_u) = -\frac{\partial(\xi \circ \varphi)}{\partial u} = -\xi_u$ considerando la curva $\varphi(u, v_0)$.
De igual manera $S(\varphi_v) = -\frac{\partial(\xi \circ \varphi)}{\partial v} = -\xi_v$, así que $\langle S(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle \xi_u, \varphi_v \rangle = \langle \xi, \varphi_{uv} \rangle = \langle \varphi_{vu}, \xi \rangle = -\langle \varphi_u, \xi_v \rangle = \langle \varphi_u, S(\varphi_v) \rangle$, por lo que S es autoadjunto en la base $\{u, v\}$ de T_pM, este hecho y usando las propiedades autoadjunta y bilinealidad del producto escalar, se sigue $\langle S(u), w \rangle = \langle u, S(w) \rangle$ para todo $u, w \in T_pM$, i.e., S es autoadjunto. □

Observación 2.2.3 Al ser S una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo podemos aplicar el teorema 1.4.17 cuando M es una superficie tipo tiempo para darnos cuenta de la representación que tiene $[S]$.

Ahora podemos definir otro concepto que será constantemente utilizado, a saber, *la segunda forma fundamental*, denotada por II_p o simplemente II.

Definición 2.2.4 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$, ξ la aplicación de Gauss de M definida en un abierto que contiene a p, La segunda forma fundamental de M en p, es $II : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp$ dada por

$$II(v, w) = \epsilon \langle S(v), w \rangle \xi(p),$$

donde $\epsilon = \langle \xi(p), \xi(p) \rangle$.

Observación 2.2.5 La segunda forma fundamental cumple las siguientes propiedades:

- Es una forma bilineal y simétrica, propiedades heredadas por el producto escalar, linealidad de S y propiedad de simetría de S,
- para todo $u, w \in T_pM$ se cumple que $\langle II(v, w), \xi \rangle = \langle S(v), w \rangle$.

Dado que T_pM es un subespacio vectorial, por el teorema 1.4.8 existen $v, w \in T_pM$ tales que $\{v, w\}$ es una base ortonormal de T_pM, entonces la matriz que representa a II se calcula como

$$[II] = \begin{pmatrix} \epsilon_1 II(v, v) & \epsilon_2 II(w, v) \\ \epsilon_1 II(v, w) & \epsilon_2 II(w, w) \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon_1 = \langle v, v \rangle$ y $\epsilon_2 = \langle w, w \rangle$.

Definición 2.2.6 Definimos el *vector de curvatura media* $\widetilde{H}$ de M en p como $\widetilde{H}(p) = \frac{1}{2} tr[II]$, las *curvaturas gaussiana* $K(p)$ *y media* $H(p)$ de M en p las definimos como $K(p) = det[II]$ y $\widetilde{H}(p) = H(p)\xi(p)$ respectivamente, entonces $H(p) = \epsilon \langle \widetilde{H}(p), \xi(p) \rangle$.

Definición 2.2.7 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ temporal decimos que M es *mínima* si $H \equiv 0$, dicho de otro modo $H(p) = 0$ para todo $p \in M$. Similarmente decimos que M es plana si $K \equiv 0$, o bien $K(p) = 0$ para todo $p \in M$.

La siguiente proposición muestra la manera sencilla que toma el vector de curvatura media $\widetilde{H}$ en una base pseudo-ortonormal.

Proposición 2.2.8 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie tipo tiempo con $\{v, w\}$ base pseudo-ortonormal de T_pM para $p \in M$, entonces $\widetilde{H}(p) = II(v, w)$.

Demostración Sea $p \in M$ y $\{v, w\}$ base pseudo-ortonormal de T_pM, nótese que $\{\frac{v-w}{\sqrt{2}}, \frac{v+w}{\sqrt{2}}\}$, es una base ortonormal, pues

$$\epsilon_1 = \langle \frac{v-w}{\sqrt{2}}, \frac{v-w}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{2}(-2\langle v, w\rangle) = -1, \, \epsilon_2 = \langle \frac{v+w}{\sqrt{2}}, \frac{v+w}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{2}2\langle v, w\rangle = 1$$

y

$$\langle \frac{v-w}{\sqrt{2}}, \frac{v+w}{\sqrt{2}} \rangle = 0,$$

así

$$\widetilde{H}(p) = \frac{1}{2}tr[II_p] = \frac{1}{2}[\epsilon_1 II(\frac{v-w}{\sqrt{2}}, \frac{v-w}{\sqrt{2}}) + \epsilon_2 II(\frac{v+w}{\sqrt{2}})]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(-II(v, v) + 2II(v, w) - II(w, w)) + \frac{1}{2}(II(v, v) + 2II(v, w) + II(w, w))] = II(v, w),$$

usando el hecho de que la segunda forma fundamental es bilineal. □

Dado que podemos expresar el operador de forma en una base ortonormal $\{v, w\}$ de T_pM y obtener la matriz de representación $[S]$, haciendo algunos cálculos obtenemos

$$K(p) = \epsilon det[S] \tag{1}$$

$$H(p) = \epsilon \frac{1}{2} tr[S] \tag{2}$$

hágase énfasis en que dichas expresiones son sólo válidas para cuando $\{v, w\}$ es base ortonormal de T_pM, para cuando no, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.9 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$ y $\{v, w\}$ es base cualquiera de T_pM, entonces

$$K(p) = \epsilon \frac{\langle S_p(v), v\rangle \langle S_p(w), w\rangle - \langle S_p(v), w\rangle^2}{\langle v, v\rangle \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

Y,

$$H(p) = \epsilon \frac{1}{2} \frac{\langle S_p(v), v\rangle \langle w, w\rangle - 2\langle S_p(v), w\rangle \langle v, w\rangle + \langle S_p(w), w\rangle \langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}.$$

Demostración Sea $\{v, w\}$ una base de T_pM. Podemos expresar $S(v)$ y $S(w)$ como $S(v) = av + bw$ y $S(w) = cv + dw$ para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de manera que

$$\langle S(v), v\rangle = a\langle v, v\rangle + b\langle w, v\rangle = \langle II(v, v), \xi\rangle, \, \langle S(v), w\rangle = a\langle v, w\rangle + b\langle w, w\rangle = \langle II(v, w), \xi\rangle,$$

$$\langle S(w), v\rangle = c\langle v, v\rangle + d\langle w, v\rangle = \langle II(w, v), \xi\rangle \text{ y } \langle S(w), w\rangle = c\langle v, w\rangle + d\langle w, w\rangle = \langle II(w, w), \xi\rangle,$$

en matrices tenemos

$$\begin{pmatrix} \langle II(v, v), \xi\rangle & \langle II(v, w), \xi\rangle \\ \langle II(w, v), \xi\rangle & \langle II(w, w), \xi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(v, v) & I(v, w) \\ I(w, v) & I(w, w) \end{pmatrix}$$

o simplemente $II = [S]I$, de manera que $[S] = (II)(I)^{-1}$, así se obtiene que

$$K(p) = \epsilon det[S] = \epsilon \frac{\langle S_p(v), v\rangle\langle S_p(w), w\rangle - \langle S_p(v), w\rangle^2}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

y,

$$H(p) = \epsilon\frac{1}{2}tr[S] = \epsilon\frac{1}{2}\frac{\langle S_p(v), v\rangle\langle w, w\rangle - 2\langle S_p(v), w\rangle\langle v, w\rangle + \langle S_p(w), w\rangle\langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}.$$

□

Siguiendo este resultado podemos señalar explícitamente cómo se calculan las curvaturas gaussiana y media dada una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$.

Corolario 2.2.10 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$ y $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ una carta tal que $p \in \varphi(U)$, entonces

$$K(p) = \epsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

y,

$$H(p) = \epsilon\frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

donde $\epsilon = \langle \xi, \xi\rangle$, ξ es la aplicación de Gauss y

$$e = \langle S_p(\varphi_u), u\rangle = \langle n, \varphi_{uu}\rangle,$$

$$f = \langle S_p(\varphi_u), \varphi_v\rangle = \langle n, \varphi_{uv}\rangle,$$

$$g = \langle S_p(\varphi_v), \varphi_v\rangle = \langle n, \varphi_{vv}\rangle,$$

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle,\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle,\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle.$$

Demostración La prueba se hace considerando la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ para el plano tangente T_pM y aplicando las fórmulas de la proposición anterior. □

2.3. Técnicas de cálculo y algunos ejemplos

En esta sección se presentan algunos ejemplos para algunas superficies especiales, así como los cálculos de las curvaturas media y gaussiana y el operador de forma.

Ejemplo 2.3.1 El operador de forma del espacio de De Sitter y del plano hiperbólico Como se vió en los ejemplos 2.1.10 y 2.1.12, la aplicación de Gauss del espacio de De Sitter y del plano hiperbólico está dada por $\xi(x, y, z) = (x, y, z)/r$ para todo $(x, y, z) \in M$, sea $v \in T_pM$ donde $M \subset \mathbb{R}^3_1$, como $\mathbb{H}^2(r)$ es tipo espacio cualquier vector tangente v es tipo espacio, pero en el caso de $\mathbb{S}^2_1(r)$ el plano tangente es tipo tiempo de manera que un vector tangente v puede ser tipo espacio, tiempo o nulo, en el caso de que v sea tipo espacio, y $M = \mathbb{S}^2_1(r)$, o bien $M = \mathbb{H}^2(r)$, tenemos que una curva que tiene como vector velocidad a v es

$$\alpha(t) = r\,\mathrm{senh}(t \mid v \mid /r)\frac{v}{\mid v \mid} + r\cosh(t \mid v \mid /r)p/r,$$

de manera que

$$\alpha'(t) = \mid v \mid \cosh(t \mid v \mid /r)\frac{v}{\mid v \mid} + \mid v \mid \mathrm{senh}(t \mid v \mid /r)p/r,$$

si $M = \mathbb{S}^2_1(r)$ y v es tipo tiempo, entonces

$$\alpha(t) = r\,\mathrm{sen}(t \mid v \mid /r)\frac{v}{\mid v \mid} + r\cos(t \mid v \mid /r)p/r,$$

entonces

$$\alpha'(t) = \mid v \mid \cos(t \mid v \mid /r)\frac{v}{\mid v \mid} - \mid v \mid \mathrm{sen}(t \mid v \mid /r)p/r,$$

si $M = \mathbb{S}^2_1(r)$ y v es tipo luz, entonces $\alpha(t) = p + tv$, se verifica fácilmente que en todos los casos la curva α cumple que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, así

$$D_v\xi = \frac{d}{dt}\xi \circ \alpha(t) \mid_{t=t_0} = \frac{\alpha(0)}{r} = \frac{v}{r}.$$

Por lo tanto en ambos casos el operador de forma S_p es $-\frac{v}{r}$ para todo $v \in T_pM$.

Ejemplo 2.3.2 (Cilindro) Consideremos la parametrización de M dada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW$, donde $\gamma(s) = (\cos s, \mathrm{sen}\, s, s)$, es decir, γ es una curva tipo luz, pues $\gamma'(s) = (-\mathrm{sen}\, s, \cos s, 1)$ es un vector nulo y $W = (0,0,1) = e_3$, recordando las fórmulas para el cálculo de las curvaturas gaussiana y media dada una parametriación y una base de T_pM se tiene que calcular los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales, $E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle$, $F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle$, $G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle$, $e = \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle$, $f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle$ y $g = \langle \varphi_{tt}, \xi \rangle$, donde ξ es la aplicación de Gauss de la superficie M.
Tomando $\{\varphi_s, \varphi_t\} = \{\gamma', W\}$ como base de T_pM tenemos que $\xi = (\cos s, \mathrm{sen}\, s, 0)$, definimos $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle$, en este caso $\epsilon = 1$ y por tanto $E = 0$, $F = -1$, $G = 0$, $e = -1 + 2\,\mathrm{sen}^2(s)$, $f = 0$ y $g = 0$. Así

$$K = \epsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0}{-1} = 0$$

Y,

$$H = \epsilon\frac{1}{2}\frac{eG + 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{-1 + 2\,\mathrm{sen}^2 s}{2}.$$

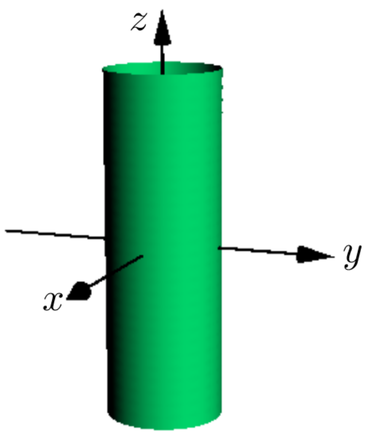

Figura 2.3: Un cilindro tiene curvaturas $K \equiv 0$ y H no constante cero

Ahora un ejemplo con K no constante cero y $H \equiv 0$.

Ejemplo 2.3.3 Helicoide tipo tiempo espacio(*veáse* [1, pág 94])
El helicoide está parametrizado de la siguiente manera $\varphi(s,t) = (t\cos s, t\,\mathrm{sen}\, s, as)$, entonces realizamos los cálculos de las curvaturas dada una parametrización local,

$$\varphi_s = (-t\,\mathrm{sen}\, s, t\cos s, a),\ \varphi_t = (\cos s, \mathrm{sen}\, s, 0),$$

$$\varphi_{ss} = (-t\cos s, -t\operatorname{sen} s, 0),\ \varphi_{st} = (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0),\ \varphi_{tt} = 0$$

la aplicación de Gauss es $\xi = \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{\|\varphi_s \times \varphi_t\|} = \frac{1}{\sqrt{|a^2-t^2|}}(-a\operatorname{sen} s, a\cos s, t)$, donde se introduce la condición $\epsilon = \frac{a^2-t^2}{|a^2-t^2|} \geq 0$, esto nos conduce a que $a \geq\mid t \mid$, es decir, el dominio de la variable t será $(-a, a)$, así $\epsilon = 1$, esta condición se pide con el fin de que ξ sea un vector espacial, de manera que T_pM sea tipo tiempo y por lo tanto la superficie sea tipo tiempo. Ahora solo resta calcular los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales:

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = t^2\operatorname{sen}^2 s + t^2\cos^2 s - a^2 = t^2 - a^2,$$

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = -t\operatorname{sen} s\cos s + t\operatorname{sen} s\cos s = 0,$$

$$G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1,$$

$$e = \langle \xi, \varphi_{ss} \rangle = \frac{at\cos s\operatorname{sen} s - at\cos s\operatorname{sen} s}{\sqrt{a^2-t^2}} = 0,$$

$$f = \langle \xi, \varphi_{st} \rangle = \frac{a\cos^2 s + a\operatorname{sen}^2 s}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a}{\sqrt{|a^2-t|}}$$

$$g = \langle \xi, \varphi_{tt} \rangle = 0.$$

Se obtiene lo siguiente sustituyendo dichos coeficientes:

$$H = \frac{1}{2}\epsilon\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{0\cdot G - 2\cdot f\cdot 0 + E\cdot 0}{\sqrt{\mid a^2 - t\mid}} = 0,$$

$$K = \epsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(0-a^2)/(a^2-t^2)}{a^2-t^2} = \frac{a^2}{(t^2-a^2)^2}.$$

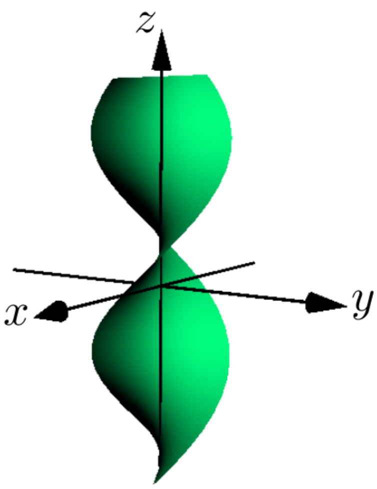

Figura 2.4: Helicoide tipo tiempo con $H \neq 0$ y $K \equiv 0$

Un ejemplo del tipo de superficies que nos interesan en el presente trabajo que de hecho es nuestro objeto de estudio son las siguientes:

Ejemplo 2.3.4 Consideremos una superficie $M \subset \mathbb{R}^3_1$ parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW$, donde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, con W un vector fijo, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle W, W \rangle = 0$ y $\langle \gamma'(s), W \rangle = 1$ para todo s en el dominio de $\gamma(s)$, se van a realizar los cálculos de K y H mediante la parametrización $\varphi(s,t)$, tenemos entonces que:

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0,\ F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \langle \gamma'(s), W \rangle = 1,\ G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \langle W, W \rangle = 0,$$

por lo tanto

$$detI = EG - F^2 = -F^2 = -\langle \gamma'(s), W \rangle^2 = -1 < 0,$$

de manera que la superficie es tipo tiempo.

Ahora se calcula la aplicación de Gauss $\xi(\varphi(s,t)) = \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{|\varphi_s \times \varphi_t|} = \frac{\gamma'(s) \times W}{|\gamma'(s) \times W|}$, pero

$$| \gamma'(s) \times W |= \sqrt{| \langle \gamma'(s) \times W, \gamma'(s) \times W \rangle |}$$

$$= \sqrt{| \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \langle W, W \rangle - \langle \gamma'(s), W \rangle^2 |} = \sqrt{\langle \gamma'(s), W \rangle} = 1,$$

por lo tanto $\xi(\varphi(s,t)) = \gamma'(s) \times W$ y $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle = 1$.
Por otro lado $\varphi_{ss} = \gamma''(s)$, $\varphi_{st} = 0 = \varphi_{tt}$, con lo cual: $e = \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle$, $f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle = 0 = g = \langle \varphi_{tt}, \xi \rangle$.
De manera que

$$K = \epsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \frac{0}{-1} = 0$$

Y,

$$H = \frac{1}{2} \epsilon \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{0 - 0 + 0}{-1} = 0.$$

Por lo tanto M es una superficie con curvaturas H y K constantes cero.
Calculemos además el operador de forma S_p, nótese que dado que S_p es una transformación lineal de T_pM en T_pM basta con calcular S_p en una base, a saber la base $\{\varphi_s, \varphi_t\}$.
Sea $p = \varphi(s_0, t_0)$ y $\alpha : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tal que $\alpha(s) = \gamma(s) + t_0 W$, entonces $\alpha(s_0) = p$ y $\alpha'(s_0) = \varphi_s |_{(s_0,t_0)}$, entonces

$$S_p(\varphi_s |_{(s_0,t_0)}) = -D_{\varphi_s}\xi = -\frac{d}{ds}(\xi \circ \alpha)(s) = -\frac{d}{ds}\gamma'(s) \times W$$

$$= -[\gamma''(s) \times W + \gamma'(s) \times \frac{dW}{ds}] |_{s=s_0} = -\gamma''(s) \times W |_{s=s_0},$$

en la base pseudo-ortonormal $\{\varphi_s, \varphi_t\} = \{\gamma', W\}$ tenemos que

$$S_p(\varphi_s |_{s=s_0}) = \langle S_p(\varphi_s), W \rangle \gamma'(s) + \langle S_p(\varphi_s), \gamma'(s) \rangle W$$

$$= -[\langle \gamma''(s) \times W, W \rangle \gamma'(s) + \langle \gamma''(s) \times W, \gamma'(s) \rangle W] = -\langle \gamma''(s) \times W, \gamma'(s) \rangle W.$$

Para el cálculo de $S_p(\varphi_t |_p)$ tómese la curva $\beta(t) = \gamma(s_0) + tW$, así $\beta(t_0) = p$ y $\beta'(t_0) = \varphi_t |_{t=t_0}$, entonces

$$S_p(\varphi_t |_p) = -D_{\varphi_t}\xi = -\frac{d}{dt}(\xi \circ \beta)(t) = -\frac{d}{dt}\gamma'(s) \times W = 0.$$

Con lo cual la representación matricial de S_p en la base $\{\gamma', W\}$ es la siguiente

$$[S]_{\{\gamma', W\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\langle \gamma''(s) \times W, \gamma'(s) \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta superficie está parametrizada con $\gamma(s) = (s, \cosh(s), \mathrm{senh}(s))$ y $W = (0,1,1)$.
El objetivo principal de este trabajo es mostrar que una superficie con curvaturas gaussiana y media constantes cero es un plano o bien una superficie como la anterior.

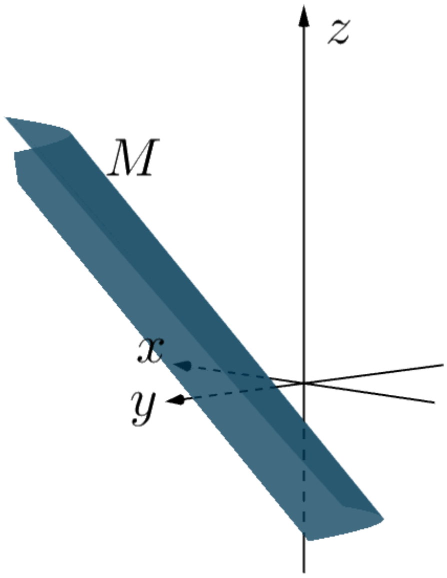

Figura 2.5: Superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW$

2.4. Acerca del operador de forma

Comenzaremos por definir a qué se llama dirección principal, en el caso euclidiano se le llama dirección principal a las direcciones en los que la curvatura normal alcanza su máximo y mínimo y dichas direcciones tienen la propiedad de ser vectores propios del operador de forma, dado que en el espacio de Minkowski el conjunto de los vectores tangentes a M de norma uno no siempre es un conjunto acotado no podemos asegurar siempre que la curvatura normal alcance su máximo y mínimo, por lo que es necesario buscar otra definición de dirección principal del operador de forma S.

Definición 2.4.1 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$, $p \in M$, $v \in T_pM$ y S el operador de forma de M en p, decimos que v dirección principal de S si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S(v) = \lambda v$, i.e., si v es vector propio de S.

Definición 2.4.2 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, decimos que M es *umbílical* si existe $\lambda : M \to \mathbb{R}$ función diferenciable tal que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que $S(X) = \lambda X$, en un punto la condición sería que $S_p(X) = \lambda(p)X_p$, donde S denota el operador de forma de M. En particular un punto $p \in M$ es umbilical si existe un $\lambda \in R$ tal que $S(v) = \lambda v$ para todo $v \in T_pM$.

Teorema 2.4.3 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie espacial, entonces el operador de forma S_p si $p \in M$ no es un punto umbilical, entonces existen dos direcciones principales y son ortogonales entre sí.

Demostración Por simplicidad escribiremos S entendiendo que se trata del operador de forma S_p definido en $p \in M$. Consideremos el siguiente conjunto $A = \{u \in T_pM : \|u\| = 1\}$, puesto que la métrica restringida a T_pM es un producto interno pues M es espacial podemos decir que $(T_pM, \langle , \rangle)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle_E)$, í,e., existe una isometría lineal $T : T_pM \to \mathbb{R}^2$, dicha isometría manda A en la esfera unitaria euclidiana pues preserva productos escalares, además como toda transformación lineal es continua y por ser biyectiva existe T^{-1} que también lineal y por tanto continua, resulta que T es un homeomorfismo, por lo tanto T^{-1} manda conjuntos compactos en compactos y dado que la esfera unitaria es un conjunto compacto se sigue que A

es compacto. Ahora la función curvatura normal $k : A \subset T_pM \to \mathbb{R}$ está definida de la siguiente forma

$$k(u) = \langle S(u), u\rangle.$$

Es fácil ver que k es continua, pues $\langle , \rangle$ es continuo, por lo tanto k es una función continua en un compacto, esto implica que k alcanza su máximo y su mínimo en A, sea $e_1 \in A$ tal que $k(e_1) \geq k(u)$ para todo $u \in A$ y sea $k_1 = k(e_1) = \langle S(e_1), e_1\rangle$, es decir, e_1 es dirección principal pues k alcanza su máximo en e_1. Sea $e_2 \in A$ tal que $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, por consiguiente si $u \in A$, entonces $u = u(\theta) = \cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2$. Ahora podemos escribir k en términos de un ángulo θ, $k(\theta) = k(\theta)$, i,e., $k : (0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, explícitamente

$$k(\theta) = \langle S(\cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2), \cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2\rangle$$

$$= \cos^2\langle S(e_1), e_1\rangle + \cos\theta \operatorname{sen}\theta\langle S(e_1), e_2\rangle + \cos\theta \operatorname{sen}\theta\langle S(e_2), e_1\rangle + \operatorname{sen}^2\theta\langle S(e_2), e_2\rangle$$
$$= \cos^2\langle S(e_1), e_1\rangle + 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta\langle S(e_1), e_2\rangle + \operatorname{sen}^2\theta\langle S(e_2), e_2\rangle,$$

utilizando que S es lineal y autoadjunta.
Calculando $\frac{dk}{d\theta}(\theta)$ tenemos que

$$\frac{dk}{d\theta}(\theta) = -2\cos\theta \operatorname{sen}\theta\langle S(e_1), e_1\rangle + 2\langle S(e_1), e_2\rangle[\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta] + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\langle S(e_2), e_2\rangle$$

$$= 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta[\langle S(e_2), e_2\rangle - \langle S(e_1), e_1\rangle] + 2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\langle S(e_1), e_2\rangle$$

Si $\theta = 0$, entonces $k(0) = \langle S(e_1), e_1\rangle = k_1$, es decir, k alcanza su máximo en $\theta = 0$, con lo cual $\frac{dk}{d\theta}(0) = 0$ si y sólo si $2\langle S(e_1), e_2\rangle = 0$, entonces $\langle S(e_1), e_2\rangle = 0$.
Dado que $\{e_1, e_2\}$ es base ortonormal de T_pM, entonces

$$S(e_1) = \langle S(e_1), e_1\rangle e_1 + \langle S(e_1), e_2\rangle e_2 = \langle S(e_1), e_1\rangle e_1 = k_1 e_1$$

Esto prueba que e_1 es un valor propio de S.
De manera similar

$$S(e_2) = \langle S(e_2), e_1\rangle e_1 + \langle S(e_2), e_2\rangle e_2 = \langle S(e_2), e_2\rangle e_2$$

lo cual prueba que e_2 también es un valor propio de S.
Por último probaremos que e_2 también es dirección principal, primero simplifiquemos $k(\theta)$ recordando $\langle S(e_1), e_2\rangle = 0$ y que $k_1 = \langle S(e_1), e_1\rangle$, entonces

$$k(\theta) = k_1\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\langle S(e_2), e_2\rangle$$

Y,

$$\frac{dk}{d\theta}(\theta) = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta(\langle S(e_2), e_2\rangle - k_1)$$

Entonces,

$$\frac{d^2k}{d\theta^2}(\theta) = 2(\langle S(e_2), e_2\rangle - k_1)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta).$$

Por lo tanto $\frac{dk}{d\theta}(\theta) = 0$ si $\theta = 0$ o $\theta = \pi/2$, si $\theta = 0$ es el caso presentado arriba pero si $\theta = \pi/2$, entonces $\frac{d^2k}{d\theta^2}(\pi/2) = -2(\langle S(e_2), e_2\rangle - k_1)$, pero $k(e_2) - k_1 = \langle S(e_2), e_2\rangle - k_1 < 0$ pues $k_1 > k(e_2)$, de manera que $\frac{d^2k}{d\theta^2}(\pi/2) > 0$, es decir, k tiene un mínimo en $\theta = \pi/2$ y $k(\pi/2) = \langle S(e_2), e_2\rangle = k(e_2)$, es decir, e_2 es dirección principal de M. Lo que termina de demostrar el teorema. $\square$

La prueba de este teorema en el caso euclidiano puede encontrarse en [6, pág 200].

Corolario 2.4.4 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie espacial y $p \in M$, entonces el operador de forma S es diagonalizable.

Demostración Por el teorema anterior S tiene dos direcciones principales, tomando la representación matricial con respecto a la base formada por esas direcciones, tenemos que $[S]$ es una matriz diagonal. □

Teorema 2.4.5 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie tal que $S_p(v) = 0$ para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_pM$, entonces M es parte de un plano.

Demostración Por hipótesis tenemos que $S_p(X) = 0 = -D_X n = -\frac{d}{dt} n \circ \alpha \mid_{t=t_0}$ para todo X campo tangente a M y para toda curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = X$, por lo tanto n es un campo vectorial constante en cualquier $p \in M$. Ahora tomemos $q \neq p$ punto en M, sea $\gamma : I' \subset \mathbb{R} \to M$ tal que γ une p con q, y supongamos que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$ y consideremos la función $f : I' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(t) = \langle \gamma(t) - p, n \rangle$, donde $\gamma(t) - p$ es el vector que une p con algún punto de la curva γ, nótese que $f(0) = 0$. Si demostramos que $\gamma(t) - p$ es ortogonal a n para todo $t \in I'$ demostramos que cualquier vector que una cualesquiera dos puntos de M, entonces claramente M es parte de un plano ortogonal a n. Para demostrar dicha ortogonalidad veamos que $f(t) = 0$ para todo $t \in I'$, entonces

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\langle \gamma(t) - p, n \rangle = \frac{d}{dt}\langle \gamma(t) - p, n \circ \gamma(t) \rangle = \langle \frac{d}{dt}(\gamma(t) - p), n \circ \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t) - p, \frac{d}{dt} n \circ \gamma(t) \rangle$$

$$= \langle \frac{d}{dt}\gamma(t) - \frac{d}{dt}p, n \circ \gamma(t) \rangle = \langle \gamma'(t), n \circ \gamma(t) \rangle = 0,$$

puesto que n es constante y $\gamma'(t) \in T_pM$. Por lo tanto $f(t) = c$ para todo $t \in I'$ pero $f(0) = 0$, así que $f(t) = 0$ para todo $t \in I'$, por lo que M es parte de un plano ortogonal a n. □

Teorema 2.4.6 Si $M \subset \mathbb{R}^3_1$ es parte de un plano, entonces $S_p(v) = 0$ para todos $p \in M$ y $v \in T_pM$.

Demostración Dado que M es parte de un plano se puede parametrizar como $0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) - c(z - z_0)$, donde $p = (x_0, y_0, z_0) \in M$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes y $n = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{|a^2+b^2-c^2|}}$, de manera que $S_p(v) = -D_v n = -\frac{d}{dt} \mid_{t=t_0} n \circ \alpha(t) = 0$, pues n es un campo vectorial constante y $\alpha(t)$ es una curva en M tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$, así $S_p \equiv 0$ ya que p y v fueron elementos cualesquiera de M y T_pM respectivamente. □

Observación 2.4.7 Para una superficie espacial el operador de forma es una transformación autoadjunta que va T_pM a T_pM, donde es un plano temporal, así pues como el teorema 1.4.17 muestra el operador de forma S no siempre es diagonalizable, contrario al caso euclidiano en el que el operador de forma siempre es diagonalizable. Con esta observación podemos enunciar la siguiente proposición (que junto con el corolario 2.16 fueron tomados de [7] de la proposición 3.3.5 y corolario 3.3.1 respectivamente):

Proposición 2.4.8 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada y $p \in M$. Tenemos que

- si S es diagonalizable, entonces $K(p) = \epsilon ab$ y $H(p) = \epsilon \frac{a+b}{2}$,
- si M es temporal y
$$[S] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
con $b \neq 0$, entonces $K(p) = a^2 + b^2$ y $H(p) = a$,

- si M es temporal y

$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix},$$

entonces $K(p) = a^2$ y $H(p) = a$.

Demostración Por la observación anterior S es una transformación autoadjunta que va T_pM a T_pM y como vimos antes T_pM es un subespacio vectorial no degenerado, para el caso espacial el corolario 2.4.4 muestra que S es diagonalizable en una base ortonormal, por otro lado en el caso temporal S no siempre es diagonalizable tal como muestra el teorema 1.4.17 pero puede darse el caso en que si lo sea para una base ortonormal, dicho de otro modo en ambos casos

$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

y recordemos de la definición $K(p) = \epsilon det[S]$ y $H(p) = \epsilon\frac{1}{2}tr[S]$ dada una base ortonormal, así $K(p) = \epsilon ab$ y $H(p) = \epsilon\frac{a+b}{2}$, lo que concluye el primer caso.
Si M temporal, nuevamente por ser S una transformación autoadjunta que va T_pM a T_pM y T_pM un subespacio temporal el teorema 1.4.17 nos dice que S puede tener una representación como

$$[S] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$ para alguna base ortonormal, en tal caso aplicamos las definiciones de K y H y obtenemos $K(p) = a^2 + b^2$ y $H(p) = a$.
Si S tiene una representación como

$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix}$$

para alguna base pseudo-ortonormal $\{v, w\}$, entonces $S(v) = av \pm w$ y $S(w) = aw$, $\langle v, v\rangle = 0 = \langle w, w\rangle$, $\langle v, w\rangle = 1$, $\langle S(w), w\rangle = 0$ y $\langle S(v), w\rangle = a$, usando las fórmulas de la proposición 2.2.9 tenemos

$$\begin{aligned} K(p) &= \epsilon\frac{\langle S_p(v), v\rangle\langle S_p(w), w\rangle - \langle S_p(v), w\rangle^2}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2} \\ &= \langle S(v), w\rangle^2 = a^2. \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned} H(p) &= \epsilon\frac{1}{2}\frac{\langle S_p(v), v\rangle\langle w, w\rangle - 2\langle S_p(v), w\rangle\langle v, w\rangle + \langle S_p(w), w\rangle\langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2} \\ &= \langle S(v), w\rangle = a. \end{aligned}$$

Nótese que si ξ denota la aplicación de Gauss de M, entonces $\epsilon = \langle \xi, \xi\rangle = 1$ ya que T_pM es temporal. □

Corolario 2.4.9 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$ y S el operador de forma de M en p:

- si S es diagonalizable en una base ortonormal de T_pM, entonces $\epsilon 2H^2(p) \geq K(p)$,

- si M es temporal y

$$[S] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$, entonces $K(p) > 0$ y $H^2(p) < K(p)$,

- si M es temporal y
$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix},$$
entonces $H^2(p) = K(p) \geq 0$.

Demostración Si
$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$
entonces
$$\begin{aligned} \epsilon 2H^2(p) &= \epsilon 2\frac{(a+b)^2}{4} = \epsilon\frac{a^2+2ab+b^2}{2} \\ &= \epsilon\frac{a^2+b^2}{2} + \epsilon ab = \epsilon\frac{a^2+b^2}{2} + K(p) \geq K(p). \end{aligned}$$
Si M es temporal y
$$[S] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
con $b \neq 0$, entonces $K(p) = a^2 + b^2 \geq 0$ y $H^2(p) = a^2 < a^2 + b^2 = K(p)$, pues $b \neq 0$.
Si M es temporal y
$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix},$$
entonces $H^2(p) = a^2 = K(p) \geq 0$. □

Observación 2.4.10 Si $M \subset \mathbb{R}^3_1$ es una superficie temporal y el operador de forma tiene una representación matricial en una base pseudo-ortonormal
$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix},$$
y $H = 0 = K$, entonces $H = a = 0$, de manera que
$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corolario 2.4.11 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie temporal:

- Si M es una superficie temporal y S es tal que
$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix},$$
en una base pseudo-ortonormal, entonces la curvatura gaussiana es constante si y sólo si la curvatura media es constante.

- Si S es no diagonalizable, entonces $K \geq 0$.

Demostración Si $[S]$ es como en el primer caso, entonces por la proposición 2.4.8 $H = a$ y $K = a^2$, por lo tanto una curvatura es constante si y sólo si la otra lo és.
Si S no es diagonalizable entonces, o bien $K = a^2 + b^2$, o bien $K = a^2$, así en ambos casos $K \geq 0$. □

Capítulo 3

Geometría diferencial de superficies

En el presente capítulo se expondrán algunas proposiciónes y algunas herramientas más sofisticadas que nos preparan el camino para resolver nuestra pregunta que nos queda, **¿de qué forma son las superficies temporales que cumplen que tanto la curvatura media y gaussiana son constantes e iguales a cero?**

3.1. La conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura

Usaremos un par de notaciones usuales en el tratamiento de campos vectoriales, denotaremos como $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$ el espacio de los campos vectoriales, en particular dada una superficie $M \subset \mathbb{R}^3_1$ el espacio de los campos vectoriales que son tangentes a M se denota como $\mathfrak{X}(M)$.
Hemos hablado ya de derivadas direccionales, a saber, cuando se habló del operador de forma, bien podemos pensar en cualquier otro campo vectorial que no necesariamente sea la aplicación de Gauss y considerar su derivada direccional en la dirección de un vector v.

Definición 3.1.1 Sea $f : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$ una función $\mathbb{C}^\infty$ y $v \in \mathbb{R}^3_1$, la derivada direccional de f en la dirección v en el punto $p \in \mathbb{R}^3_1$ se calcula considerando una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$ para algún $t_0 \in I$, entonces

$$v \cdot f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \mid_{t=t_0}$$

.

Observación 3.1.2 Podemos extender este concepto a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$, de manera que

$$(X \cdot f)(p) = X(p) \cdot f$$

Una manera considerar un cierto tipo de segunda derivada entre campo vectoriales es a través del *corchete de Lie*, mismo que ha de servir para definir el tensor de curvatura de $\mathbb{R}^3_1$. El corchete de Lie como se verá a continuación será efectivamente un nuevo campo vectorial en M.

Definición 3.1.3 Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$ campos vectoriales C^∞ y sea $f : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, el corchete de Lie $[X, Y]$ está dado por

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

.

El concepto de conexión nos permite derivar campos vectoriales, se escribe como $D_X Y$ y se lee como la derivada de X en la dirección de Y para campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$.

Definición 3.1.4 Una **conexión** en $\mathbb{R}^3_1$ es un campo vectorial $D : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$ que cumple las siguientes propiedades:
Sea $F : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $D_{FY} X = F D_Y X$,
- (Regla de Leibniz) $D_X(FY) = (X \cdot F)Y + F D_X Y$,
- $D_{\lambda X+Y} Z = \lambda D_X Z + D_Y Z$, $D_Z \lambda X + Y = \lambda D_Z X + D_Z Y$.

En particular si una conexión D satisface lo siguiente decimos que la conexión es una conexión de Levi-Civita.

- (Compatibilidad con la métrica) $X \cdot \langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$, y
- (Libre de torsión) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.

La conexión D definida en $\mathbb{R}^3_1$ para dos campos vectoriales X e Y está dada por

$$D_X Y = (X \cdot Y_1, X \cdot Y_2, X \cdot Y_3),$$

donde $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Usando las propiedades antes mencionadas sobre la derivada direccional se puede probar que la conexión D de $\mathbb{R}^3_1$ asociada con la métrica de Lorentz es efectivamente una conexión de Levi-Civita, más aún en [7] se muestra que de hecho es la única.

Además la propiedad de libre torsión de la conexión nos da una manera de calcular el corchete de Lie dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$.
Dado que el plano tangente a una superficie T_pM es un subespacio vectorial, por la proposición 1.4.5 podemos descomponer cualquier vector y más en general cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$ de la siguiente manera:

$$X = X^T + X^\perp,$$

donde $X^T \in \mathfrak{X}(M)$ es llamada *parte tangente de* X y $X^\perp \in T_pM^\perp$ *parte ortogonal de* X, en particular se tiene la siguiente descomposición en suma ortogonal:

$$D_X Y = (D_X Y)^T + (D_X Y)^\perp$$

.

Definición 3.1.5 (La conexión inducida en una superficie y la segunda forma fundamental) La *conexión inducida* en una superficie M se define como $(D_X Y)^T$ y se denota como $\nabla_X Y$, la segunda forma fundamental se extiende a campos vectoriales como $(D_X Y)^\perp$ y esta se denota de la misma forma que antes, a saber $II(X, Y)$.

Observación 3.1.6 (Fórmula de Gauss) Siguiendo una simple sustitución tenemos que

$$(D_X Y)^T + (D_X Y)^\perp = D_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y),$$

esta última igualdad se conoce como la fórmula de Gauss.

También se puede ver que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y ξ es la aplicación de Gauss de M tenemos que $S(X) = -D_X\xi$ tal y como se definió el operador de forma, solo que ahora extendido a un campo vectorial.
La siguiente proposición muestra que la definición que acabamos de dar sobre la segunda forma fundamental y la que se había dado anteriormente coinciden.

Proposición 3.1.7 La segunda forma fundamental $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to (T_pM)^{\perp}$, satiface la siguiente igualdad: Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y ξ la aplicación de Gauss de M. Entonces

$$II(X,Y) = \epsilon\langle S(X), Y\rangle\xi$$

Demostración Por definición $II(X,Y) \in (T_pM^{\perp})$, por consiguiente $II = \lambda(p)\xi$, con $\lambda : M \to \mathbb{R}$, entonces $\langle II(X,Y), \xi\rangle = \epsilon\lambda$, así $\lambda = \epsilon\langle II(X,Y), \xi\rangle$ tenemos entonces que $II(X,Y) = \epsilon\langle II(X,Y), \xi\rangle\xi$, donde $\epsilon = \langle \xi, \xi\rangle = \pm 1$, además por otro lado como $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que $\langle Y, \xi\rangle = 0$, entonces $0 = X \cdot \langle Y, \xi\rangle = \langle D_XY, \xi\rangle + \langle Y, D_X\xi\rangle$, de manera que $\langle D_XY, \xi\rangle = -\langle Y, D_X\xi\rangle$ por la propiedad de compatibilidad con la métrica, pero

$$\langle D_XY, \xi\rangle = \langle \nabla_XY + II(X,Y), \xi\rangle = \langle \nabla_XY, \xi\rangle + \langle II(X,Y), \xi\rangle$$

$$= \langle II(X,Y), \xi\rangle = -\langle Y, D_X\xi\rangle = \langle Y, S(X)\rangle,$$

usando la fórmula de Gauss y el hecho de que $\nabla_XY \in \mathfrak{X}(M)$ y que por tanto $\langle \nabla_XY, \xi\rangle = 0$. Así $\langle II(X,Y), \xi\rangle = \langle S(X), Y\rangle$, sustituyendo obtenemos

$$II(X,Y) = \epsilon\langle II(X,Y), \xi\rangle\xi = \epsilon\langle S(X), Y\rangle\xi.$$

□

Además utilizaremos el concepto de curva integral de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ que geométricamente significa tomar una curva cuyo vector velocidad es precisamente el campo X.

Definición 3.1.8 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada y $X \in \mathfrak{X}(M)$, una curva integral $\alpha : I \subset M$ es una curva que cumple que $X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$

Definimos también el concepto de curva geodésica de $\mathbb{R}^3_1$ que geométricamente indica la distancia más corta entre dos puntos. Como se dará cuenta el lector esta definición depende de la conexión D del espacio y dado que dicha conexión coincide con la conexión de $\mathbb{R}^3$, las curvas geodésicas son las mismas que en $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.1.9 Una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ es una geodésica del ambiente $\mathbb{R}^3_1$ si es tal que $\gamma''(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Observación 3.1.10 Una curva geodésica en $\mathbb{R}^3_1$ es una recta pues $0 = D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \gamma''(t)$ y las curvas cuyo vector aceleración en constante cero son las líneas rectas.

Otra herramienta que nos servirá para poder probar la veracidad de una ecuación muy importante será el llamado *tensor de curvatura* del espacio ambiente $\mathbb{R}^3_1$.

Definición 3.1.11 Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$, el tensor de curvatura $R^D : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$

$$R^D(X,Y)Z = D_XD_YZ - D_YD_XZ - D_{[X,Y]}Z.$$

Una similitud más de $\mathbb{R}^3_1$ con el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ nos hace ver que para cualesquiera campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$ el tensor de curvatura es constante cero, propiedad que también se observa en el caso euclidiano.

Proposición 3.1.12 Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3_1)$,se cumple que

$$R^D(X,Y)Z = 0.$$

Demostración La demostración procederá con el cálculo de los distintos términos que conforman el tensor de curvatura,

$$D_X(D_Y Z) = D_X(Y \cdot Z_1, Y \cdot Z_2, Y \cdot Z_3) = (X \cdot (Y \cdot Z_1), X \cdot (Y \cdot Z_2), X \cdot (Y \cdot Z_3)), \quad (1)$$

$$D_Y(D_X Z) = D_Y(X \cdot Z_1, X \cdot Z_2, X \cdot Z_3) = (Y \cdot (X \cdot Z_1), Y \cdot (X \cdot Z_2), Y \cdot (X \cdot Z_3)), \quad (2)$$

Y por último

$$D_{[X,Y]}Z = ([X,Y] \cdot Z_1, [X,Y] \cdot Z_2, [X,Y] \cdot Z_3)$$
$$= (X \cdot (Y \cdot Z_1) - Y \cdot (X \cdot Z_1), X \cdot (Y \cdot Z_2) - Y \cdot (X \cdot Z_2, X \cdot (Y \cdot Z_1) - Y \cdot (X \cdot Z_1)),$$

Por lo tanto si restamos (1)-(2) obtenemos $D_{[X,Y]}Z$, explícitamente $D_{[X,Y]}Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z)$, despejando tenemos que

$$D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z = R^D(X,Y)Z = 0.$$

□

3.2. La ecuación de Codazzi

Definición 3.2.1 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$ y S_p el operador de forma de M en p, la derivada covariante de S_p, está dado por $(\nabla_X S)(Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y)$, donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 3.2.2 Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple $\langle(\nabla_X S)(Y), Z\rangle = \langle Y, (\nabla_X S)(Z)\rangle$, es decir, $\nabla_X S$ es autoadjunto con respecto a los campos vectoriales tangentes a M.

Demostración Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$, S_p el operador de forma de M en p y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, por la compatibilidad con la métrica se tiene que

$$X \cdot \langle S(Y), Z\rangle = \langle \nabla_X S(Y), Z\rangle + \langle S(Y), \nabla_X Z\rangle,$$

despejando

$$\langle \nabla_X S(Y), Z\rangle = X \cdot \langle S(Y), Z\rangle - \langle S(Y), \nabla_X Z\rangle,$$

Entonces,

$$\langle(\nabla_X S)(Y), Z\rangle = \langle \nabla_X(SY), Z\rangle - \langle S(\nabla_X Y), Z\rangle$$
$$= X \cdot \langle S(Y), Z\rangle - \langle S(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle \nabla_X Y, S(Z)\rangle$$
$$= X \cdot \langle Y, S(Z)\rangle - \langle Y, S(\nabla_X Z)\rangle - \langle \nabla_X Y, S(Z)\rangle$$
$$= \langle Y, \nabla_X(S(Z))\langle - \langle Y, S(\nabla_X Z)\rangle = \langle Y, (\nabla_X S)(Z)\rangle.$$

□

Teorema 3.2.3 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada, $p \in M$, S_p el operador de forma de M en p y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$(\nabla_X S)(Y) = (\nabla_Y S)(X). \quad (3)$$

Demostración Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y ξ la aplicación de Gauss de M,

$$(\nabla_X S)(Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y) = -\nabla_X(D_Y\xi) + D_{\nabla_X Y}\xi$$

$$= -D_X(D_Y\xi)^T + D_{\nabla_X Y}\xi = -(D_Y D_X\xi + D_{[X,Y]}\xi)^T + D_{\nabla_X Y}\xi$$
$$= -(D_Y D_X\xi)^T - D_{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)}\xi + D_{\nabla_X Y}\xi = -(D_Y D_X\xi)^T + D_{\nabla_Y X}\xi$$
$$= (D_Y S(X))^T - S(\nabla_Y X) = \nabla_Y S(X) - S(\nabla_Y X) = (\nabla_Y S)(X).$$

Se usó fuertemente el hecho de que el tensor de curvatura de $\mathbb{R}^3_1$ es cero, la propiedad de libre torsión de la conexión y la definición del operador de forma S. □

NOTA: A la ecuación (3) se conoce como la ecuación de Codazzi.

3.3. Superficies umbílicas

Definición 3.3.1 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada; decimos que M es *umbílica* si existe $\lambda : M \to \mathbb{R}$ función diferenciable tal que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que $S(X) = \lambda X$, donde S denota el operador de forma de M.

La siguiente proposición nos muestra que si además la superficie es conexa entonces el factor λ debe ser una función constante, el hecho importante a resaltar es que en la definición anterior, para un determinado campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, la función toma un valor y para otro campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ otro valor, pero en el caso de que la superficie sea conexa ambos valores de λ coinciden.

Proposición 3.3.2 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie umbílica y conexa, entonces la función λ de la definición 3.3.1 es constante.

Demostración Como resultado de aplicar la definición y la ecuación de Codazzi, tenemos lo siguiente: para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X S)(Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y) = (\nabla_Y S)(X) = \nabla_Y(SX) - S(\nabla_Y X),$$

en particular para un par de campos linealmente independientes que cumplen que $\nabla_{X(p)}Y(p) = \nabla_{Y(p)}X(p)$, a este par de campos se les suele llamar marco ortonormal geodésico y hacen que la ecuación arriba descrita se simplifique $\nabla_X(SY) = \nabla_Y(SX)$, ahora aplicamos la hipótesis de que M es umbílica y la regla de Leibnitz

$$\nabla_X(SY) = \nabla_X(\lambda Y) = (X \cdot \lambda)Y + \lambda\nabla_X Y = \nabla_Y(SX) = \nabla_Y(\lambda X) = (Y \cdot \lambda)X + \lambda(\nabla_Y X).$$

Puesto que elegimos $\{X, Y\}$ como marco ortonormal geodésico la igualdad anterior se reduce

$$(X(p) \cdot \lambda(p))Y(p) = (Y(p) \cdot \lambda(p))X(p),$$

y dado que $\{X, Y\}$ es un conjunto linealmente independiente la igualdad anterior sólo se cumple si λ tiene derivada direccional cero en T_pM, siguiendo este mismo razonamiento en cada punto $p \in M$ se concluye que λ es una función cuya derivada direccional en cualquier dirección es cero y en cualquier punto de M, por lo tanto λ es una función constante. □

Ahora podemos caracterizar a **todas** las superficies umbílicas de $\mathbb{R}^3_1$; este resultado fue tomado de [7] de la proposición 5.1.1.

Teorema 3.3.3 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie umbílica y conexa, entonces M o es parte de un plano, o bien es parte de una superficie de De Sitter $\mathbb{S}_1^2(r)$, o bien es parte del plano hiperbólico de radio r $\mathbb{H}^2(r)$.

Demostración Sea S el operador de forma de M; por hipótesis $S(X) = \lambda X$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Si $\lambda = 0$, entonces $S \equiv 0$, por el teorema 2.4.5 se sigue que M es parte de un plano. Si $\lambda \neq 0$, entonces tomamos un campo $Z(p) := p + \frac{1}{\lambda}\xi(p)$, donde ξ es la aplicación de Gauss definida en M, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$D_X Z = D_X(p + \frac{1}{\lambda}\xi) + D_X p + \frac{1}{\lambda} D_X \xi = X - \frac{1}{\lambda} S(X) = X - \frac{1}{\lambda}\lambda X = 0,$$

una observación simple muestra que $D_X p = X$, pues si $p = (x, y, z)$, entonces $D_X p = (X \cdot x, X \cdot y, X \cdot z) = (X_1, X_2, X_3) = X$. Dado que $D_X Z = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces concluimos que $Z = (a, b, c)$, es decir, es un campo constante, de manera que $\langle Z(p) - p, Z(p) - p \rangle = \frac{1}{\lambda^2}\langle \xi(p), \xi(p) \rangle = \frac{1}{\lambda^2}\epsilon$, por lo tanto el campo vectorial $Z(p) - p$ es el normal unitario a la superficie y es el vector de posición de los puntos que van de p a $Z(p)$, por lo tanto M, o bien parte de plano hiperbólico, o bien es parte de la superficie de De Sitter centrada en $Z(p)$ y de radio $\frac{1}{|\lambda|}$.
□

Corolario 3.3.4 Sea $M \subset \mathbb{R}_1^3$ una superficie conexa temporal tal que el operador de forma $S : T_pM \to T_pM$ tiene dos valores propios nulos, entonces M es umbílica, es decir, o bien M es parte de un plano temporal, o bien M es parte de una superficie de De Sitter.

Demostración Dado que S es una transformación lineal autoadjunta en un plano tipo tiempo (pues M es temporal), entonces por la proposición 1.4.18 se sigue que $S = \lambda Id$, es decir, M es umbílica. Si $\lambda = 0$, entonces $S \equiv 0$ y por el teorema 2.4.5 se sigue que M es parte de un plano temporal, pues M es temporal. Si $\lambda \neq 0$, entonces por el teorema 3.3.3 M es parte del plano hiperbólico, o bien es parte de una superficie de De Sitter, pero el plano hiperbólico es espacial, así solo queda la opción de que M sea parte de una superficie de De Sitter. □

Capítulo 4

Superficies planas y mínimas

4.1. Superficies regladas

Las superficies $M \subset \mathbb{R}^3_1$ que vamos a considerar están paramétrizadas por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW(s)$, donde $\gamma, W : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tales que $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle W, W \rangle = 0$ y $\langle \gamma'(s), W \rangle \neq 0$, se puede deducir que $\langle W'(s), W(s) \rangle = 0$. La siguiente proposición nos muestra cómo calcular las curvaturas H y K a través de la parametrización dada.

Proposición 4.1.1 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW(s)$, donde $\gamma, W : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tales que $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle W, W \rangle = 0$ y $\langle \gamma'(s), W \rangle \neq 0$, Entonces

$$K = \frac{\langle W'(s), \gamma'(s) \times W(s) \rangle^2}{\langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s) \rangle^2 \langle \gamma'(s), W(s) \rangle^2}, \tag{1}$$

y,

$$H = \langle \lambda(s) W(s) - W'(s), \xi \rangle. \tag{2}$$

Demostración Para obtener los cálculos de las curvaturas usaremos la base $\{\varphi_s, \varphi_t\}$ de T_pM y procederemos a calcular los coeficientes E, F, G, e, f y g. Derivando tenemos que $\varphi_s = \gamma'(s) + tW'(s)$, $\varphi_t = W(s)$ y

$$\xi = \frac{(\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s)}{|\ (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s)\ |}$$

es la aplicación de Gauss y $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle = 1$, con lo cual:

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \langle \gamma'(s) + tW'(s), \gamma'(s) + tW'(s) \rangle = 2t + t^2 \langle W'(s), W'(s) \rangle,$$

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s) \rangle = \langle \gamma'(s), W(s) \rangle \text{ y}$$
$$G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \langle W(s), W(s) \rangle = 0,$$

así que $DetI = EG - F^2 = -F^2 = -\langle \gamma'(s), W(s) \rangle^2 < 0$, con lo cual M es una superficie temporal.
De manera similar $\varphi_{ss} = \gamma''(s) + tW''(s)$, $\varphi_{st} = W'(s)$ y $\varphi_{tt} = 0$, por lo que:

$$e = \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle,\ f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle = \frac{1}{|\ (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s)\ |} \langle W'(s), (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s) \rangle,$$

pero

$$|\ (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s)\ | = \sqrt{|\ \langle (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s), (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s) \rangle\ |}$$

$$= \sqrt{|\ \langle \gamma'(s) + tW'(s), \gamma'(s) + tW'(s)\rangle\langle W(s), W(s)\rangle - \langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle^2\ |}$$

$$= \sqrt{|\ \langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle^2\ |} = \langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle.$$

Sustituyendo tenemos que

$$f = \frac{1}{\langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle}\langle W'(s), (\gamma'(s) + tW'(s)) \times W(s)\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle}\langle W'(s), \gamma'(s) \times W(s)\rangle.$$

Y por último

$$g = \langle \varphi_{tt}, \xi\rangle = 0.$$

Sustituyendo en la fórmula del cálculo de K, tenemos

$$K = \epsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f^2}{F^2} = \frac{\langle W'(s), \gamma'(s) \times W(s)\rangle^2/\langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle^2}{\langle \gamma'(s), W(s)\rangle^2}.$$

Por lo tanto,

$$K = \frac{\langle W'(s), \gamma'(s) \times W(s)\rangle^2}{\langle \gamma'(s) + tW'(s), W(s)\rangle^2\langle \gamma'(s), W(s)\rangle^2}.$$

Ahora para calcular H, veamos que $\nabla_{\gamma'}W$ es linealmente dependiente de $W(s)$, $0 = \langle W, W\rangle = \gamma'(s) \cdot \langle W, W\rangle = 2\langle D_{\gamma'}W, W\rangle = 2\langle \nabla_{\gamma'}W + II(\gamma', W), W\rangle = 2\langle \nabla_{\gamma'}W, W\rangle$, por lo tanto $\nabla_{\gamma'}W$ es ortogonal a W.
Supóngase que $\{\nabla_{\gamma'}W, W\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\nabla_{\gamma'}W$ es espacial pues W es nulo y un vector que es ortogonal a un vector nulo solo puede ser un múltiplo de él mismo o un vector tipo espacio, pero estamos bajo el supuesto de que $\nabla_{\gamma'}W$ es linealmente independiente de W, entonces ambos siendo vectores tangentes a M generan un plano tangente tipo luz, lo cual es absurdo pues como vimos antes M es una superficie tipo tiempo.
Por lo tanto $\nabla_{\gamma'}W = \lambda(s)W$, por otro lado tenemos que

$$\varphi_{st} = W'(s) = D_{\gamma'}W = \nabla_{\gamma'}W + II(\gamma', W) = \lambda(s)W + II(\gamma', W),$$

despejando obtenemos que $II(\gamma'(s), W(s)) = \lambda(s)W(s) - W'(s)$.
Usando la proposición 2.2.8 tenemos que el vector de curvatura media está dado por $\widetilde{H} = II(X, Y)$, donde $\{X, Y\}$ una base pseudo-ortonormal de T_pM,
tenemos que

$$\widetilde{H} = \frac{II(\gamma'(s), W(s))}{\langle \gamma'(s), W(s)\rangle} = \frac{\lambda(s)W(s) - W'(s)}{\langle \gamma'(s), W(s)\rangle},$$

recordando que $H = \epsilon\langle \widetilde{H}, \xi\rangle$, entonces

$$H = \langle \lambda(s)W(s) - W'(s), \xi\rangle.$$

□

Corolario 4.1.2 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW(s)$, donde $\gamma, W : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tales que $\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = \langle W, W\rangle = 0$ y $\langle \gamma'(s), W\rangle \neq 0$ y $W'(s) = \lambda(s)W(s)$ con $\lambda : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla_{\gamma'}W = \lambda(s)W$, entonces $H \equiv 0$ y $K \equiv 0$.

Demostración Sustituyendo la condición $W'(s) = \lambda(s)W(s)$ en (1) y (2) se puede ver que $K \equiv 0$ y $H \equiv 0$. □

A continuación se presenta el cálculo del operador de forma de la superficie parametrizada como en la proposición anterior.

Ejemplo 4.1.3 Tomando sin pérdida de generalidad el supuesto adicional $\langle\gamma', W\rangle = 1$. Sea $p = \varphi(s_0, t_0)$ y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definida por $\alpha(s) = \gamma(s) + t_0 W(s)$, entonces $\alpha(s_0) = p$ y $\alpha'(s_0) = \varphi_s \mid_p$, de modo que

$$S_p(\varphi_s \mid_p) = -\frac{d}{ds}(\xi \circ \alpha)(s) \mid_{s=s_0} = -\frac{d}{ds}(\gamma' + tW') \times W \mid_p$$

$$= -[(\gamma'' + tW'') \times W + (\gamma' + tW') \times W'] = -[(\gamma'' + tW'') \times W + \gamma' \times W'];$$

expresando $S_p(\varphi_s \mid_{s=s_0})$ en la base pseudo-ortonormal $\{\gamma', W\}$, tenemos lo siguiente

$$S_p(\varphi_s \mid_{s=s_0}) = \langle S_p(\varphi_s), W\rangle\gamma' + \langle S_p(\varphi_s), \gamma'\rangle W$$

$$= -[\langle(\gamma'' + tW'') \times W, W\rangle + \langle\gamma' \times W', W\rangle]\gamma' - [\langle(\gamma'' + tW'') \times W, \gamma'\rangle + \langle\gamma' \times W', \gamma'\rangle]W$$

$$= -[\langle\gamma' \times W', W\rangle\gamma' + \langle(\gamma'' + tW'') \times W, \gamma'\rangle W].$$

Por otro lado, sea $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definida como $\beta(t) = \gamma(s_0) + tW(s_0)$; entonces se cumple que $\beta(t_0) = p$ y $\beta'(t_0) = \varphi_t \mid_{t=t_0}$, de manera que

$$S_p(\varphi_t \mid_{t=t_0}) = -\frac{d}{dt}(\gamma' + tW') \times W \mid_p = W' \times W \mid_p,$$

expresándolo en la base pseudo-ortonormal $\{\gamma', W\}$ tenemos que

$$S_p(\varphi_t \mid_{t=t_0}) = S_p(W(s)) = \langle S_p(\varphi_t), W\rangle\gamma' + \langle S_p(\varphi_t), \gamma'\rangle W$$

$$= \langle W' \times W, W\rangle\gamma' + \langle W' \times W, \gamma'\rangle W = \langle W' \times W, \gamma'\rangle W,$$

por lo tanto el operador de forma tiene una dirección principal en la dirección de W.

En forma matricial con respecto de la base $\{\gamma', W\}$,

$$[S] = \begin{pmatrix} -\langle\gamma' \times W', W\rangle & 0 \\ -\langle(\gamma'' + tW'') \times W, \gamma'\rangle & \langle W' \times W, \gamma'\rangle \end{pmatrix}.$$

Visto de otro modo si $W'(s) = \lambda(s)W(s)$, la matriz anterior se simplifica

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\langle(\gamma'' + tW'') \times W, \gamma'\rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera que resulta evidente que $H \equiv 0 \equiv K$.

Como pudimos hacer ver en el cálculo anterior el operador de forma tiene un vector propio nulo. La siguiente proposición muestra que éste es el único vector propio.

Proposición 4.1.4 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie temporal tal que se parametriza localmente como $\varphi(s,t) = \beta(s) + tv(s)$ con $v(s) \in T_pM$, $\langle\beta'(s), \beta'(s)\rangle = \langle v(s), v(s)\rangle = 0$, $\langle\beta'(s), v(s)\rangle \neq 0$ y $v'(s) = \gamma v(s)$ para todo $s \in I \subset \mathbb{R}$ y algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces v es el único vector propio del operador de forma S.

Demostración Antes de comenzar la prueba obsérvese que podemos suponer que $\langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = 1$, pues si no es así basta con tomar una reparametrización $\varphi(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = \beta(\widetilde{s}) + \widetilde{t}v(\widetilde{s})$, con $\widetilde{s} = s$ y $\widetilde{t} = \frac{t}{\langle \beta'(s), v(s) \rangle}$, así $\langle \varphi_{\widetilde{s}}, \varphi_{\widetilde{t}} \rangle = 1$. Supongamos concretamente que $\langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = 1$ y $\varphi(s_0, t_0) = p \in M$, tenemos pues que

$$\varphi_s = \beta' + tv', \quad \varphi_t = v, \quad \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \langle \beta', v \rangle = 1,$$

además

$$\|\varphi_s \times \varphi_t\| = \mid \langle \beta' \times v, \beta' \times v \rangle \mid^{1/2}$$

$$\mid det \begin{pmatrix} \langle \beta', \beta' \rangle & \langle \beta', v \rangle \\ \langle \beta', v \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix} \mid^{1/2}$$

$$= (\langle \beta', v \rangle^2)^{1/2} = 1.$$

Calculando la aplicación de Gauss ξ de M, tenemos

$$\xi(p) = \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{\|\varphi_s \times \varphi_t\|} = \varphi_s \times \varphi_t = (\beta' + tv') \times v =$$

$$(\beta' \times v) + t(v' \times v) = (\beta' \times v) + t\gamma(v \times v) = (\beta' \times v).$$

Consideremos $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tal que $\alpha(s) = \beta(s) + t_0 v(s) = \varphi(s, t_0)$, es claro que $\alpha(s_0) = p$ y $\alpha'(s_0) = (\beta'(s) + t_0 v'(s)) \mid_{s=s_0} = \varphi_s \mid_p$.
Calculemos el valor de S en la base $\{\varphi_s, \varphi_t\}$ de T_pM:

$$S(\varphi_s \mid_p) = -\frac{d}{ds}(\xi \circ \alpha)(s) \mid_{s=s_0} = -\frac{d}{ds}(\xi(\varphi(s, t_0))) = -\frac{d}{ds}(\beta' \times v)$$

$$= -[\beta'' \times v + \beta' \times v'] = -[\beta'' \times v + \gamma(\beta \times v)] = (-\beta'' \times v) + (-\gamma\beta') \times v$$

$$= (-\beta'' - \gamma\beta') \times v,$$

expresemos $S(\varphi_s \mid_p)$ en la base pseudo-ortonormal $\{\varphi_s, \varphi_t\}$,

$$S(\varphi_s \mid_p) = \langle S(\varphi_s), \varphi_s \rangle \varphi_t + \langle S(\varphi_s), \varphi_t \rangle \varphi_s = \langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \beta' + tv' \rangle \varphi_t + \langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, v \rangle \varphi_s$$

$$= \langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \beta' + tv' \rangle \varphi_t = [\langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \beta' \rangle + t\langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, v' \rangle]\varphi_t$$

$$= [\langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \beta' \rangle + t\langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \gamma v \rangle]\varphi_t = [\langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \beta' \rangle + t\gamma\langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, v \rangle]\varphi_t$$

$$= \langle (-\beta'' - \gamma\beta') \times v, \beta' \rangle \varphi_t.$$

Para calcular $S(\varphi_t \mid_p)$, consideremos $\overline{\alpha} : I' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ tal que $\overline{\alpha}(t) = \beta(s_0) + tv(s_0)$, también es claro que $\overline{\alpha}(t_0) = p$ y $\overline{\alpha}'(t_0) \mid_{t=t_0} = \varphi_t \mid_p$, así

$$S(\varphi_t \mid_p) = -\frac{d}{dt}(\xi \circ \overline{\alpha})(t) \mid_{t=t_0} = -\frac{d}{dt}(\xi(\varphi(s_0, t))) = -\frac{d}{dt}(\beta' \times v) = 0 = 0 \cdot \varphi_t \mid_p .$$

Tenemos entonces que $S(\varphi_t \mid_p) = S(v) = 0 \cdot \varphi_t \mid_p = 0 \cdot v$, es decir, v es un vector propio de S y es el único salvo vectores linealmente dependientes con respecto a v, esto ya que φ_s no es vector propio. $\square$

Observación 4.1.5 Un ejemplo de una superficie cuyo operador de forma no es diagonalizable es precisamente la superficie anterior, pues el corolario muestra que S tiene un solo vector propio.

Proposición 4.1.6 Sea M una superficie temporal tal que el operador de forma S tiene un único vector propio nulo $v \in T_pM$, entonces M se puede parametrizar localmente como $\varphi(s, t) = \beta(s) + tv(s)$, es decir, localmente es una superficie reglada.

Demostración Sea $v \in T_pM$ el único vector propio nulo del operador de forma S en $p \in M$, i.e., $S(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea ξ la aplicación de Gauss de M, entonces

$$II(v,v) = \epsilon\langle S(v), v\rangle\xi = \epsilon\langle \lambda v, v\rangle\xi = \epsilon\lambda\langle v, v\rangle\xi = 0,$$

por lo tanto $D_v v = \nabla_v v + II(v,v) = \nabla_v v$.
Por otro lado para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que

$$0 = X \cdot \langle v, v\rangle = 2\langle D_X v, v\rangle,$$

así $\langle D_X v, v\rangle = 0$, en particular para $X = v$ se tiene que $\langle D_v v, v\rangle = \langle \nabla_v v, v\rangle = 0$, afirmamos que $\nabla_v v = av$, pues si fuesen linealmente independientes, dado que ambos son vectores tangentes y $\nabla_v v$ es ortogonal a v, $\nabla_v v$ no puede ser tipo tiempo ya que v es nulo, y como suponemos que $\nabla_v v$ y v son linealmente independientes, entonces $\nabla_v v$ es tipo espacio, así que ambos al ser vectores tangentes generan un plano tangente tipo luz, lo cual es una contradicción ya que T_pM es temporal para todo $p \in M$ dado que por hipótesis M es temporal.
Por lo tanto $\nabla_v v = av$, si pensamos esta relación en términos de una curva integral de v, es decir, sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $\alpha(s_0) = p$ y $V(s) := V(\alpha(s)) = \alpha'(s)$ donde α es una curva tipo luz pues v es tipo luz, entonces $\nabla_v v = \alpha'' = a\alpha'$, por la proposición 1.2.10 se tiene que α es parte de una recta nula, con lo cual si tomamos $w \in T_pM$ como el vector tal que $\{v, w\}$ es base pseudo-ortonormal de T_pM y $\beta : I' \subset I \to M$ como su curva integral, entonces M se pude parametrizar localmente como

$$\varphi(s,t) = \beta(s) + tv(s).$$

□

4.2. Superficies con $K \equiv 0$ y $H \equiv 0$

Teorema 4.2.1 Se $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie no degenerada tal que su operador de forma S es diagonalizable y $H \equiv 0 \equiv K$, entonces $S_p(v) = 0$ para todo $p \in M$ y $v \in T_pM$ y por lo tanto M es parte de un plano.

Demostración Como el operador de forma es diagonalizable tiene una representación matricial de la siguiente manera

$$[S_p] = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Además por hipótesis tenemos que $H(p) = 0 = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = K(p) = \kappa_1\kappa_2$, esto implica que $\kappa_1 = 0$ ó bien $\kappa_2 = 0$. Si $\kappa_1 = 0$ entonces $\kappa_2 = 0$ pues $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, de manera similar si $\kappa_2 = 0$ entonces $\kappa_1 = 0$. Por lo tanto $S_p \equiv 0$ y por el teorema 2.4.5 M es parte de un plano. □

Corolario 4.2.2 Si $M \subset \mathbb{R}^3_1$ es una superficie espacial tal que $H \equiv 0 \equiv K$, entonces M es parte de un plano.

Demostración Toda superficie espacial tiene operador de forma diagonalizable según el teorema 2.4.3, de manera que podemos aplicar el teorema anterior y concluir que M es parte de un plano. □

Ejemplo 4.2.3 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ el plano espacial generado por los vectores $v = (4,3,2)$ y $w = (53,-84,0)$, dicha superficie tiene operador de forma diagonalizable pues $S \equiv 0$ por ser un plano y consecuentemente se tiene que $H \equiv 0$ y $K \equiv 0$.

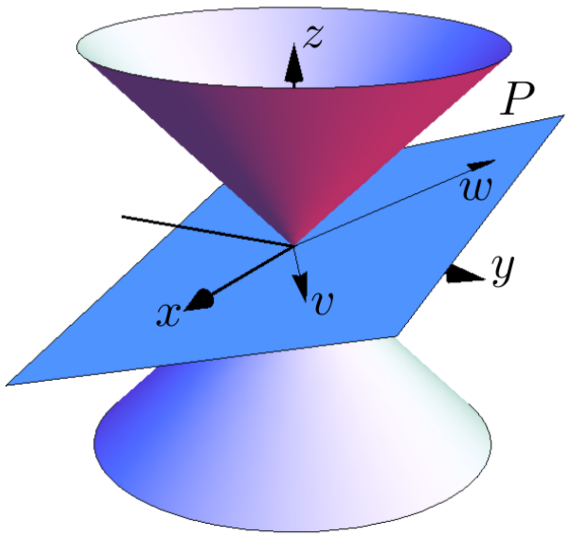

Figura 4.1: Superficie espacial con $H \equiv 0$ y $K \equiv 0$.

Con ello hemos demostrado una parte del problema principal: si una superficie es tipo espacio y cumple que $K \equiv 0 \equiv H$, entonces es parte de un plano y viceversa. Falta ver qué pasa cuando la superficie es tipo tiempo, como ya se mencionó la superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tW$, donde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, con W un vector fijo, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle W, W \rangle = 0$ y $\langle \gamma'(s), W \rangle = 1$ (en general $\langle \gamma'(s), W \rangle \neq 0$)para todo s en el dominio de γ cumple que $K \equiv 0 \equiv H$, lo que sigue en el presente trabajo es mostrar que de hecho éstas son las únicas superficies temporales que cumplen la condición $K \equiv 0 \equiv H$ y por supuesto los planos temporales.

Teorema 4.2.4 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie tipo tiempo con $H \equiv 0 \equiv K$, entonces o M es parte de un plano o bien se puede parametrizar como $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tT_0$, dónde $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 = \langle T_0, T_0 \rangle$ y T_0 es un vector constante nulo.

Demostración Sea S el operador de forma de M definido en un punto $p \in M$, como hemos visto anteriormente o $[S]$ es diagonalizable para alguna base ortonormal de T_pM que junto con la condición de que $H \equiv 0 \equiv K$ llegamos a que $S \equiv 0$, o bien

$$[S] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix}$$

en alguna base pseudo-ortonormal de T_pM que de igual forma como ya se mencionó antes por la hipótesis de que $H \equiv 0 \equiv K$ este caso se reduce a que

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $S \equiv 0$, por 2.4.5 se concluye que M es parte de un plano.
Consideremos el segundo caso, i,e., supongamos que

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en una base pseudo-ortonormal $\{W, Z\}$, por lo tanto $S(Z) = 0 = 0 \cdot Z$, es decir, Z es una dirección principal de S, sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ la curva integral de Z.
Ahora obsérvese que $II(Z,Z) = \epsilon \langle S(Z), Z \rangle = 0$ y $0 = \langle Z, Z \rangle = X \cdot \langle Z, Z \rangle = 2\langle D_X Z, Z \rangle$,

por lo tanto $\langle D_X Z, Z\rangle = 0$, en particular para $X = Z$ tenemos que $\langle D_Z Z, Z\rangle = 0$ es decir $D_Z Z$ es ortogonal a Z, además $D_Z Z = \nabla_Z Z + II(Z, Z) = \nabla_Z Z$ pues $II(Z, Z) = 0$, por lo que $D_Z Z = \lambda Z$, ya que si $\{D_Z Z, Z\}$ fuese un conjunto linealmente independiente generaría un plano tipo luz, lo cual es absurdo ya que todo plano tangente es tipo tiempo dado que estamos bajo el supuesto de que M es temporal.
Si reescribimos esta conclusión en términos de la curva integral de Z tenemos que $\gamma'' = \lambda\gamma'$ y dado que γ es una curva nula se concluye que γ es parte de una recta nula y por lo tanto γ es geodésica de $\mathbb{R}^3_1$, pues $\gamma'' = 0$ por ser una γ una recta, en particular M tiene segmentos de línea recta en la dirección de Z.
Sea $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ la curva integral de W, i.e., $\beta'(s) = W(\beta(s))$, de manera que podemos parametrizar localmente a M como $\varphi(s,t) = \beta(s) + tZ(s)$, donde $Z(s) = \gamma'(s)$, i.e., M es una superficie reglada.
Volvamos a la curva γ, la cual sabemos que es parte de una recta nula, es decir, $\gamma(s) = a(s)T_0$ para alguna función a en $\mathbb{R}^3_1$ derivable, entonces $Z(s) = \gamma'(s) = a'(s)T_0$, así $\varphi(s,t) = \beta(s) + tZ(s) = \beta(s) + ta'(s)T_0$, si $\widetilde{s} = s$ y $\widetilde{t} = ta'(s)$, entonces M se puede reparametrizar como $\varphi(\widetilde{s},\widetilde{t}) = \beta(\widetilde{s}) + \widetilde{t}T_0$. $\square$

Ejemplo 4.2.5 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ la superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tT_0$, donde $\gamma : (0,\pi) \to \mathbb{R}^3_1$ definida como $\gamma(s) = (\operatorname{sen} s, \cos s, s)$ y $T_0 = (1, 0, 1)$, por consiguiente tenemos que

$$\langle\gamma', \gamma'\rangle = 0 = \langle T_0, T_0\rangle \text{ y } \langle\gamma', T_0\rangle = \cos s - 1$$

y también tenemos que $\varphi_s = \gamma'$ y $\varphi_t = T_0$, de manera que la aplicación de Gauss está dada por

$$\xi(\varphi(s,t)) = \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{\mid \varphi_s \times \varphi_t \mid} = \frac{1}{(1-\cos s)}(-\operatorname{sen} s, 1-\cos s, -\operatorname{sen} s)$$

esta superficie es del tipo de superficies presentadas en el ejemplo 2.3.4 donde se demostró que tales superficies tienen curvaturas gaussiana y media constantes cero.
Ahora haremos ver que su operador de forma tiene un solo vector propio nulo: sea $p = \varphi(s_0, t_0) \in M$ y consideremos la curva $\alpha(s) = \gamma(s) + t_0T_0$, tenemos entonces que $\alpha(s_0) = p$ y $\alpha'(s_0) = \gamma'(s_0) = \varphi_s \mid_p$; así,

$$S(\varphi_s \mid_p) = -\frac{d}{ds}(\xi \circ \alpha) \mid_p = -\frac{d}{ds}[\frac{1}{1-\cos s}(-\operatorname{sen} s, 1-\cos s, -\operatorname{sen} s)]$$

$$= \frac{1}{1-\cos s}[\frac{\operatorname{sen} s}{1-\cos s}(-\operatorname{sen} s, 1-\cos s, -\operatorname{sen} s) + (\cos s, -\operatorname{sen} s, \cos s)],$$

expresando $S(\varphi_s \mid_p)$ en la base pseudo-ortonormal $\{\frac{\varphi_s}{\langle\varphi_s,\varphi_t\rangle}, \varphi_t\} = \{\frac{\gamma'}{\langle\gamma',T_0\rangle}, T_0\}$,

$$S(\varphi_s \mid_p) = \langle S(\varphi_s \mid_p), \varphi_t\rangle \frac{\varphi_s}{\langle\varphi_s, \varphi_t\rangle} + \frac{\langle S(\varphi_s \mid_p), \varphi_s\rangle}{\langle\varphi_s, \varphi_t\rangle}\varphi_t,$$

pero

$$\langle S(\varphi_s), \varphi_t\rangle = 0 \text{ y } \langle S(\varphi_s), \varphi_s\rangle = 1,$$

así

$$S(\varphi_s \mid_p) = \frac{\varphi_t}{\langle\varphi_s, \varphi_t\rangle}\varphi_t,$$

por lo tanto φ_s no es vector propio de S.
Por otro lado tomemos la curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ dada por $\beta(t) = \gamma(s_0) + tT_0$, tenemos que $\beta(t_0) = p$ y $\beta'(t_0) = \varphi_t \mid_p$, entonces

$$S(\varphi_t \mid_p) = -\frac{d}{dt}(\xi \circ \beta)(t) \mid_p = -\frac{d}{dt}\frac{1}{(1-\cos s)}(-\operatorname{sen} s, 1-\cos s, -\operatorname{sen} s) = 0 = 0 \cdot \varphi_t,$$

por lo tanto φ_t es un vector propio de S, además φ_t es un vector propio nulo.

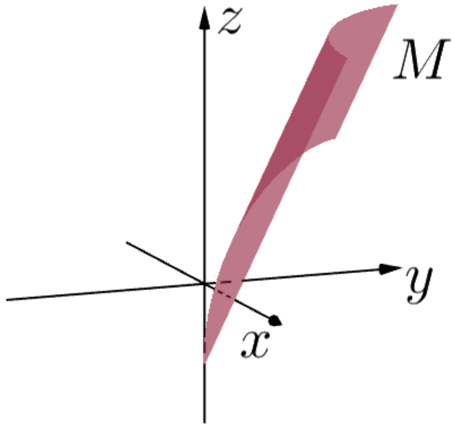

Figura 4.2: Superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tT_0$ y $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

La siguiente superficie es un ejemplo más de una superficie temporal con curvaturas gaussiana y media constantes cero.

Ejemplo 4.2.6 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ parametrizada como $\varphi(s,t) = \beta(s) + tT_0$ donde $\beta : (\frac{-1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \to \mathbb{R}^3_1$ dada por $\beta(s) = (\operatorname{sen} s, \cos s, s)$ y $T_0 = (1, 1, \sqrt{2})$, la curva β es una curva nula pues

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s - 1 = 0 \text{ y } \langle T_0, T_0 \rangle = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Para calcular las curvaturas usaremos nuevamente el cálculo a través de la parametrización:

$$\varphi_s = \beta',\ \varphi_t = T_0,\ \varphi_{st} = 0 \text{ y } \varphi_{tt} = 0$$

por lo tanto

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \langle \beta', \beta' \rangle = 0,\ F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \cos s - \operatorname{sen} s - \sqrt{2} \neq 0,\ G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \langle T_0, T_0 \rangle = 0$$

de manera que $detI = EG - F^2 = -F^2 < 0$, es decir, M es una superficie temporal, si ξ es la aplicación de Gauss, entonces $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle = 1$, por otro lado

$$e = \langle \varphi_{ss}, \xi \rangle,\ f = \langle \varphi_{st}, \xi \rangle = 0 \text{ y } g = \langle \varphi_{tt}, \xi \rangle = 0{,}0$$

Así

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 - 0^2}{0 - F^2} = 0$$

y,

$$H(p) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{0 - 0 + 0}{-F^2} = 0.$$

El siguiente lema nos muestra una manera especial de parametrizar localmente cualquier superficie tipo tiempo.

Lema 4.2.7 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ superficie temporal, entonces localmente existe $\varphi : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3_1$ que parametriza a M en una vecindad de un punto $p \in M$, tal que

$$\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 0,\ \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 0 \text{ y } \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = -h^2(t,s),$$

donde $h : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ y es positiva.

Con ello podemos mostrar de qué forma son todas las superficies temporales tales que $H \equiv 0$. Tal resultado fué tomado de [7] teorema 3.3.1.

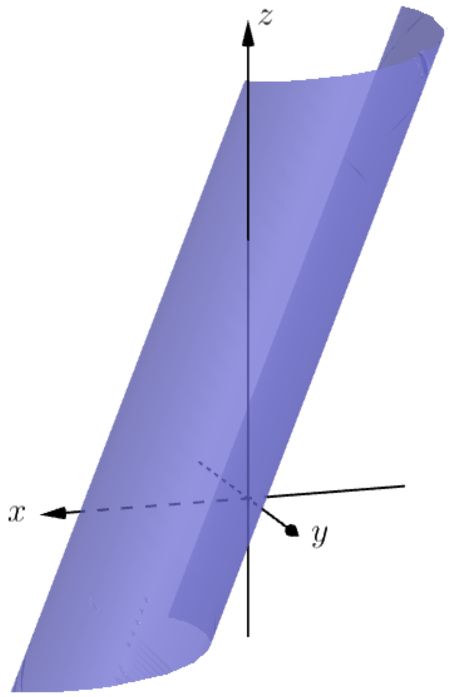

Figura 4.3: Superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = (\operatorname{sen} s + t, \cos s + t, s + \sqrt{2}t)$

Teorema 4.2.8 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ una superficie temporal. La superficie es mínima ($H \equiv 0$) si y sólo si localmente se puede parametrizar como $\varphi(t,s) = \alpha(t) + \beta(s)$ con $\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 0 = \langle \beta'(s), \beta'(s)\rangle$, $\alpha : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, $\beta : (c,d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ y $\langle \alpha'(t), \beta'(s)\rangle \neq 0$.

Demostración Primero probemos la suficiencia, es decir, supongamos que M se parametriza localmente como $\varphi(t,s) = \alpha(t) + \beta(s)$ y que cumple con las condiciones del teorema, calculando los coeficientes de la primera forma fundamental tenemos que

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s\rangle = \langle \beta'(s), \beta'(s)\rangle = 0$$

$$F = \langle \varphi_t, \varphi_s\rangle = \langle \alpha'(t), \beta'(s)\rangle$$

$$G = \langle \varphi_t, \varphi_t\rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 0$$

Sustituyendo en las fórmulas de la curvatura media dada una parametrización, se tiene lo siguiente

$$H(p) = \epsilon \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = fF,$$

pero $\varphi_{st} = 0$ con lo cual $f = \langle \varphi_{st}, \xi\rangle = 0$.
Por lo tanto $H(p) = 0$, como p fue arbitrario se sigue que $H \equiv 0$.
Ahora supongamos que $H(p) = 0$ para todo $p \in M$, de manera que por el lema anterior M se puede parametrizar localmente como $\varphi : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3_1$ con

$$\langle \varphi_t, \varphi_t\rangle = 0,\ \langle \varphi_s, \varphi_s\rangle = 0 \text{ y } \langle \varphi_s, \varphi_t\rangle = -h^2(t,s),$$

donde $h : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ y es positiva.
Dado que $\{\varphi_s, \frac{\varphi_t}{\langle \varphi_s, \varphi_t\rangle}\}$ es base pseudo-ortonormal de T_pM, entonces $\widetilde{H} = \frac{II(\varphi_s,\varphi_t)}{\langle \varphi_s,\varphi_t\rangle} = \langle S(\varphi_s), \varphi_t\rangle$, como $H = 0$ y $\widetilde{H}(p) = H(p)\xi(p) = 0$, entonces $II(\varphi_s, \varphi_t) = 0$. Aplicando la fórmula de Gauss se tiene lo siguiente

$$D_{\varphi_s}\varphi_t = \nabla_{\varphi_s}\varphi_t + II(\varphi_s, \varphi_t) = \nabla_{\varphi_s}\varphi_t = \varphi_{st}$$

$$= \varphi_{st} = \nabla_{\varphi_t}\varphi_s,$$

además

$$0 = \varphi_t \cdot \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 2\langle \nabla_{\varphi_t}\varphi_s, \varphi_s \rangle$$
$$= \varphi_s \cdot \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 2\langle \nabla_{\varphi_s}\varphi_t, \varphi_t \rangle,$$

esto nos dice que $\nabla_{\varphi_s}\varphi_t$ es ortogonal a la base $\{\varphi_t, \varphi_s\}$, lo cual implica que $\varphi_{st} = 0$ pues la métrica es no degenerada.
Ahora integramos con respecto a s, tenemos así que $\varphi_t = \gamma(t)$, si escogemos α curva en $\mathbb{R}^3_1$ como la curva integral de φ_t, i.e., $(\alpha'(t) = \varphi_t)$ e integramos con respecto a t obtenemos

$$\varphi = \alpha(t) + \beta(s)$$

y es claro que α y β son curvas nulas pues $\varphi_s = \alpha'(s)$ y $\varphi_t = \beta'(t)$ y tanto φ_s como φ_t son nulos, lo que demuestra el otro sentido de la doble implicación. □

Ejemplo 4.2.9 Sea $M \subset \mathbb{R}^3_1$ la superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = \alpha(s) + \beta(t)$, donde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ dada por $\alpha(t) = (\cosh s, s, \operatorname{senh} s)$ y $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definida como $\beta(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, es fácil ver que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0 = \langle \beta', \beta' \rangle$ y $\langle \alpha', \beta' \rangle \neq 0$.
Por el lema anterior esta superficie tiene curvatura media constante cero.

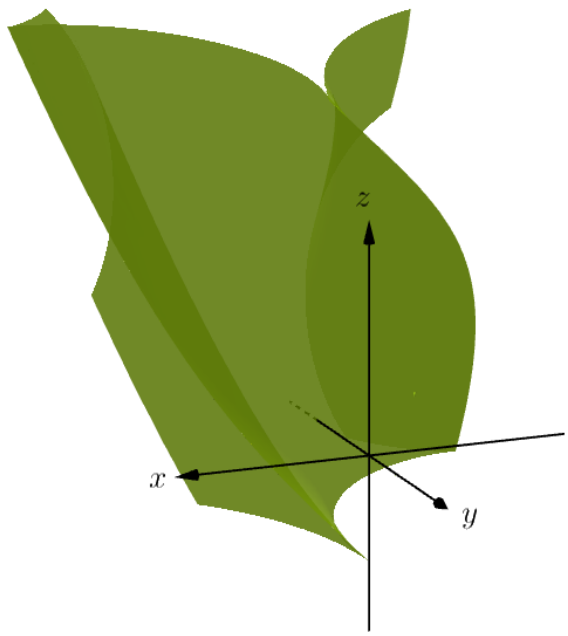

Figura 4.4: Superficie parametrizada por $\varphi(s,t) = (\cosh s + \operatorname{sen} t, s + \cos t, \operatorname{senh} s + t)$ y $H \equiv 0$.

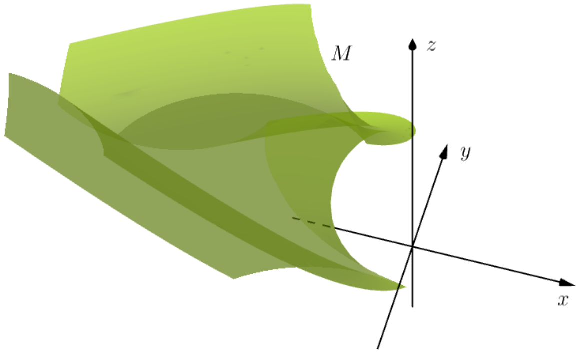

Figura 4.5: Superficie con ≡ 0 vista desde otro ángulo

Bibliografía

[1] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition.* Courier Dover Publications, 2016.

[2] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*, volume 370. American Mathematical Soc., 2010.

[3] D. C. Lay. *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson Educación de México, 2007.

[4] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: An introduction to the mathematics of the special theory of relativity*, volume 92. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, volume 103. Academic press, 1983.

[6] B. O'Neill. *Elementary differential geometry.* Academic press, 2006.

[7] G. Ruiz-Hernández. *Geometría diferencial en el espacio de Minkowski de dimensión tres.* http://www.matem.unam.mx/gruiz/notasminkowski.pdf, 2018.