# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

HIPERSUPERFICIES BIARMÓNICAS EN $R^4$

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
SERGIO RIOS ALBARRÁN

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS-UNAM

MÉXICO, D. F. A 28 DE MAYO DE 2015.

# AGRADECIMIENTOS

A Jehová Dios, a quien le debo la vida. A mis padres, quienes con su apoyo emocional, nunca me dejaron claudicar en la realización de mis objetivos personales. A mi asesor de tesis, quien me formó como matemático y me apoyó en los momentos más difíciles durante la realización de esta tesis.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM « PAPIIT IN100414 » « Geometría Diferencial de Subvariedades II ». Agradezco a DGAPA-UNAM la beca recibida.

# Índice general

# Introducción

La geometría diferencial de subvariedades permite abordar problemas geométricos con técnicas del cálculo, ecuaciones diferenciales y análisis matemático. Con esto en mente, sea $M$ una $n$-subvariedad inmersa en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ con inmersión isométrica asociada $x : M \to \mathbb{R}^m$. Una de las fórmulas más conocidas en geometría diferencial de subvariedades, la fórmula de Beltrami, afirma que $\Delta x = -n\vec{H}$, la cual implica que $-n\Delta\vec{H} = \Delta^2 x$. Claramente, si una subvariedad es mínima, esto es, $\vec{H} = 0$, entonces $\Delta^2 x = -n\Delta\vec{H} = 0$. Las subvariedades $M$ que satisfacen que el doble laplaciano de su inmersión es idénticamente cero se conocen como subvariedades biarmónicas. Es obvio que $\Delta^2 x = 0$ si, y sólo si $\Delta\vec{H} = 0$ si, y sólo si $M$ tiene vector de curvatura media armónico. Por lo tanto, $\vec{H} = 0$ implica $\Delta\vec{H} = 0$. La conjetura biarmónica de Chen es la afirmación recíproca. Más precisamente, en el artículo [5], de 1991, B. Y. Chen formuló la siguiente conjetura.

**Conjetura biarmónica (1991)** : Toda subvariedad biarmónica de un espacio euclidiano es mínima.

Aunque la conjetura original sigue abierta, se ha probado para algunos casos particulares, se han formulado conjeturas biarmónicas modificadas y se han encontrado contraejemplos para algunas de estas conjeturas modificadas. Se ha demostrado afirmativamente para los siguientes casos particulares: que las superficies biarmónicas de $\mathbb{R}^3$ son mínimas [6] (ver también [17]); que hipersuperficies biarmónicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ con a lo más dos curvaturas principales distintas, son mínimas [11]; que toda subvariedad biarmónica de tipo finito en $\mathbb{R}^m$ es mínima [12] (ver también [11]); que curvas biarmónicas de cualquier espacio euclidiano son mínimas [12] (ver también [11]); que subvariedades biarmónicas pseudo-umbílicas de dimensión distinta de 4, son mínimas [12]. No obstante, se han encontrado ejemplos que muestran que la conjetura es falsa si el espacio euclidiano ambiente es reemplazado por un espacio pseudo-euclidiano [8]. También se han construido ejemplos que muestran que la conjetura biarmónica original es falsa si se generaliza al caso de subvariedades biarmónicas conformes de espacios euclidianos [22].

Una de las conjeturas biarmónicas modificadas está motivada por un resultado contenido en [4], que afirma que toda hipersuperficie biarmónica del $n$-espacio hiperbólico $H^n(-1)$ con curvatura constante -1, con a lo más dos curvaturas principales distintas, es mínima.

Más precisamente, la conjetura biarmónica modificada en cuestión es la siguiente:

**Conjetura biarmónica de Chen generalizada (2001)** : Cualquier subvariedad biarmónica de una variedad riemanniana con curvatura seccional no positiva es mínima.

Sin embargo, recientemente, en el artículo [23], del año 2012, se encuentra un contraejemplo a la conjetura biarmónica de Chen generalizada.

Otras dos conjeturas biarmónicas modificadas, íntimamente relacionadas a la conjetura biarmónica original, son las siguientes, las cuales se pretende que sean más fáciles de resolver.

**Conjetura biarmónica para hipersuperficies** : Toda hipersuperficie biarmónica de un espacio euclidiano es mínima.

**Versión global de la conjetura biarmónica de Chen** : Toda subvariedad biarmónica completa de un espacio euclidiano es mínima.

Esta tesis presenta una demostración de un caso particular de la conjetura biarmónica de Chen, a saber, toda hipersuperficie biarmónica de $\mathbb{R}^4$ es mínima. Esencialmente es un estudio profundo del artículo [15] citado en la bibliografía.

El capítulo uno trata sobre la geometría diferencial intrínseca y extrínseca de una subvariedad. Se prueba una condición necesaria y suficiente para que una hipersuperficie de un espacio euclidiano sea biarmónica; esta equivalencia afirma que una hipersuperficie de un espacio euclidiano es biarmónica si, y sólo si una ecuación que involucra la curvatura media se anula y si la hipersuperficie en cuestión es una $H$-hipersuperficie, esto es, hipersuperficies que tienen al gradiente de la curvatura media como vector principal (del operador de forma asociado a la hipersuperficie) con correspondiente curvatura principal un multiplo constante de la curvatura media. Finalmente se demuestra un corolario que se usará al final del presente trabajo, a saber, que toda hipersuperficie biarmónica con curvatura media constante debe tener curvatura media que se anula en cualquier punto.

El capítulo dos tiene por objetivo estudiar exclusivamente $H$-hipersuperficies. El propósito de este estudio es familiarizarse con las propiedades básicas de esta clase especial de hipersuperficies. Como premisa básica se considera una vecindad donde el gradiente de la curvatura media no se anula en ningún punto. Luego, sobre esta vecindad se define $e_n$ como el campo vectorial gradiente normalizado de la curvatura media y por medio de este campo vectorial se construye una distribución $n-1$-dimensional $\mathcal{D}$ ortogonal a $e_n$ que genere variedades integrales con abundantes propiedades. Después se construye una parametrización local de la hipersuperficie en términos de una parametrización local de una variedad integral generada por la distribución $\mathcal{D}$. Todo esto se hace en general, con $n$ entero positivo arbitrario.

El capítulo tres aplica los resultados obtenidos en el capítulo dos para el caso particular $n = 3$ y se examina que ocurre con la hipersuperficie cuando no tiene curvatura media constante y sus tres curvaturas principales son iguales, dos son iguales (y una desigual) y cuando las tres son distintas entre sí. Para los últimos dos casos se presentan teoremas que nos permiten conocer la forma geométrica de la $H$-hipersuperficie y conocer explícitamente sus parametrizaciones locales especiales. Para el caso en que dos curvaturas principales son iguales (y una desigual), la hipersuperficie resulta ser una hipersuperficie rotacional con curvatura media no constante. Cuando las tres curvaturas principales son distintas entre sí la hipersuperficie es uno de los dos casos siguientes: a) un cilindro generalizado sobre una superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media no constante o b) una hipersuperficie $O(2) \times O(2)$-invariante con curvatura media no constante. Todos estos resultados se resumen en un teorema de clasificación.

En el capítulo cuatro se supone que las $H$-hipersuperficies del capítulo tres son biarmónicas. Se demuestra que todas las $H$-hipersuperficies del teorema de clasificación tienen curvatura media constante, lo cual contradice todos excepto uno de los incisos del teorema de clasificación. En consecuencia sólo puede ocurrir que la hipersuperficie biarmónica tenga curvatura media constante, luego cero en virtud del corolario del capítulo uno antes mencionado.

# Capítulo 1

# Geometría intrínseca y extrínseca

## 1.1. Geometría diferencial intrínseca

En lo que sigue $M$ será una variedad riemanniana de dimensión $n$ con métrica $g = \langle\ ,\ \rangle$ y conexión de Levi-Civita $\nabla$. Muchos conceptos básicos y resultados sobre geometría riemanniana y semi-riemanniana pueden verse en [3], [19], [20] y [21]. Toda el álgebra lineal considerada en el presente trabajo puede encontrarse en [14].

**Definición 1.1.** La derivada covariante total de un $(\ell, k)$-campo tensorial mixto $S$ sobre $M$ es un $(\ell, k+1)$-campo tensorial $\nabla S$ sobre $M$ dado por

$$\begin{aligned}\nabla S(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k, Y) &= (\nabla_Y S)(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k)\\ &= Y(S(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k))\\ &- \sum_{i=1}^{l} S(\omega_1, \cdots, \nabla_Y \omega_i, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k)\\ &- \sum_{j=1}^{k} S(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, \nabla_Y X_j, \cdots, X_k).\end{aligned}$$

**Definición 1.2.** El hessiano $Hess\ f$ de una función diferenciable $f$ sobre $M$ se define como la derivada covariante total de su diferencial, es decir, $Hess\ f := \nabla(df)$. Explícitamente tenemos que

$$\begin{aligned}(Hess\ f)(Y,X) &= \nabla(df)(Y,X) = (\nabla_X df)(Y) = X[df(Y)] - (\nabla_X Y)f \\ &= XYf - (\nabla_X Y)f.\end{aligned}$$

**Definición 1.3.** El gradiente de una función diferenciable $f$ sobre $(M, g, \nabla)$ se define como el campo vectorial $grad\ f$ sobre $M$ tal que $g(X, grad\ f) = df(X) = Xf$ para cada $X \in \Gamma(TM)$.

Sobre un marco local ortonormal $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ de $(M, g, \nabla)$ el gradiente se puede escribir como

$$grad\ f = \sum_{j=1}^{n}(E_j f)E_j.$$

**Definición 1.4.** La divergencia $div\ X$ de un campo vectorial $X \in \Gamma(TM)$ es una función diferenciable que está dada por

$$div\ X = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, E_i)$$

sobre este mismo marco local ortonormal.

**Definición 1.5.** El laplaciano $\Delta f$ de una función diferenciable $f$ sobre $M$ se define como menos la divergencia de su gradiente, esto es,

$$\Delta f = -div\ (grad\ f).$$

**Observación 1.6.** Sea $p \in M$ y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base ortonormal para $T_pM$. La base anterior se puede extender a un marco local ortonormal $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ de $M$ tal que $\nabla_{E_i}E_j|_p = 0$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$. Con estas hipótesis y con ayuda de la expresión local para el gradiente y la divergencia, el laplaciano $\Delta f$ de una función diferenciable $f$ evaluado en el punto $p$ está dado por

$$\Delta f|_p = -\sum_{i=1}^{n}(E_iE_if)_p.$$

**Observación 1.7.** Si $M$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^m$, el laplaciano $\Delta$ se puede extender de manera natural a mapeos diferenciables $\mathbb{R}^m$-valuados sobre $M$. En efecto, si $v : M \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable y si $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ es un marco local ortonormal sobre $M$, entonces

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n}(D_{\nabla_{E_i}E_i}v - D_{E_i}D_{E_i}v),$$

donde $D$ es la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^m$.

## 1.2. Subvariedades e inmersiones isométricas

En esta sección introduciremos los conceptos básicos sobre los que estaremos trabajando. Consideraremos subvariedades de variedades riemannianas. La mayor parte de los teoremas que se enuncien se darán sin demostración, que se pueden encontrar en [10].

Sea $x : M \to N$ una inmersión de una $n$-variedad riemanniana conexa en una $m$-variedad riemanniana $N$. Como toda inmersión es localmente un encaje, cualquier punto $p$ de $M$ tiene una vecindad $U$ tal que $x|_U : U \to N$ es un encaje y $x(U)$ es una $n$-subvariedad encajada de $N$. Si identificamos $U$ con $x(U)$ entonces la inclusión $U \hookrightarrow N$ es también un encaje y podemos considerar el espacio tangente $T_pM$ como subespacio vectorial de $T_pN$. Por lo tanto $T_pN$ es la suma directa $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$ donde $T_pM^\perp$ es el complemento ortogonal de $T_pM$ en $T_pN$. De esta descomposición obtenemos un haz vectorial $TM^\perp = \bigsqcup_{q\in M} T_qM^\perp$ sobre $M$, llamado el haz normal de

$M$. De esta manera, el haz vectorial $TN|_M = \bigsqcup_{q\in M} T_qN$ es la suma de Whitney del haz tangente y del haz normal de $M$, esto es, $TN|_M = TM \oplus TM^{\perp}$.

Con respecto a esta descomposición tenemos, respectivamente, las proyecciones tangencial y normal,

$$(\star)^{\top} : TN|_M \to TM \qquad \& \qquad (\star)^{\perp} : TN|_M \to TM^{\perp}.$$

Sea $D$ la conexión de Levi-Civita de $N$. Dados dos campos vectoriales $V, W \in \Gamma(TN)$ sobre $N$, tenemos que

$$D_VW = (D_VW)^{\top} + (D_VW)^{\perp}$$

sobre $M$. En particular, dados dos campos vectoriales $X, Y \in \Gamma(TM)$ sobre $M$, podemos extender estos dos campos a campos vectoriales sobre $N$, de donde se sigue que

$$D_XY = (D_XY)^{\top} + (D_XY)^{\perp}$$

sobre $M$. En virtud de la unicidad de la conexión de Levi-Civita de $M$, tenemos que $(D)^{\top}$ es la conexión de Levi-Civita de $M$ pues es una conexión libre de torsión y compatible con la métrica de $M$. Denotaremos esta conexión por $\nabla$.

**Definición 1.8.** La aplicación $\alpha : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to \Gamma(TM^{\perp})$ dada por $\alpha(X, Y) := (D_XY)^{\perp}$, es llamada segunda forma fundamental. Esta aplicación es simétrica y bilineal sobre el anillo $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ de funciones diferenciables de $M$ en $\mathbb{R}$.

**Observación 1.9.** En virtud de que la segunda forma fundamental es simétrica y bilineal sobre $\mathcal{C}^{\infty}(M)$, se sigue que la evaluación $\alpha(X, Y)(p)$ de $\alpha(X, Y)$ en el punto $p \in M$ sólo depende de los valores de $X$ y $Y$ en el punto $p$.

**Definición 1.10.** Fórmula de Gauss. Sobre $M$,

$$D_XY = \nabla_XY + \alpha(X, Y)$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Con respecto a la métrica riemanniana $g$ sobre $M$ inducida por la métrica del espacio ambiente $N$, $M$ es una variedad riemanniana $(M,g)$ y la inclusión $M \hookrightarrow N$ es una inmersión isométrica. Por todo lo anterior, para la teoría de subvariedades de $N$ es suficiente considerar inmersiones isométricas $x : M \to N$.

**Definición 1.11.** Consideremos campos vectoriales $X \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$. Denotemos por $A_\xi X$ la componente tangencial de $-D_X\xi$.

La aplicación $A : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM^{\perp}) \to \Gamma(TM)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ es bilineal sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$. Luego $A_\xi : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ es lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$. La aplicación $A_\xi$ es llamada operador de forma.

**Observación 1.12.** Como $0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle D_X\xi, Y\rangle + \langle \xi, D_X Y\rangle$ para cada $Y \in \Gamma(TM)$, la fórmula de Gauss implica que

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

En virtud de que $\alpha$ es simétrica, la igualdad anterior implica que $A_\xi$ es un operador autoadjunto, esto es, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$ para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$.

**Observación 1.13.** Para cada $Y \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$, el operador $\nabla_Y A_\xi$ también es autoadjunto.

**Definición 1.14.** La componente normal de $D_X\xi$, la cual denotaremos por $\nabla^{\perp}_X\xi$, define una conexión compatible con la métrica sobre el haz normal $TM^{\perp}$. Decimos que $\nabla^{\perp} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM^{\perp}) \to \Gamma(TM^{\perp})$ es la conexión normal de $M$.

**Definición 1.15.** Fórmula de Weingarten. Sobre $M$,

$$D_X\xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi$$

para cada $X \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$.

Por otra parte, recordemos que sobre una variedad arbitraria $(N, D)$, el tensor de curvatura $\widetilde{R} : \Gamma(TN)\times\Gamma(TN)\times\Gamma(TN) \to \Gamma(TN)$ y el tensor asociado $\widetilde{Rm} : \Gamma(TN)\times$

$\Gamma(TN) \times \Gamma(TN) \times \Gamma(TN) \to \mathcal{C}^\infty(N)$ están definidos por $\widetilde{R}(X,Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z$ y $\widetilde{Rm}\ (X,Y,Z,W) := \langle R(X,Y)Z, W\rangle$ respectivamente.

Aplicando la fórmula de Gauss y las definiciones de los tensores de curvatura se deduce la siguiente ecuación.

**Proposición 1.16.** *Ecuación de Gauss. Si $M$ es una subvariedad riemanniana de una variedad riemanniana $N$ con $\alpha$ segunda forma fundamental asociada a $M$, entonces para cada $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$,*

$$\widetilde{Rm}\ (X,Y,Z,W) = Rm\ (X,Y,Z,W) - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle + \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle.$$

En virtud de la teoría de curvatura gaussiana y seccional, que podemos encontrar en [20], tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.17.** *Sean $H_0$ una superficie riemanniana de una variedad riemanniana $N^m$ con respectivos tensores de curvatura $Rm$ y $\widetilde{Rm}$, curvatura gaussiana y seccional $K$ y $\widetilde{K}$, y sea $h$ la segunda forma fundamental asociada a $H_0$. Si $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ es un marco local ortonormal de $TN$ adaptado a $H_0$, entonces*

$$\widetilde{K}(e_1,e_2) = K(e_1,e_2) - \langle h(e_1,e_1), h(e_2,e_2)\rangle + \langle h(e_1,e_2), h(e_1,e_2)\rangle. \tag{1.1}$$

*Demostración.* Solo especializamos la ecuación de Gauss y tomamos $e_1 = X = W$ y $e_2 = Y = Z$. □

Nuestro objetivo ahora es enunciar las ecuaciones de Codazzi y Ricci, las cuales son de importancia capital en la teoría de subvariedades riemannianas. Pero antes proporcionemos unas definiciones.

**Definición 1.18.** Para cada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) := \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

El tensor de curvatura $R^{\perp} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM^{\perp}) \to \Gamma(TM^{\perp})$ del haz normal $TM^{\perp}$ se define como

$$R^{\perp}(X,Y)\xi := \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi.$$

De la definición de $\widetilde{R}$ y de las fórmulas de Gauss y Weingarten se sigue la ecuación

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) \tag{1.2}$$

para cada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y la ecuación

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y) \tag{1.3}$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$. Si multiplicamos la ecuación 1.3 por un campo vectorial normal $\eta \in \Gamma(TM^{\perp})$ resulta

$$\langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle \tag{1.4}$$

donde $[A_\xi, A_\eta] := A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$. Similarmente, la ecuación 1.2 puede escribirse como

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi) \tag{1.5}$$

donde por definición

$$\begin{aligned} (\nabla_Y A)(X,\xi) &:= \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X \\ &= (\nabla_Y A_\xi)(X) - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X. \end{aligned}$$

Si la variedad ambiente $N$ es de curvatura seccional constante $c$, entonces para cada $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = c(\langle Y,Z \rangle X - \langle X,Z \rangle Y).$$

En consecuencia, si $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y $\xi, \eta \in \Gamma(TM^{\perp})$, entonces las ecuaciones 1.2 y 1.5 quedan como

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) \qquad \& \qquad (\nabla_Y A)(X,\xi) = (\nabla_X A)(Y,\xi) \tag{1.6}$$

y la ecuación 1.4 como

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.$$

En particular esto sucede en el caso de la variedad ambiente $(\mathbb{R}^m, D)$.

**Definición 1.19.** Ecuación de Ricci. Si $M$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^m$, entonces para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $\xi, \eta \in \Gamma(TM^{\perp})$,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle. \tag{1.7}$$

Más aún, si nos restringimos a una variedad ambiente con curvatura seccional constante y una subvariedad de codimensión 1 con un campo vectorial normal $\xi$ de norma constante (unitario por ejemplo), la ecuación 1.6 tiene como corolario la siguiente ecuación, cuya demostración puede verse en ([21], Corolario 34 (2)).

**Definición 1.20.** Ecuación de Codazzi.

$$(\nabla_X A_\xi)(Y) = (\nabla_Y A_\xi)(X) \tag{1.8}$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$.

**Definición 1.21.** Sea $M$ una $n$-subvariedad de $N^{n+k}$ y sea $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k : U \to TM^{\perp}$ un marco local ortonormal del haz normal $TM^{\perp}$ de $M$. Definimos el vector de curvatura media $\vec{H} : U \to TM^{\perp}$ como

$$\vec{H} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\text{traza } A_{\xi_i})\xi_i,$$

el cual es una sección local del haz normal $TM^{\perp}$ de $M$, es decir, $\vec{H}$ es un campo vectorial normal (local) de $M$. De la definición se sigue que el vector de curvatura media no depende del marco local ortonormal.

**Definición 1.22.** Sea $\{E_1, E_2, \cdots, E_n : U \to TM\}$ un marco local ortonormal de $M$. El cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental se define como

$$S := \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha(E_i, E_j)|^2.$$

**Proposición 1.23.** *Sobre este mismo marco local ortonormal el vector de curvatura media $\vec{H}$ se expresa como*

$$\vec{H} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i),$$

*Demostración.* Sea $\{E_1, \cdots, E_n, \xi_1, \cdots, \xi_k\}$ la completación de $\{E_i\}$ a un marco local ortonormal de $N$ con $\{\xi_j\}$ marco local ortonormal del haz normal $TM^{\perp}$. Finalmente

$$\begin{aligned} n\vec{H} &= \sum_{j=1}^{k} (\text{traza } A_{\xi_j})\xi_j = \sum_{j=1}^{k} \left[ \sum_{i=1}^{n} \langle A_{\xi_j} E_i, E_i \rangle \right] \xi_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[ \sum_{j=1}^{k} \langle \alpha(E_i, E_i), \xi_j \rangle \xi_j \right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i). \end{aligned}$$

□

De ahora en adelante la variedad ambiente $N$ será la variedad riemanniana $\mathbb{R}^m$ con la métrica y la conexión euclidiana usual.

Una de las fórmulas más importantes en geometría diferencial de subvariedades es la llamada fórmula de Beltrami para subvariedades riemannianas del espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$. Este y otros resultados de esta sección pueden consultarse en [6].

**Proposición 1.24.** *(Fórmula de Beltrami). Sea $x : M \to \mathbb{R}^m$ una inmersión isométrica de una $n$-variedad riemanniana $M$ en el $m$-espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$. Entonces*

$$\Delta x = -n\vec{H}.$$

Otra de las fórmulas básicas para subvariedades de $\mathbb{R}^m$, en vista de sus múltiples corolarios, es la que se menciona en el siguiente teorema.

**Teorema 1.25.** *Sea $x : M \to \mathbb{R}^m$ una inmersión isométrica de una $n$-variedad riemanniana $M$ en el $m$-espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$. Entonces*

$$\Delta\vec{H} = \Delta^{\nabla^\perp}\vec{H} + \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i) + (\Delta\vec{H})^\top$$

*donde*

$$\Delta^{\nabla^\perp}\vec{H}|_p := -\sum_{i=1}^{n} (\nabla^\perp_{e_i}\nabla^\perp_{e_i}\vec{H})_p,$$

*es el laplaciano asociado a la conexión normal $\nabla^\perp$,*

$$(\Delta\vec{H})^\top = \frac{n}{2} grad\ \langle\vec{H}, \vec{H}\rangle + 2\ traza\ A_{\nabla^\perp\vec{H}}$$

*es la componente tangencial de $\Delta\vec{H}$,*

$$traza\ A_{\nabla^\perp\vec{H}} := \sum_{i=1}^{n} A_{\nabla^\perp_{e_i}\vec{H}}e_i$$

*y $e_1, e_2, \cdots, e_n$ es un marco local ortonormal tangente a $M$.*

*Demostración.* Sea $p \in M$ y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base ortonormal para $T_pM$. La base anterior se puede extender a un marco local ortonormal $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ de $M$ tal que $\nabla_{E_i}E_j|_p = 0$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$.

En virtud de las fórmulas de Gauss y Weingarten, para todo par de campos vectoriales $X, Y \in \Gamma(TM)$ tangentes a $M$,

$$\begin{aligned} D_Y D_X\vec{H} &= D_Y(-A_{\vec{H}}X + \nabla^\perp_X\vec{H}) \\ &= -D_Y A_{\vec{H}}X + D_Y\nabla^\perp_X\vec{H} \\ &= -\nabla_Y A_{\vec{H}}X - \alpha(A_{\vec{H}}X, Y) - A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}Y + \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\vec{H}. \end{aligned}$$

Luego, si $v \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$ es un campo vectorial constante arbitrario sobre $\mathbb{R}^m$, entonces

$$YX\langle\vec{H}, v\rangle = -\langle\nabla_Y A_{\vec{H}}X, v\rangle - \langle\alpha(A_{\vec{H}}X, Y), v\rangle - \langle A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}Y, v\rangle + \langle\nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\vec{H}, v\rangle.$$

Luego, en virtud de la expresión de $(\Delta\langle\vec{H},v\rangle)_p$ sobre el marco local ortonormal que estamos utilizando, se sigue que

$$\Delta\vec{H}=\Delta^{\nabla^\perp}\vec{H}+\sum_{i=1}^{n}[\alpha(A_{\vec{H}}e_i,e_i)+(\nabla_{e_i}A_{\vec{H}})e_i+A_{\nabla^\perp_{e_i}\vec{H}}e_i].$$

Sea

$$traza\ (\nabla A_{\vec{H}}):=\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A_{\vec{H}})e_i.$$

Si $X$ es un campo vectorial tangente a $M$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle traza\ (\nabla A_{\vec{H}}),X\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A_{\vec{H}})e_i,X\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}A_{\vec{H}})e_i,X\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle e_i,(\nabla_{e_i}A_{\vec{H}})X\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,(\nabla_X A_{\vec{H}})e_i-A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}e_i+A_{\nabla^\perp_{e_i}\vec{H}}X\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}[\langle e_i,(\nabla_X A_{\vec{H}})e_i\rangle-\langle e_i,A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}e_i\rangle+\langle e_i,A_{\nabla^\perp_{e_i}\vec{H}}X\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{n}[\langle e_i,(\nabla_X A_{\vec{H}})e_i\rangle-\langle e_i,A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}e_i\rangle+\langle A_{\nabla^\perp_{e_i}\vec{H}}e_i,X\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{n}[\langle e_i,(\nabla_X A_{\vec{H}})e_i\rangle-\langle e_i,A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}e_i\rangle]+\langle\sum_{i=1}^{n}A_{\nabla^\perp_{e_i}\vec{H}}e_i,X\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}[\langle e_i,(\nabla_X A_{\vec{H}})e_i\rangle-\langle e_i,A_{\nabla^\perp_X\vec{H}}e_i\rangle]+\langle traza\ A_{\nabla^\perp\vec{H}},X\rangle
\end{aligned}$$

donde en el segundo renglón de la cadena de igualdades anterior hemos usado la fórmula 1.6. Además

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,(\nabla_X A_{\vec{H}})e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}[X\langle e_i,A_{\vec{H}}e_i\rangle-\langle\nabla_X e_i,A_{\vec{H}}e_i\rangle]=\sum_{i=1}^{n}X\langle e_i,A_{\vec{H}}e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}X\langle\alpha(e_i,e_i),\vec{H}\rangle=X\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i),\vec{H}\rangle\\
&= X\langle n\vec{H},\vec{H}\rangle=nX\langle\vec{H},\vec{H}\rangle\\
&= n\langle X,grad\ \langle\vec{H},\vec{H}\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, A_{\nabla^{\perp}_{X}\vec{H}}e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \alpha(e_i,e_i), \nabla^{\perp}_{X}\vec{H}\rangle = \langle n\vec{H}, \nabla^{\perp}_{X}\vec{H}\rangle \\ &= n\langle \vec{H}, \nabla^{\perp}_{X}\vec{H}\rangle = \frac{n}{2}X\langle \vec{H},\vec{H}\rangle \\ &= \frac{n}{2}\langle grad\ \langle \vec{H},\vec{H}\rangle, X\rangle.\end{aligned}$$

Como $X$ es arbitrario, se sigue el resultado. □

**Corolario 1.26.** *Sea $M$ una subvariedad riemanniana de un espacio euclidiano. Si $M$ tiene vector de curvatura media paralelo en el haz normal de $M$, entonces $(\Delta\vec{H})^{\top} = 0$ y*

$$\Delta\vec{H} = \sum_{i=1}^{n}\alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i)$$

*donde $e_1, e_2, \cdots, e_n$ es un marco local ortonormal de $TM$.*

*Demostración.* Claramente $\Delta^{\nabla^{\perp}}\vec{H} = 0$ y traza $A_{\nabla^{\perp}\vec{H}} = 0$. Finalmente, para cada $X$ campo vectorial tangente a $M$ tenemos $\langle \text{grad}\ \langle\vec{H},\vec{H}\rangle, X\rangle = X\langle\vec{H},\vec{H}\rangle = 2\langle D_X\vec{H},\vec{H}\rangle = 2\langle (D_X\vec{H})^{\perp},\vec{H}\rangle = 2\langle\nabla^{\perp}_{X}\vec{H},\vec{H}\rangle = 0$. Por lo tanto grad $\langle\vec{H},\vec{H}\rangle = 0$ y en consecuencia $(\Delta\vec{H})^{\top} = 0$ y $\Delta\vec{H} = \sum_{i=1}^{n}\alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i)$. □

**Definición 1.27.** Sea $x : M \to N$ una inmersión isométrica. $M$ es llamada subvariedad biarmónica si el vector de curvatura media es armónico, es decir, $\Delta\vec{H} = 0$.

La razón de esta terminología se debe a que en virtud de la fórmula de Beltrami, $\Delta\vec{H} = 0$ si, y solo si $\Delta^2 x = \Delta(\Delta x) = 0$, esto es, el doble laplaciano de la inmersión $x$ se anula.

**Corolario 1.28.** *Si $x : M \to \mathbb{R}^m$ es una inmersión isométrica, entonces $M$ es biarmónica si, y solo si se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales semi-lineales fuertemente elípticas de cuarto orden:*

$$\Delta^{\nabla^{\perp}}\vec{H} + \sum_{i=1}^{n}\alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i) = 0 \qquad \& \qquad n\ grad\ \langle\vec{H},\vec{H}\rangle + 4\ traza\ A_{\nabla^{\perp}\vec{H}} = 0.$$

*Demostración.* Obsérvese que las componentes tangencial y normal de $\Delta\vec{H}$ son, respectivamente, $(\Delta\vec{H})^\top$ y $\Delta^{\nabla^\perp}\vec{H} + \sum_{i=1}^n \alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i)$. Luego $\Delta\vec{H} = 0$ si, y solo si $(\Delta\vec{H})^\top = 0$ y $\Delta^{\nabla^\perp}\vec{H} + \sum_{i=1}^n \alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i) = 0$ si, y solo si

$$\Delta^{\nabla^\perp}\vec{H} + \sum_{i=1}^n \alpha(A_{\vec{H}}e_i, e_i) = 0 \qquad \& \qquad n\ grad\ \langle\vec{H}, \vec{H}\rangle + 4\ traza\ A_{\nabla^\perp\vec{H}} = 0.$$

□

**Definición 1.29.** Una subvariedad $M$ de una variedad riemanniana $N$ se dice mínima si $\vec{H}$ es la sección cero, es decir, si $\vec{H} = 0$.

## 1.3. Hipersuperficies

**Definición 1.30.** Una subvariedad de codimensión 1 se conoce como hipersuperficie.

Ahora consideremos una hipersuperficie $M$ del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Como los siguientes resultados son de naturaleza local, podemos asumir que $M$ es orientada y tiene un campo vectorial $N$ unitario y normal a $M$. Como $\langle\alpha(X,Y), N\rangle = \langle A_N X, Y\rangle$ si, y solo si $\langle A_N X, Y\rangle N = \alpha(X,Y)$ se sigue que la fórmula de Gauss se puede escribir como

$$D_X Y = \nabla_X Y + \langle A_N X, Y\rangle N$$

donde $X$ y $Y$ son campos vectoriales tangentes a $M$. De ahora en adelante $A := A_N$, a menos que se especifique lo contrario.

Podemos escribir el vector de curvatura media como $\vec{H} = HN$ para una única función diferenciable $H$ porque $M$ es una hipersuperficie y en cada punto $p \in M$ el vector normal $N(p)$ genera el espacio normal $T_pM^\perp$. Notemos que $H = \langle\vec{H}, N\rangle$ ya que $N$ es unitario. A $H$ lo conoceremos como la (función) curvatura media.

**Lema 1.31.** *El campo vectorial normal unitario $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ es paralelo en el haz normal $TM^{\perp}$.*

*Demostración.* Sea $X \in \Gamma(TM)$ campo vectorial tangente a $M$ arbitrario. Como $1 = \langle N, N \rangle$, se sigue que $0 = X\langle N, N \rangle = 2\langle D_X N, N \rangle$, lo cual implica que $D_X N \perp N$. Por lo tanto $D_X N$ es tangente a $M$ y en consecuencia $\nabla^{\perp}_X N = (D_X N)^{\perp} = 0$. □

El siguiente resultado es en esencia un corolario del teorema 1.25.

**Corolario 1.32.** *Toda hipersuperficie biarmónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ con curvatura media constante es mínima.*

*Demostración.* Sea $\{E_1, \cdots, E_n\}$ un marco local ortonormal de $M$. Notemos que $H = \frac{1}{n}$traza $A$. En efecto, $\vec{H} = HN$ implica

$$\begin{aligned} nH &= n\langle \vec{H}, N \rangle = n\left\langle \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha(E_j, E_j), N \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle \alpha(E_j, E_j), N \rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle A(E_j), E_j \rangle \\ &= \text{traza } A. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que $\vec{H}$ es paralelo en el haz normal $TM^{\perp}$ de $M$. En efecto, en virtud del lema 1.31 y en virtud de que $H$ es constante se sigue que $\vec{H}$ es tangente a $M$. En efecto,

$$0 = XH = X\langle \vec{H}, N \rangle = \langle D_X \vec{H}, N \rangle + \langle \vec{H}, D_X N \rangle = \langle D_X \vec{H}, N \rangle + \langle \vec{H}, \nabla^{\perp}_X N \rangle = \langle D_X \vec{H}, N \rangle.$$

Luego $0 = \Delta \vec{H} = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_{\vec{H}} E_i, E_i)$ por el teorema 1.25 y porque $M$ es biarmónica.

Además traza $A^2_{\vec{H}} = 0$. En efecto,

$$\text{traza } A^2_{\vec{H}} = \sum_{i=1}^{n}\langle A^2_{\vec{H}} E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle A_{\vec{H}} E_i, A_{\vec{H}} E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \alpha(A_{\vec{H}} E_i, E_i), \vec{H} \rangle = 0.$$

Por otra parte traza $A_{\vec{H}}^2 = 0$ implica traza $A_{\vec{H}} = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{traza } A_{\vec{H}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle A_{\vec{H}}^2 E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A_{\vec{H}} E_i, A_{\vec{H}} E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle A_{\vec{H}} E_i, E_j \rangle E_j, A_{\vec{H}} E_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle A_{\vec{H}} E_i, E_j \rangle^2 \end{aligned}$$

implica que $\langle A_{\vec{H}} E_i, E_j \rangle^2 = 0$ y $\langle A_{\vec{H}} E_j, E_j \rangle = 0$ para cada $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto traza $A_{\vec{H}} = \sum_{i=1}^{n} \langle A_{\vec{H}} E_i, E_i \rangle = 0$.

Finalmente $0 =$ traza $A_{\vec{H}} =$ traza $A_{HN} =$ traza $HA_N = H$traza $A_N = nH^2$ y en consecuencia $H = 0$ y $\vec{H} = 0$. $\square$

**Definición 1.33.** Formas de conexión. Sean $V$ un abierto conexo de una variedad $M$, $e_1, e_2, \cdots, e_n, N : V \to T\mathbb{R}^{n+1}$ un marco local ortonormal para $\mathbb{R}^{n+1}$ adaptado a $M$ y $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n+1}$ su respectivo comarco dual.

Para cada $i, j = 1, \cdots, n+1$ definimos las formas de conexión asociadas a $e_1, e_2, \cdots, e_n$ como aplicaciones $\omega_{ij} : \Gamma(TV) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(V)$ dadas por

$$\omega_{ij}(Y) := \omega_j(D_Y e_i)$$

para cada $Y \in \Gamma(TV)$.

**Observación 1.34.** Las formas de conexión son antisimétricas, es decir, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ para cada $i, j = 1, \cdots, n+1$. Además,

$$D_Y e_i = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{ij}(Y) e_j \qquad \& \qquad \omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ij}(e_k)\omega_k.$$

**Teorema 1.35.** *Las ecuaciones estructurales extrínsecas que relacionan una variedad ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$ con una hipersuperficie $M$ son*

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_j$$

*y*

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj}) + \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j}$$

*donde* $\omega_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\omega_j$ *y* $h_{ij} := \langle Ae_i, e_j \rangle$ *para cada* $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Con ayuda de la fórmula 1.1 del teorema 1.17 podemos escribir la curvatura gaussiana de una superficie $H_0$ con $H_0 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ en términos de las formas de conexión asociadas a $M$.

**Teorema 1.36.** *Sea* $H_0$ *una superficie en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *tal que* $H_0 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $e_1, e_2, \cdots, e_n, N$ *un marco local ortonormal de* $T\mathbb{R}^{n+1}$ *adaptado a* $H_0$ *y a* $M$ *simultáneamente,* $\omega_{ij}$ *las formas de conexión asociadas a* $M$ *y* $h$ *la segunda forma fundamental asociada a* $H_0$*. Entonces*

$$K_{H_0} = \sum_{k=3}^{n+1} \omega_{1k}(e_1)\omega_{2k}(e_2) - (\omega_{2k}(e_1))^2. \tag{1.9}$$

*Demostración.* Para $X$ y $Y$ tangentes a $H_0$ sea $(D_X Y)^{nor}$ la componente normal de $D_X Y$ con respecto a $H_0$. Usando la observación 1.34, para cada $i, j = 1, 2$ tenemos

$$\begin{aligned} h(e_i, e_j) &= (D_{e_i} e_j)^{nor} = \left( \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{jk}(e_i) e_k \right)^{nor} \\ &= \sum_{k=3}^{n+1} \omega_{jk}(e_i) e_k. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula 1.1 del teorema 1.17 y especializando para el caso en que la variedad ambiente es $\mathbb{R}^{n+1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} K_{H_0}(e_1, e_2) &= \langle h(e_1, e_1), h(e_2, e_2) \rangle - \langle h(e_1, e_2), h(e_1, e_2) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=3}^{n+1} \omega_{1k}(e_1) e_k, \sum_{\ell=3}^{n+1} \omega_{2\ell}(e_2) e_\ell \right\rangle - \left\langle \sum_{r=3}^{n+1} \omega_{2r}(e_1) e_r, \sum_{s=3}^{n+1} \omega_{2s}(e_1) e_s \right\rangle \\ &= \sum_{k=3}^{n+1} \omega_{1k}(e_1)\omega_{2k}(e_2) - (\omega_{2k}(e_1))^2. \end{aligned}$$

□

**Lema 1.37.** *Si* $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ *es un marco local ortonormal de una hipersuperficie* $M$*, entonces*

$$S = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(AE_i, E_i), N\rangle \qquad \& \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, AE_i\rangle. \tag{1.10}$$

*Demostración.* Es obvio que $\sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(AE_i, E_i), N\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, AE_i\rangle$, por lo que sólo basta probar la primera de las dos identidades anteriores. En efecto, como $AE_i = \sum_{j=1}^{n} \langle AE_i, E_j\rangle E_j = \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha(E_i, E_j), N\rangle E_j$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(AE_i, E_i), N\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha(E_i, E_j), N\rangle E_j, E_i\right), N\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \alpha(E_i, E_j), N\rangle^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \alpha(E_i, E_j), N\rangle^2 \langle N, N\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(E_i, E_j), N\rangle N, \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha(E_i, E_j), N\rangle N \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_j), \sum_{j=1}^{n} \alpha(E_i, E_j) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha(E_i, E_j)|^2 = S.
\end{aligned}$$

□

**Proposición 1.38.** *Si* $M$ *es una hipersuperficie de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *con vector de curvatura media asociada* $\vec{H}$*, entonces*

$$\Delta \vec{H} = 2A \ grad \ H + nH \ grad \ H + (\Delta H + SH)N$$

*donde* $S = \Sigma_{i=1}^{n} \langle \alpha(Ae_i, e_i), N\rangle$.

*Demostración.* Sea $p \in M$ y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base ortonormal para $T_pM$. La base anterior se puede extender a un marco local ortonormal $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ de $M$ tal que $\nabla_{E_i} E_j|_p = 0$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$.

Como $\Delta\vec{H} = \sum_{i=1}^{n}[D_{\nabla_{E_i}E_i}\vec{H} - D_{E_i}D_{E_i}\vec{H}]$ sobre el marco $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$, al evaluar en el punto $p$ se sigue que

$$\Delta\vec{H}|_p = \sum_{i=1}^{n}[D_{\nabla_{E_i}E_i}\vec{H}|_p - D_{E_i}D_{E_i}\vec{H}|_p] = -\sum_{i=1}^{n} D_{E_i}D_{E_i}\vec{H}|_p.$$

Por lo tanto, lo que haremos será calcular $-\sum_{i=1}^{n} D_{E_i}D_{E_i}\vec{H}$ y finalmente evaluar en el punto $p$ para encontrar $\Delta\vec{H}|_p$. Finalmente, como $p$ es arbitrario, habremos calculado $\Delta\vec{H}$.

En efecto, en virtud del lema 1.31 y de las fórmulas de Gauss y Weingarten, para todo par de campos vectoriales $X, Y \in \Gamma(TM)$ tangentes a $M$,

$$\begin{aligned} D_Y D_X N &= D_Y(-A_N X + \nabla^{\perp}_X N) = -D_Y A_N X + D_Y \nabla^{\perp}_X N \\ &= -\nabla_Y A_N X - \alpha(A_N X, Y) - A_{\nabla^{\perp}_X N} Y + \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X N \\ &= -\nabla_Y A_N X - \alpha(A_N X, Y) \end{aligned}$$

pues $\nabla^{\perp}_X N = 0$. Es decir

$$D_Y D_X N = -\nabla_Y A_N X - \alpha(A_N X, Y) \tag{1.11}$$

Luego

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} D_{E_i}D_{E_i}\vec{H} &= -\sum_{i=1}^{n} D_{E_i}D_{E_i}(HN) = -\sum_{i=1}^{n} D_{E_i}[(E_iH)N + HD_{E_i}N] \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\{D_{E_i}[(E_iH)N] + D_{E_i}[HD_{E_i}N]\} \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\{(E_iE_iH)N + (E_iH)D_{E_i}N + (E_iH)D_{E_i}N + HD_{E_i}D_{E_i}N\} \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(E_iE_iH)N - 2\sum_{i=1}^{n}(E_iH)D_{E_i}N - \sum_{i=1}^{n} HD_{E_i}D_{E_i}N. \end{aligned}$$

Al usar la expresión 1.11 con $X = E_i = Y$ y al aplicar el lema 1.31 se sigue que

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n} D_{E_i} D_{E_i} \vec{H} &= \left(-\sum_{i=1}^{n} E_i E_i H\right) N + 2\sum_{i=1}^{n} (E_i H) A E_i \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n} (E_i H) \nabla^{\perp}_{E_i} N - \sum_{i=1}^{n} H D_{E_i} D_{E_i} N \\
&= (\Delta H) N + 2A \left(\sum_{i=1}^{n} (E_i H) E_i\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} H \nabla_{E_i} A E_i + H \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(AE_i, E_i), N\rangle\right) N \\
&= (\Delta H) N + 2A(grad\ H) + \sum_{i=1}^{n} H \nabla_{E_i} A E_i + SHN
\end{aligned}$$

donde para cada $X \in \Gamma(TM)$ arbitrario

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{i=1}^{n} H \nabla_{e_i} A e_i, X\rangle &= \sum_{i=1}^{n} H \langle \nabla_{e_i} A e_i, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} H \langle (\nabla_{e_i} A) e_i, X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} H \langle e_i, (\nabla_{e_i} A) X\rangle = \sum_{i=1}^{n} H \langle e_i, (\nabla_X A) e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} H \langle e_i, \nabla_X A e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} H [X\langle e_i, Ae_i\rangle - \langle \nabla_X e_i, e_i\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{n} H X \langle e_i, Ae_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} H X \langle \alpha(e_i, e_i), N\rangle \\
&= HX(n\langle \vec{H}, N\rangle = nH(XH) \\
&= nH\langle grad\ H, X\rangle = \langle nH\ grad\ H, X\rangle
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\sum_{i=1}^{n} H \nabla_{e_i} A e_i = nH\ grad\ H$. Al evaluar $-\sum_{i=1}^{n} D_{E_i} D_{E_i} \vec{H}$ en $p$ se sigue el resultado. □

**Corolario 1.39.** *Una hipersuperficie $M$ es biarmónica si, y solo si*

$$2A\ grad\ H + nHgrad\ H = 0 \qquad \& \qquad \Delta H + SH = 0$$

*si, y solo si*

$$A\ grad\ H = -\frac{nH}{2} grad\ H \qquad \& \qquad \Delta H + SH = 0.$$

**Definición 1.40.** Las hipersuperficies que satisfacen la relación

$$A\ grad\ H = -\frac{nH}{2} grad\ H$$

se conocen como $H$-hipersuperficies.

**Corolario 1.41.** *Si una hipersuperficie es biarmónica, entonces es una $H$-hipersuperficie.*

□

# Capítulo 2

# H-hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$

Sea $M$ una $H$-hipersuperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$, esto es, sobre $M$ se satisface

$$A\ grad\ H = -\frac{nH}{2} grad\ H.$$

Algunos resultados sobre geometría de curvas y superficies pueden encontrarse en [18].

**Teorema 2.1.** *Si $X$ y $Y$ son campos vectoriales tangentes a $M$, entonces*

$$\langle AX, \nabla_Y grad\ H\rangle = \langle AY, \nabla_X grad\ H\rangle.$$

*Demostración.* Primero que nada $grad\ (-\frac{nH^2}{4}) = -\frac{nH}{2} grad\ H$ pues

$$grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right) \ = \ -\frac{n}{4} grad\ (H^2) = -\frac{n}{4}[2H grad\ H] = -\frac{nH}{2} grad\ H.$$

Por lo tanto, como $M$ es una $H$-hipersuperficie, tenemos que

$$A\ grad\ H = grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right).$$

Derivando covariantemente con respecto a $X$ y $Y$ resulta

$$\nabla_X grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right) = \nabla_X(Agrad\ H) = (\nabla_X A)grad\ H + A(\nabla_X grad\ H)$$

$$\nabla_Y grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right) = \nabla_Y(Agrad\ H) = (\nabla_Y A)grad\ H + A(\nabla_Y grad\ H).$$

Al multiplicar via $\langle\ ,\ \rangle$ por $Y$ la primera fórmula de las dos anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_X A)grad\ H, Y\rangle + \langle A(\nabla_X grad\ H), Y\rangle &= \left\langle \nabla_X grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right), Y\right\rangle \\
\langle grad\ H, (\nabla_X A)Y\rangle + \langle A(\nabla_X grad\ H), Y\rangle &= X\left\langle grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right), Y\right\rangle \\
&\quad - \left\langle grad\ \left(-\frac{nH^2}{4}\right), \nabla_X Y\right\rangle \\
\langle grad\ H, (\nabla_X A)Y\rangle + \langle \nabla_X grad\ H, AY\rangle &= XY\left(-\frac{nH^2}{4}\right) - \nabla_X Y\left(-\frac{nH^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Similarmente, multiplicando via $\langle\ ,\ \rangle$ por $X$ la segunda fórmula obtenemos

$$\langle grad\ H, (\nabla_Y A)X\rangle + \langle \nabla_Y grad\ H, AX\rangle = YX\left(-\frac{nH^2}{4}\right) - \nabla_Y X\left(-\frac{nH^2}{4}\right).$$

Pero el lado derecho de la penúltima fórmula es igual al operador hessiano $Hess$ de $(-\frac{nH^2}{4})$ evaluado en la pareja $(Y, X)$ pues

$$\left[Hess\left(-\frac{nH^2}{4}\right)\right](Y, X) = XY\left(-\frac{nH^2}{4}\right) - \nabla_X Y\left(-\frac{nH^2}{4}\right).$$

Pero el operador hessiano es simétrico, esto es, $(Hess\ f)(Y, X) = (Hess\ f)(X, Y)$. En consecuencia

$$\langle grad\ H, (\nabla_X A)Y\rangle + \langle A(\nabla_X grad\ H), Y\rangle = \langle grad\ H, (\nabla_Y A)X\rangle + \langle A(\nabla_Y grad\ H), X\rangle.$$

Pero como $(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$ en virtud de la ecuación de Codazzi, se sigue que

$$\langle \nabla_X grad\ H, AY\rangle = \langle \nabla_Y grad\ H, AX\rangle$$

como queríamos demostrar. $\square$

## 2.1. Las curvas integrales de grad $H$

En toda esta sección consideraremos una vecindad abierta $U$ de $M$ sobre la cual $grad\ H$ no se anula.

**Definición 2.2.** Sobre $U$ definimos el campo vectorial gradiente normalizado

$$e_n := \frac{grad\ H}{|grad\ H|}.$$

**Observación 2.3.** $A(e_n) = -\frac{nH}{2}e_n$. En efecto

$$\begin{aligned} A(e_n) &= A\left(\frac{grad\ H}{|grad\ H|}\right) = \frac{1}{|grad\ H|}A(grad\ H) = \frac{1}{|grad\ H|}\left(-\frac{nH}{2}grad\ H\right) \\ &= -\frac{nH}{2}\frac{grad\ H}{|grad\ H|} = -\frac{nH}{2}e_n. \end{aligned}$$

**Observación 2.4.** Sabemos que una curva integral $\gamma$ de un campo vectorial $X$ satisface

$$(X \circ \gamma)(t) = \gamma^{'}(t)$$

para cada $t$. Al derivar covariantemente la expresión anterior a lo largo de la curva $\gamma$ resulta

$$D_t\gamma^{'}(t) = D_t(X \circ \gamma)(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}X = \nabla_{(X\circ\gamma)(t)}X = (\nabla_X X)(\gamma(t)).$$

En particular, si $\gamma$ es una curva integral de $e_n$ y $\nabla_{e_n}e_n = 0$ sobre $U$, entonces $\gamma$ es una geodésica.

**Lema 2.5.** *grad* $\langle Ae_n, e_n\rangle = (\nabla_{e_n}A)e_n$.

*Demostración.* En efecto, sea $Z$ un campo vectorial (de $TM$ sobre $U$) arbitrario. Afirmamos que $\langle\nabla_Z e_n, Ae_n\rangle = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle\nabla_Z e_n, Ae_n\rangle &= \left\langle\nabla_Z e_n, -\frac{nH}{2}e_n\right\rangle = -\frac{nH}{2}\langle\nabla_Z e_n, e_n\rangle \\ &= -\frac{nH}{4}Z\langle e_n, e_n\rangle = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_n} A)e_n, Z\rangle &= \langle e_n, (\nabla_{e_n} A)Z\rangle = \langle e_n, (\nabla_Z A)e_n\rangle \\
&= \langle e_n, \nabla_Z (Ae_n)\rangle - \langle e_n, A(\nabla_Z e_n)\rangle \\
&= [Z\langle e_n, Ae_n\rangle - \langle \nabla_Z e_n, Ae_n\rangle] - \langle Ae_n, \nabla_Z e_n\rangle \\
&= Z\langle e_n, Ae_n\rangle - 2\langle \nabla_Z e_n, Ae_n\rangle = Z\langle e_n, Ae_n\rangle \\
&= \langle grad\ \langle e_n, Ae_n\rangle, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Como $Z$ fue arbitrario, se sigue que

$$grad\ \langle Ae_n, e_n\rangle = (\nabla_{e_n} A)e_n.$$

$\square$

**Observación 2.6.**

$$\begin{aligned}
grad\ \langle Ae_n, e_n\rangle &= grad\ \left\langle -\frac{nH}{2} e_n, e_n \right\rangle \\
&= grad\ \left(-\frac{nH}{2}\right).
\end{aligned}$$

**Observación 2.7.**

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_n}\left(-\frac{nH}{2} e_n\right) &= e_n\left(-\frac{nH}{2}\right) e_n - \frac{nH}{2}\nabla_{e_n} e_n \\
&= -\frac{n}{2} e_n(H)e_n - \frac{nH}{2}\nabla_{e_n} e_n.
\end{aligned}$$

**Lema 2.8.** *$e_n(H)e_n = grad\ H$ y $e_n(H) = |grad\ H|$.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
e_n(H)e_n &= \left[\frac{grad\ H}{|grad\ H|}(H)\right] \frac{grad\ H}{|grad\ H|} = \frac{1}{|grad\ H|^2}[grad\ H\ (H)]grad\ H \\
&= \frac{1}{|grad\ H|^2}[\langle grad\ H, grad\ H\rangle]grad\ H = \frac{|grad\ H|^2}{|grad\ H|^2} grad\ H \\
&= grad\ H.
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando $e_n(H)e_n = grad\ H$ por $e_n$ resulta $e_n(H) = |grad\ H|$. $\square$

**Teorema 2.9.** *Las curvas integrales de $e_n$ son geodésicas, líneas de curvatura y también curvas planas.*

*Demostración.* Supongamos que $\nabla_{e_n} e_n$ es no cero en un punto $p_0 \in U$. Entonces existe una vecindad $W \subseteq U$ de $p_0$ donde $\nabla_{e_n} e_n$ es no cero. Definamos $e_1 := \frac{\nabla_{e_n} e_n}{|\nabla_{e_n} e_n|}$ sobre $W$. Notemos primero que $e_1$ es perpendicular a $e_n$ y $e_1(H) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_n \rangle &= \left\langle \frac{\nabla_{e_n} e_n}{|\nabla_{e_n} e_n|}, e_n \right\rangle = \frac{1}{|\nabla_{e_n} e_n|} \langle \nabla_{e_n} e_n, e_n \rangle \\
&= \frac{1}{2|\nabla_{e_n} e_n|} e_n \langle e_n, e_n \rangle = 0
\end{aligned}$$

pues $e_n$ es unitario sobre $U \supseteq W$. Luego $e_1(H) = \langle e_1, grad\ H \rangle = |grad\ H| \langle e_1, e_n \rangle = 0$. Probaremos que $Ae_1 = -\frac{nH}{2} e_1$. Usando los lemas 2.5 y 2.8 y las observaciones 2.6 y 2.7 tenemos que

$$\begin{aligned}
grad \left( -\frac{nH}{2} \right) &= grad\ \langle Ae_n, e_n \rangle = (\nabla_{e_n} A) e_n \\
&= \nabla_{e_n}(Ae_n) - A(\nabla_{e_n} e_n) = \nabla_{e_n} \left( -\frac{nH}{2} e_n \right) - A(\nabla_{e_n} e_n) \\
&= -\frac{n}{2} e_n(H) e_n - \frac{nH}{2} \nabla_{e_n} e_n - A(\nabla_{e_n} e_n) \\
&= -\frac{n}{2} grad\ H - \frac{nH}{2} \nabla_{e_n} e_n - A(\nabla_{e_n} e_n).
\end{aligned}$$

En consecuencia, sobre $W$ resulta

$$|\nabla_{e_n} e_n| Ae_1 = A(\nabla_{e_n} e_n) = -\frac{nH}{2} \nabla_{e_n} e_n = -\frac{nH}{2} |\nabla_{e_n} e_n| e_1$$

de donde se sigue que $Ae_1 = -\frac{nH}{2} e_1$. Similarmente, usando que $Ae_1 = -\frac{nH}{2} e_1$, el lema

2.5 sigue siendo válido si cambiamos $e_n$ por $e_1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} grad\ \left(-\frac{nH}{2}\right) &= grad\ \langle Ae_1, e_1\rangle = (\nabla_{e_1}A)e_1 \\ &= \nabla_{e_1}(Ae_1) - A(\nabla_{e_1}e_1) = \nabla_{e_1}\left(-\frac{nH}{2}e_1\right) - A(\nabla_{e_1}e_1) \\ &= -\frac{n}{2}e_1(H)e_1 - \frac{nH}{2}\nabla_{e_1}e_1 - A(\nabla_{e_1}e_1) \\ &= -\frac{nH}{2}\nabla_{e_1}e_1 - A(\nabla_{e_1}e_1) \end{aligned}$$

en virtud de que $e_1(H) = 0$. Multiplicando esta ecuación por $e_n$ resulta $e_n(H) = 0$ porque

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2}e_n(H) &= -\frac{n}{2}\langle grad\ H, e_n\rangle = \left\langle grad\ \left(-\frac{n}{2}H\right), e_n\right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{nH}{2}\nabla_{e_1}e_1, e_n\right\rangle - \langle A(\nabla_{e_1}e_1), e_n\rangle \\ &= -\frac{nH}{2}\langle\nabla_{e_1}e_1, e_n\rangle - \langle\nabla_{e_1}e_1, Ae_n\rangle \\ &= -\frac{nH}{2}\langle\nabla_{e_1}e_1, e_n\rangle + \frac{nH}{2}\langle\nabla_{e_1}e_1, e_n\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pero $0 = e_n(H)e_n = grad\ H$ contradice que $grad\ H$ no se anula sobre $W$. Por lo tanto $\nabla_{e_n}e_n = 0$ en todos los puntos de $U$ y en consecuencia las curvas integrales de $e_n$ son geodésicas. Además, claramente las curvas integrales también son líneas de curvatura pues

$$\begin{aligned} A(\dot\gamma(t)) &= A(e_n \circ \gamma(t)) = A(e_n|_{\gamma(t)}) \\ &= -\frac{nH|_{\gamma(t)}}{2}e_n|_{\gamma(t)} = -\frac{nH|_{\gamma(t)}}{2}\dot\gamma(t) \end{aligned}$$

para cada $t$. Por otra parte, de la fórmula de Gauss tenemos que

$$D_{e_n}e_n = \nabla_{e_n}e_n + \langle Ae_n, e_n\rangle N = -\frac{nH}{2}N$$

y de la definición del operador de forma resulta

$$D_{e_n}N = -Ae_n = -(-\frac{nH}{2}e_n) = \frac{nH}{2}e_n.$$

Ahora sea $C$ una curva integral (luego una geodésica) de $e_n$ parametrizada por longitud de arco $s$ que comienza en $p = C(0) \in U$ con velocidad inicial $e_n(p) = C'(0) \in T_pM$. Si $T$ es su vector tangente unitario $e_n$, las dos fórmulas anteriores adquieren la forma:

$$D_{C'(0)}T = D_{e_n(p)}e_n = D_{e_n}e_n|_p = -\frac{nH(p)}{2}N(p)$$

$$D_{C'(0)}N \quad = \quad D_{e_n(p)}N = D_{e_n}N|_p = \frac{nH(p)}{2}e_n|_p = \frac{nH(p)}{2}T(p)$$

lo cual implica que $N$ es normal a la curva $C$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, que el plano $\pi$ generado por $T$ y $N$ es constante para cada $s$, que $C$ está contenida en $\pi$ y que $-\frac{nH}{2}$ es la curvatura de la curva plana $C$. $\square$

## 2.2. Distribución y variedades integrales

**Definición 2.10.** Sea $\mathcal{D}$ una distribución de $U$ de dimensión $n-1$ perpendicular a *grad* $H$.

**Lema 2.11.** *La distribución $\mathcal{D}$ es involutiva.*

*Demostración.* La distribución $\mathcal{D}$ es diferenciable porque *grad* $H$ es diferenciable y no se anula sobre $U$. Probaremos que la distribución es involutiva. En efecto, para cada $X, Y \in \mathcal{D}$, $A\ grad\ H = -\frac{nH}{2} grad\ H$ implica que

$$\begin{array}{rcl} \nabla_Y(A\ grad\ H) & = & \nabla_Y\left(-\dfrac{nH}{2} grad\ H\right) \\ (\nabla_Y A) grad\ H + A(\nabla_Y grad\ H) & = & Y\left(-\dfrac{nH}{2}\right) grad\ H - \dfrac{nH}{2}\nabla_Y grad\ H \\ & = & -\dfrac{n}{2}(YH) grad\ H - \dfrac{nH}{2}\nabla_Y grad\ H \\ & = & -\dfrac{nH}{2}\nabla_Y grad\ H. \end{array}$$

Al multiplicar por $-1$ tenemos que

$$-(\nabla_Y A) grad\ H - A(\nabla_Y grad\ H) = \frac{nH}{2}\nabla_Y gradH.$$

Similarmente

$$-(\nabla_X A) grad\ H - A(\nabla_X grad\ H) = \frac{nH}{2}\nabla_X gradH.$$

Luego, al multiplicar la primera y la segunda de las dos expresiones anteriores por $X$ y $Y$, respectivamente, y restarlas, tenemos que,

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{nH}{2}\langle Y, \nabla_X grad\ H\rangle - \dfrac{nH}{2}\langle X, \nabla_Y grad\ H\rangle \\ = & -\langle Y, (\nabla_X A) grad\ H\rangle - \langle Y, A(\nabla_X grad\ H)\rangle \\ + & \langle X, (\nabla_Y A) grad\ H\rangle + \langle X, A(\nabla_Y grad\ H)\rangle \\ = & -\langle (\nabla_X A)Y, grad\ H\rangle - \langle AY, \nabla_X grad\ H\rangle \\ + & \langle (\nabla_Y A)X, grad\ H\rangle + \langle AX, \nabla_Y grad\ H\rangle \\ = & 0 \end{array}$$

pues el primer y el tercer término se cancelan en virtud de la ecuación de Codazzi y el segundo y cuarto término se cancelan en virtud del teorema 2.1.

Pero la resta anterior que se anula implica que

$$\langle Y, \nabla_X grad\ H\rangle - \langle X, \nabla_Y grad\ H\rangle = 0. \tag{2.1}$$

Por otra parte,

$$\langle X, grad\ H\rangle = 0 \qquad \& \qquad \langle Y, grad\ H\rangle = 0$$

implican que

$$\langle \nabla_Y X, grad\ H\rangle + \langle X, \nabla_Y grad\ H\rangle = 0 \qquad \& \qquad \langle \nabla_X Y, grad\ H\rangle + \langle Y, \nabla_X grad\ H\rangle = 0$$

Al restar estas dos fórmulas, usar la ecuación 2.1 y el hecho de que la conexión es libre de torsión, se sigue que $\langle [X,Y], grad\ H\rangle = 0$ y en consecuencia $[X,Y] \in \mathcal{D}$ como queríamos demostrar. □

**Corolario 2.12.** *Existe una foliación de $U$ por hipersuperficies integrales de $\mathcal{D}$.*

*Demostración.* En virtud del teorema de Frobenius existen variedades integrales de la distribución $\mathcal{D}$ que son una foliación de $U$. □

**Definición 2.13.** Sea $H_0$ una variedad integral de $\mathcal{D}$.

$H_0$ es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^{n+1}$ de codimensión 2 y su espacio normal es generado por $N$ y por $e_n$.

**Lema 2.14.** *El campo vectorial normal unitario $N \in \Gamma(TH_0^\perp)$ es paralelo en el haz normal $TH_0^\perp$ de $H_0$, es decir, para cada $X \in \Gamma(TH_0)$*

$$\nabla_X^\perp N = 0.$$

*Demostración.* Sea $X$ cualquier campo vectorial tangente a $H_0$. Luego $1 = \langle N, N\rangle$ implica $0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle D_X N, N\rangle$. Por lo tanto $D_X N$ es tangente a $M$.

Por otra parte

$$\langle AX, e_n\rangle = \langle X, Ae_n\rangle = \left\langle X, -\frac{nH}{2}e_n\right\rangle = -\frac{nH}{2}\langle X, e_n\rangle = 0.$$

Por lo tanto también $AX$ es un campo vectorial tangente de $H_0$ y en virtud de la definición del operador de forma $D_X N = -AX$ se sigue que $\langle D_X N, e_n\rangle = 0$. Como $T\mathbb{R}^{n+1} = TH_0 \oplus TH_0^{\perp}$ es la suma de Whitney de los haces $TH_0$ y $TH_0^{\perp}$ tenemos que

$$\begin{aligned} D_X N &= (D_X N)^{\top} + (D_X N)^{\perp} \\ &= \quad D_X N \quad + \quad 0 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\nabla_X^{\perp} N = (D_X N)^{\perp} = 0$ y en consecuencia $N$ es paralelo en el haz normal de $H_0$ porque $X$ fue arbitrario. □

**Lema 2.15.** *El campo vectorial unitario $e_n \in \Gamma(TH_0^{\perp})$ es paralelo en el haz normal $TH_0^{\perp}$ de $H_0$, es decir, para cada $X \in \Gamma(TH_0)$*

$$\nabla_X^{\perp} e_n = 0.$$

*Demostración.* Primero probaremos que $D_X e_n$ es tangente a $M$. En efecto, $0 = \langle e_n, N\rangle$ implica que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle e_n, N\rangle = \langle D_X e_n, N\rangle + \langle e_n, D_X N\rangle \\ &= \langle D_X e_n, N\rangle + \langle e_n, -AX\rangle \\ &= \langle D_X e_n, N\rangle. \end{aligned}$$

En segundo lugar probaremos que $D_X e_n$ es tangente a $H_0$. En efecto, $\langle e_n, e_n\rangle = |e_n|^2 = 1$ implica que

$$0 = X\langle e_n, e_n\rangle = 2\langle D_X e_n, e_n\rangle$$

lo cual a su vez implica que $0 = \langle D_X e_n, e_n\rangle$. Finalmente

$$\begin{aligned} D_X e_n &= (D_X e_n)^{\top} + (D_X e_n)^{\perp} \\ &= \quad D_X e_n \quad + \quad 0 \end{aligned}$$

y en consecuencia $\nabla_X^{\perp} e_n = (D_X e_n)^{\perp} = 0$ como queriamos demostrar. □

**Lema 2.16.** *Las variedades integrales de $\mathcal{D}$ tienen conexión normal plana, consideradas como subvariedades de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

*Demostración.* Probaremos que

$$R^{\perp} = 0.$$

En efecto, $\{e_n, N\}$ forma un marco local ortonormal del haz $TH_0^{\perp}$. Por lo tanto para cada $\xi \in \Gamma(TH_0^{\perp})$ existen únicas funciones $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(H_0)$ tales que

$$\xi = fe_n + gN.$$

Luego, para cada $X, Y \in \Gamma(TH_0)$,

$$\begin{aligned} R^{\perp}(X,Y)\xi &= R^{\perp}(X,Y)(fe_n + gN) \\ &= fR^{\perp}(X,Y)e_n + gR^{\perp}(X,Y)N \\ &= f(\nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y e_n - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X e_n - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} e_n) \\ &+ g(\nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y N - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X N - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} N) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia $R^{\perp} = 0$ y asi $H_0$ tiene conexión normal plana considerada como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. □

**Observación 2.17.** La curvatura media $H$ de $M$ es constante a lo largo de cada variedad integral $H_0$ de la distribución $\mathcal{D}$.

En efecto, para cada $X \in \Gamma(TH_0)$,

$$XH = \langle X, grad\ H \rangle = 0.$$

**Lema 2.18.** *$|grad\ H|$ es constante a lo largo de cada variedad integral de $\mathcal{D}$.*

*Demostración.* Por una parte $\nabla_{e_n} e_n = 0$ sobre $U$ implica que

$$\begin{aligned}
\nabla_{grad\ H} grad\ H &= \nabla_{|grad\ H| e_n}(|grad\ H| e_n) = |grad\ H| \nabla_{e_n}(|grad\ H| e_n) \\
&= |grad\ H|^2 \nabla_{e_n} e_n + |grad\ H| e_n(|grad\ H|) e_n \\
&= |grad\ H| e_n(|grad\ H|) e_n
\end{aligned}$$

sobre $U$. Observemos que

$$A(\nabla_{grad\ H} grad\ H) = A(|grad\ H| e_n(|grad\ H|) e_n) = -\frac{nH}{2} |grad\ H| e_n(|grad\ H|) e_n.$$

Sea $X$ un campo vectorial tangente a una variedad integral. Notemos que

$$\frac{1}{2} X(|grad\ H|^2) = \langle \nabla_X grad\ H, grad\ H \rangle. \tag{2.2}$$

Finalmente, en virtud del teorema 2.1 y de la ecuación 2.2 se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{nH}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} X(|grad\ H|^2)\right) = -\frac{nH}{2} \langle \nabla_X grad\ H, grad\ H \rangle \\
= &\ \langle \nabla_X grad\ H, A(grad\ H) \rangle = \langle \nabla_{grad\ H} grad\ H, AX \rangle \\
= &\ \langle A(\nabla_{grad\ H} grad\ H), X \rangle = -\frac{nH}{2} |grad\ H| e_n(|grad\ H|) \langle e_n, X \rangle \\
= &\ 0
\end{aligned}$$

y asi $|grad\ H|$ es constante sobre cada variedad integral de la distribución $\mathcal{D}$. □

**Definición 2.19.** Denotemos por $H_0$ una variedad integral de $\mathcal{D}$ sobre la cual la curvatura media $H$ tiene un valor constante.

**Lema 2.20.** *Si $\gamma(s)$ es una curva integral de $e_n$, entonces*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_s (H \circ \gamma) = |grad\ H|(\gamma(s)).$$

*Demostración.* Consideremos una curva integral $\gamma(s)$ de $e_n$. Para cada $s$,

$$\frac{d\gamma}{ds}(s) = \gamma'(s) = e_n(\gamma(s)).$$

Finalmente, en virtud del lema 2.8 se sigue que

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_s (H \circ \gamma) = (dH)_s \left(\frac{d\gamma}{ds}(s)\right) = \left.\frac{d\gamma}{ds}\right|_s H = e_n|_{\gamma(s)} H = |grad\ H|(\gamma(s)).$$

□

**Proposición 2.21.** *Cada variedad integral $H_0$ de $\mathcal{D}$ interseca a $\gamma(s)$ en a lo más un punto.*

*Demostración.* En efecto, si $H_0$ corta a $\gamma(s)$ en dos puntos $\gamma(s_1)$ y $\gamma(s_2)$, entonces en virtud de la observación 2.17, $H(\gamma(s_1)) = H(\gamma(s_2))$, pero por el lema 2.20 y un argumento de cálculo elemental existe $s_0$ entre $s_1$ y $s_2$ tal que

$$0 = \frac{d(H \circ \gamma)}{ds}(s_0) = |grad\ H|(\gamma(s_0))$$

lo cual contradice que $grad\ H$ no se anula sobre $U$. □

**Lema 2.22.** *Curvas integrales de $e_n$ que comienzan en puntos cercanos $p_1$ y $p_2$ son congruentes.*

*Demostración.* Sean $\gamma_1(s)$ y $\gamma_2(\bar{s})$ dos curvas integrales de $e_n$ que comienzan en $\gamma_1(0) = p_1 \in H_0$ y $\gamma_2(0) = p_2 \in H_0$ respectivamente. Existe una reparametrización $h$ de la curva $\gamma_2$ tal que $\bar{s} = h(s)$ con $h(0) = 0$ y $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y tal que para cada $s$, $\gamma_1(s)$ y $\gamma_2 \circ h(s)$ están en la misma variedad integral. Luego, en virtud de la observación 2.17 tenemos que para cada $s$,

$$H(\gamma_1(s)) = H(\gamma_2 \circ h(s)). \tag{2.3}$$

Derivando 2.3 con respecto a $s$ y teniendo en mente el lema 2.20 obtenemos que

$$|grad\ H|(\gamma_1(s)) = |grad\ H|(\gamma_2 \circ h(s))h'(s).$$

Como $\gamma_1(s)$ y $\gamma_2 \circ h(s)$ están en la misma variedad integral, en virtud del lema 2.18 resulta que

$$|grad\ H|(\gamma_1(s)) = |grad\ H|(\gamma_2 \circ h(s))$$

de donde se deduce que $h'(s) = 1$ para cada $s$ y por lo tanto $\bar{s} = h(s) = s$ para cada $s$. En consecuencia, si $p_1$ y $p_2$ son puntos cercanos, entonces las curvas integrales $\gamma_1(s)$ y $\gamma_2(\bar{s})$ tienen la misma parametrización (de esta manera tienen la misma rapidez unitaria y van atravesando las variedades integrales ortogonalmente y al mismo tiempo).

Como estas curvas son planas y tienen en correspondientes puntos la misma curvatura $-\frac{nH(\gamma_1(s))}{2}$, se sigue que son congruentes. $\square$

## 2.3. Parametrización local y fórmula de Rodrigues

Sea $U$ una vecindad de una $H$-hipersuperficie $M$ para la cual $grad\ H$ no se anula en ningún punto de $U$. Sea $H_0$ una variedad integral de la distribución $\mathcal{D}$ de $U$ y sean $e$ y $w$ respectivamente los campos vectoriales $e_n$ y $N$ restringidos a $H_0$. El objetivo de esta sección será deducir una parametrización local especial $y$ de $M$ sobre $U$ y encontrar las curvaturas principales de $y$ en términos de las curvaturas principales de una parametrización local $x$ de $H_0$.

Sea $p_0 \in H_0$ arbitrario y sea $\gamma(s)$ una curva integral de $e_n$ que comienza en $p_0$. Como se demostró en el teorema 2.9, la curvatura $k(s)$ de $\gamma(s)$ está dada por $k(s) = -\frac{n}{2}H(\gamma(s))$ para cada $s$. Más aún, $\gamma(s)$ está contenida en el plano generado por $e(p_0)$ y $w(p_0)$ porque $\gamma(s)$ es una curva plana.

**Observación 2.23.** Una curva $c(t) = (x(t), y(t))$ en $\mathbb{R}^2$ puede escribirse explícitamente en términos de su curvatura $k(t)$ como

$$c(t) = (x(t), y(t)) = \left( \int_0^t \cos\left( \int_0^a k(u)\ du \right) da, \int_0^t sen\ \left( \int_0^a k(u)\ du \right) da \right)$$

para cada $t$.

**Definición 2.24.** Sean

$$A(s)=\int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)\ du\right)\ dt \qquad B(s)=\int_0^s sen\ \left(\int_0^t k(u)\ du\right)\ dt\ . \tag{2.4}$$

**Observación 2.25.** La curva integral $\gamma$ de $e_n$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \gamma(0)+\left(\int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)\ du\right) dt\right) e(p_0)+\left(\int_0^s sen\ \left(\int_0^t k(u)\ du\right) dt\right) w(p_0)\\ &= \gamma(0)+A(s)e(p_0)+B(s)w(p_0)\end{aligned}$$

para cada $s$, donde $\gamma(0)=p_0$.

Escojamos coordenadas locales estándares $(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ y sea $x:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ una parametrización local de $H_0$ alrededor de $p_0$; luego $x(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ es el vector de posición de $H_0$ cerca de $p_0$. Como las curvas integrales cercanas de $e_n$ son congruentes, se sigue que existe una parametrización local $y$ de $M$ sobre $U$ alrededor de $p_0$ dada por

$$\begin{aligned}y(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1},s) &= x(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})\\ &+ \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^t k(u)\ du\right) dt\right) e(u_1,\cdots,u_{n-1})\\ &+ \left(\int_0^s sen\ \left(\int_0^t k(u)\ du\right) dt\right) w(u_1,\cdots,u_{n-1})\end{aligned}$$

donde $s\in(-\epsilon,\epsilon)$ y $k(s)$ es la curvatura de alguna curva integral arbitraria de $e_n$ que comienza en un punto arbitrario de $H_0$. Esto es,

$$y(u,s)=x(u)+A(s)e(u)+B(s)w(u) \tag{2.5}$$

donde $(u,s)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1},s)$. Por la teoría de curvas en el plano el campo vectorial normal unitario $N\in\Gamma(TM^{\perp})$ está dado por

$$N(u,s)=-B'(s)e(u)+A'(s)w(u). \tag{2.6}$$

donde la prima denota derivada respecto a $s$.

**Proposición 2.26.** *Para cualesquier campos vectoriales $\xi$ y $\eta$ normales a $H_0$, los operadores de forma $A_\xi$ y $A_\eta$ conmutan.*

*Demostración.* La ecuación 1.4, la ecuación de Ricci, dice que para cada $X, Y \in \Gamma(TH_0)$ y $\xi, \eta \in \Gamma(TH_0^\perp)$,

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.$$

Como $R^\perp = 0$ en virtud del lema 2.16, se sigue que para cualesquier $X, Y \in \Gamma(TH_0)$,

$$0 = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

lo cual implica que

$$0 = [A_\xi, A_\eta]X = A_\xi \circ A_\eta(X) - A_\eta \circ A_\xi(X)$$

para cada $X$. Luego, como $X$ es arbitrario, se sigue que

$$A_\xi \circ A_\eta = A_\eta \circ A_\xi,$$

es decir, $A_\xi$ y $A_\eta$ conmutan. $\square$

Un resultado de álgebra lineal afirma que siempre existe una base ortonormal común de vectores propios para cualesquier dos operadores lineales autoadjuntos que conmutan.

**Corolario 2.27.** *Existe una base ortonormal común $\{E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}\}$ de vectores propios para $A_{e(p_0)}$ y $A_{w(p_0)}$ y una parametrización local $x$ de $H_0$ tal que $p_0$ está en la imagen de $x$ y tal que para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$,*

$$x_{u_j}(u^0) := \frac{\partial x}{\partial u_j}(u^0) := \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}(u^0), \frac{\partial x_2}{\partial u_j}(u^0), \cdots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_j}(u^0)\right) = E_j$$

*donde $x(u^0) = p_0$.*

*Demostración.* En virtud de la proposición 2.26, existe una base ortonormal común $\{E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}\}$ de vectores propios del subespacio tangente $T_{p_0}H_0$ de $T_{p_0}\mathbb{R}^{n+1}$ para $A_{e(p_0)}$ y $A_{w(p_0)}$. Este subespacio está identificado con el espacio vectorial tangente abstracto $\widetilde{T_{p_0}H_0}$ via la identificación $di|_{p_0}\left(\widetilde{T_{p_0}H_0}\right) = T_{p_0}H_0$ con $i : H_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión y donde $H_0$ es vista como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$, sea $F_j := di|_{p_0}^{-1}(E_j)$. Como la inclusión es una inmersión isométrica, tenemos que $\{F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}\}$ es una base ortonormal para $\widetilde{T_{p_0}H_0}$.

La existencia de coordenadas normales asegura que existe una vecindad $U_{p_0}$ de $p_0$ sobre $H_0$ y una carta local

$$\varphi = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) : U_{p_0} \longrightarrow V$$

sobre $H_0$, con $V$ subconjunto abierto en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$F_j := \frac{\partial}{\partial y_j}(p_0).$$

Sea $u^0 := \varphi^{-1}(p_0)$. La aplicación $x : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida como $x = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) := i \circ \varphi^{-1}$ es una parametrización local de $H_0$ tal que $p_0$ está en la imagen de $x$ pues $x(u^0) = p_0$ y tal que el conjunto de derivadas parciales

$$x_{u_j}(u^0) := \frac{\partial x}{\partial u_j}(u^0) := \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}(u^0), \frac{\partial x_2}{\partial u_j}(u^0), \cdots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_j}(u^0)\right)$$

con $j = 1, 2, \cdots, n-1$ forma la base ortonormal común de vectores propios de $T_{p_0}H_0$ para $A_{e(p_0)}$ y $A_{w(p_0)}$.

Por una parte, si $(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ son las coordenadas estándares de $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, entonces para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$dx|_{u^0}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(u^0)\right) = di|_{p_0}\left(d\varphi^{-1}|_{u^0}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(u^0)\right)\right) = di|_{p_0}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(p_0)\right) = di|_{p_0}(F_j) = E_j,$$

mientras que por otra parte, si $(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1})$ son las coordenadas estándares de $\mathbb{R}^{n+1}$ e identificamos $T_{p_0}\mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$dx|_{u^0}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(u^0)\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u^0)\frac{\partial}{\partial t_j}(p_0) \leftrightarrow \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}(u^0), \frac{\partial x_2}{\partial u_j}(u^0), \cdots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_j}(u^0)\right).$$

$\square$

**Observación 2.28.** En virtud de la definición de conexión euclidiana $D$ se satisface que para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$w_{u_j}(u^0) = D_{x_{u_j}(u^0)}w \quad \& \quad e_{u_j}(u^0) = D_{x_{u_j}(u^0)}e$$

$$N_{u_j}(u^0, s) = D_{y_{u_j}(u^0,s)}N \quad \& \quad N_s(u^0, s) = D_{y_s(u^0,s)}N. \tag{2.7}$$

**Teorema 2.29.** *(Fórmula de Rodrigues) Con las parametrizaciones locales $y$ y $x$ elegidas como en la ecuación 2.5 y en el corolario 2.27 respectivamente, las curvaturas principales $k_j(u^0, s)$ de $y$ asociadas a $A = A_N$ en términos de las curvaturas principales $\alpha_j(u^0)$ y $\beta_j(u^0)$ de $x$ asociadas a $A_{e(p_0)}$ y $A_{w(p_0)}$ respectivamente, en el punto $y(u^0, s)$, están dadas por*

$$k_j(u^0, s) \quad = \quad \frac{A'(s)\beta_j(u^0) - B'(s)\alpha_j(u^0)}{1 - A(s)\alpha_j(u^0) - B(s)\beta_j(u^0)}$$

*para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$ y*

$$k_n(u^0, s) = k(s).$$

*Demostración.* En virtud de los lemas 2.14 y 2.15 se sigue que $e_{u_j}(u^0), w_{u_j}(u^0), N_{u_j}(u^0, s)$ y $N_s(u^0, s)$ son vectores tangentes a $H_0$. Además, por el corolario 2.27, para cada $j = 1, 2, \cdots, n-1$ existen únicos números reales $\alpha_j = \alpha_j(u^0)$ y $\beta_j = \beta_j(u^0)$ (que dependen de $u^0$), tales que

$$\begin{aligned} e_{u_j}(u^0) &= D_{x_{u_j}(u^0)}e = -A_{e(p_0)}(x_{u_j}(u^0)) = -\alpha_j x_{u_j}(u^0) \\ w_{u_j}(u^0) &= D_{x_{u_j}(u^0)}w = -A_{w(p_0)}(x_{u_j}(u^0)) = -\beta_j x_{u_j}(u^0) \end{aligned}$$

donde cada $\alpha_j$ y $\beta_j$ son las curvaturas principales (ie, los valores propios) asociadas a las direcciones principales (ie, los vectores propios) $x_{u_j}(u^0)$ de los operadores de forma $A_{e(p_0)}$ y $A_{w(p_0)}$ respectivamente.

Al derivar parcialmente la ecuación 2.5 respecto a $u_j$ y evaluar en el punto $(u^0, s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} y_{u_j}(u^0, s) &= x_{u_j}(u^0) + A(s)e_{u_j}(u^0) + B(s)w_{u_j}(u^0) \\ &= x_{u_j}(u^0) + A(s)\alpha_j x_{u_j}(u^0) + B(s)\beta_j x_{u_j}(u^0) \\ &= x_{u_j}(u^0)[1 - A(s)\alpha_j - B(s)\beta_j]. \end{aligned}$$

Al despejar $x_{u_j}(u^0)$ resulta

$$x_{u_j}(u^0) = \frac{y_{u_j}(u^0, s)}{1 - A(s)\alpha_j - B(s)\beta_j}.$$

Por otra parte, al derivar parcialmente la ecuación 2.6 respecto a $u_j$ y evaluar en el punto $(u^0, s)$ tenemos

$$\begin{aligned} N_{u_j}(u^0, s) &= -B'(s)e_{u_j}(u^0) + A'(s)w_{u_j}(u^0) \\ &= x_{u_j}(u^0)[B'(s)\alpha_j - A'(s)\beta_j], \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{N_{u_j}(u^0, s)}{B'(s)\alpha_j - A'(s)\beta_j} = x_{u_j}(u^0) = \frac{y_{u_j}(u^0, s)}{1 - A(s)\alpha_j - B(s)\beta_j},$$

de donde se sigue que

$$N_{u_j}(u^0, s) = \frac{B'(s)\alpha_j - A'(s)\beta_j}{1 - A(s)\alpha_j - B(s)\beta_j} y_{u_j}(u^0, s).$$

Por otro lado, derivando parcialmente la ecuación 2.5 con respecto a $s$ y evaluando en el punto $(u^0, s)$ resulta

$$y_s(u^0, s) = A'(s)e(u^0) + B'(s)w(u^0).$$

Haciendo lo mismo para la ecuación 2.6 tenemos que

$$N_s(u^0, s) = -k(s)[A'(s)e(u^0) + B'(s)w(u^0)] = -k(s)y_s(u^0, s)$$

por la teoría de curvas en el plano euclidiano.

En virtud de las ecuaciones 2.7 se sigue que

$$-A(y_{u_j}(u^0,s)) = \frac{B'(s)\alpha_j - A'(s)\beta_j}{1 - A(s)\alpha_j - B(s)\beta_j} y_{u_j}(u^0,s) \quad \& \quad -A(y_s(u^0,s)) = -k(s)y_s(u^0,s).$$

En consecuencia, el vector $y_{u_j}(u^0,s)$ está en una dirección principal de $y$ con correspondiente curvatura principal en el punto $y(u^0,s)$ dada por

$$k_j(u^0,s) = \frac{A'(s)\beta_j(u^0) - B'(s)\alpha_j(u^0)}{1 - A(s)\alpha_j(u^0) - B(s)\beta_j(u^0)}$$

y $y_s(u^0,s)$ también es una dirección principal con curvatura principal en el punto $y(u^0,s)$ dada por

$$k_n(u^0,s) = k(s),$$

las cuales son conocidas como fórmulas de Rodrigues. □

**Corolario 2.30.** *Localmente, las curvaturas principales de $A$ están dadas por la fórmula*

$$k_j = \frac{A'\beta_j - B'\alpha_j}{1 - A\alpha_j - B\beta_j}$$

*y por*

$$k_n = k.$$

*Demostración.* En la fórmula de Rodrigues, las curvaturas principales $\alpha_j(u^0)$ y $\beta_j(u^0)$ (de $A_{e(p_0)}$ y $A_{w(p_0)}$ respectivamente), dependen de $u^0$ pero no dependen de las direcciones principales $x_{u_j}(u^0)$ y en consecuencia no dependen de la parametrización local $x$. Repitiendo el mismo argumento, las curvaturas principales $k_j(u^0,s)$ y $k_n(u^0,s)$ de $A$ dependen de $(u^0,s)$ pero no dependen de las direcciones principales $y_{u_j}(u^0,s)$ y $y_s(u^0,s)$ y en consecuencia no dependen de las parametrizaciones locales $y$ ni $x$.

Por lo tanto en la fórmula de Rodrigues podemos cambiar el punto $u^0$ por otro punto arbitrario $u$ que esté en el dominio $V$ de cualquier parametrización local $x$ de $H_0$ y tomar la parametrización local $y$ de $U$ como en la ecuación 2.5, quedando las fórmulas de Rodrigues como funciones de $u$ y de $s$.

En consecuencia podemos simplemente decir que el vector $y_{u_j}(u,s)$ está en una dirección principal de $A$ con correspondiente curvatura principal en el punto $y(u,s)$ dada por

$$k_j(u,s) = \frac{A'(s)\beta_j(u) - B'(s)\alpha_j(u)}{1 - A(s)\alpha_j(u) - B(s)\beta_j(u)}$$

y $y_s(u,s)$ también es una dirección principal con curvatura principal en el punto $y(u,s)$ dada por

$$k_n(u,s) = k(s).$$

$\square$

# Capítulo 3

# H-hipersuperficies en $\mathbb{R}^4$

Teniendo en mente la definición 1.40, en este capítulo investigaremos $H$-hipersuperficies en $\mathbb{R}^4$ y para esto usaremos la notación y la teoría general sobre $H$-hipersuperficies del capítulo dos.

Sea $M$ una $H$-hipersuperficie de $\mathbb{R}^4$ y sean

$$M_0 = \{p \in M \ \ | \ \ (H\ grad\ H)(p) = 0\}$$

$$M_1 = M \setminus M_0.$$

Si $M_1$ es vacío, entonces $M = M_0$ tiene curvatura media constante. En efecto, sea $p \in M$. Tenemos que $H(p) grad\ H|_p = 0$ implica que $H(p) = 0$ ó $grad\ H|_p = 0$. Afirmamos que $grad\ H|_p = 0$. En efecto, en caso contrario, por continuidad existe una vecindad $G$ de $p$ tal que $grad\ H$ no se anula sobre $G$. Pero entonces para cualquier $q \in G$, $H(q) = 0$, lo cual implica que $grad\ H|_G = 0$, lo cual es una contradicción. En consecuencia para cada $p \in M$, $grad\ H|_p = 0$ y así $H$ es constante.

De ahora en adelante asumiremos que $M_1$ es no vacío. Por un resultado de álgebra lineal, que se puede consultar en [14], todo operador lineal autoadjunto tiene una base consistente de vectores propios. Con esta suposición tenemos solo tres posibilidades para las curvaturas principales de $M_1$, a saber, existe un subconjunto abierto con sus tres curvaturas principales iguales, dos curvaturas principales distintas o con tres curvaturas principales distintas. En virtud de la definición 1.40, sobre $M_1$, *grad* $H$ es un vector propio del operador de forma $A$ con valor propio $k_3 := -\frac{3H}{2}$.

Si las curvaturas principales son iguales, entonces $3H = k_1 + k_2 + k_3 = 3k_3 = 3(-\frac{3H}{2})$ y en consecuencia $H = 0$, lo cual es una contradicción.

## 3.1. Hipersuperficies con dos curvaturas principales iguales

Asumiremos que $U$ es una componente conexa no vacía de $M_1$ con dos curvaturas principales distintas. Distinguiremos dos casos: el primero es que las curvaturas principales sean

$$k_3 = -\frac{3H}{2} \qquad \& \qquad k_2 = k_1 = \frac{9H}{4}.$$

El segundo caso es

$$k_3 = k_2 = -\frac{3H}{2} \qquad \& \qquad k_1 = 6H.$$

Probaremos que el segundo caso no puede ocurrir.

**Definición 3.1.** Sean $E_{k_1} := \bigcup_{p \in M} E_{k_1(p)}$ y $E_{k_3} := \bigcup_{p \in M} E_{k_3(p)}$ los haces de espacio propio de $A$ y sea $M_A$ el conjunto de puntos $p$ de $M$ tales que en una vecindad de $p$, el operador de forma $A$ tiene funciones de valor propio diferenciables de multiplicidades constantes.

**Observación 3.2.** La componente conexa $U$ está contenida en $M_A$ y el haz tangente $TM$ es la suma de Whitney de los subhaces $E_{k_1}$ y $E_{k_3}$, es decir, $TM = E_{k_1} \oplus E_{k_3}$.

**Teorema 3.3.** *El espacio propio $E_{k_3}$ es un subhaz de $TM$ sobre $M$.*

*Demostración.* Un teorema que puede encontrarse en [1], afirma que si $f : E \to F$ es una aplicación de haces vectoriales sobre $X$ y $rank\ (f_x : E_x \to F_x) = c$ es constante para cada $x \in X$, entonces $\ker f := \bigcup_{x\in X} \ker f_x$ es un subhaz de $E$ sobre $X$. Usaremos este resultado a continuación.

La aplicación $A - k_3 : TM \to TM$ dada por

$$(A - k_3)(X_q) := A(X_q) - k_3(q)(X_q),$$

es una aplicación diferenciable de haces vectoriales sobre $M$ tal que $rank\ ((A - k_3)_q : T_qM \to T_qM)$ es constante para cada $q \in M$.

Por la observación 3.2, $\dim E_{k_1(p)}$ es constante para cada $p \in M$. Además, $A - k_3$ puede escribirse como la composición $\varphi \circ \pi_1$ donde $\pi_1 : TM \to E_{k_1}$ es la proyección sobre el primer factor de la suma de Whitney y $\varphi : E_{k_1} \to E_{k_1}$ es el isomorfismo de haces $\varphi(y) := (k_1 - k_3)y$. En efecto, si $X_p = X_p^1 + X_p^2 \in TM = E_{k_1} \oplus E_{k_3}$, entonces

$$\begin{aligned} (A - k_3)(X_p) &= A(X_p^1 + X_p^2) - k_3(p)(X_p^1 + X_p^2) = A(X_p^1) + A(X_p^2) \\ &\quad -k_3(p)X_p^1 - k_3(p)X_p^2 = k_1(p)X_p^1 + k_3(p)X_p^2 - k_3(p)X_p^1 - k_3(p)X_p^2 \\ &= (k_1 - k_3)(p)X_p^1 = \varphi(X_p^1) = \varphi(\pi_1(X_p^1 + X_p^2)). \end{aligned}$$

Luego, para cada $q \in M$ tenemos

$$(A - k_3)_q(T_qM) = (\varphi \circ \pi_1)_q(T_qM) = \varphi_q(E_{k_1(q)}) = E_{k_1(q)}.$$

Por lo tanto

$$rank\ (A - k_3)_q = \dim(A - k_3)_q(T_qM) = \dim(E_{k_1(q)})$$

es constante en cada punto $q \in M$. Si $q \in M$ es arbitrario, se sigue que $X_q \in \ker(A - k_3)_q$ si, y solo si $0 = A(X_q) - k_3(q)(X_q)$ si, y solo si $A(X_q) = k_3(q)(X_q)$ si, y solo si $X_q \in E_{k_3(q)}$. Finalmente al aplicar el resultado mencionado,

$$E_{k_3} = \bigcup_{p\in M} E_{k_3(p)} = \bigcup_{p\in M} \ker(A - k_3)_p$$

es un subhaz vectorial sobre $M$. $\square$

**Definición 3.4.** (Tensor de Codazzi). Un $(0,2)$-campo tensorial simétrico $b$ sobre una variedad riemanniana $(M, \langle,\rangle, \nabla)$ se conoce como tensor de Codazzi si

$$(\nabla_X b)(Y,Z) = (\nabla_Y b)(X,Z). \tag{3.1}$$

Al operador autoadjunto $A$ asociado a $b$ tal que $b(Y,Z) = \langle AY, Z\rangle$ también se le conoce como tensor de Codazzi. El conjunto $M_A$ se define de manera similar a como se mencionó en la definición 3.1.

**Lema 3.5.** *La forma bilineal simétrica $b : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ dada por $b(Y,Z) := \langle \alpha(Y,Z), N\rangle$ es un tensor de Codazzi.*

*Demostración.* Usando la identidad $\langle \alpha(Y,Z), N\rangle = \langle AY, Z\rangle$ y la ecuación de Codazzi 1.8, se sigue que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X b)(Y,Z) &= X(b(Y,Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z)\\
&= [\langle \nabla_X(AY), Z\rangle + \langle AY, \nabla_X Z\rangle] - \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle AY, \nabla_X Z\rangle\\
&= \langle (\nabla_X A)(Y), Z\rangle = \langle (\nabla_Y A)(X), Z\rangle\\
&= (\nabla_Y b)(X,Z).
\end{aligned}$$

Luego $b$ satisface la condición de la ecuación 3.1. $\square$

Un resultado de A.Derdzinski ([13], Teorema 1.3 (ii)), afirma que si $A$ es un tensor de Codazzi sobre una variedad riemanniana $M$, entonces en cada componente conexa de $M$ cada función de valor propio $k$ de multiplicidad estrictamente mayor que uno es constante a lo largo del haz de espacio propio asociado $E_k$. Al aplicar este resultado a nuestro caso particular se sigue que el valor propio $k_3$ debería ser constante a lo largo del correspondiente haz de espacio propio $E_{k_3}$ porque es de multiplicidad dos. Por lo tanto $0 = e_3(k_3) = e_3(-\frac{3H}{2}) = -\frac{3}{2}e_3(H)$ y en consecuencia $e_3(H) = 0$, lo cual es una contradicción. Ahora examinaremos el primer caso.

**Proposición 3.6.** *La hipersuperficie $U$ es una hipersuperficie rotacional en $\mathbb{R}^4$, con curvatura media no constante, generada por una curva de rapidez unitaria $(f(s), g(s))$ donde $f$ satisface*

$$3ff'' = 2(1 - (f')^2).$$

*Más aún, la curvatura media $H$ de $U$ satisface*

$$(H')^2 = cH^{\frac{16}{5}} - \frac{225}{16}H^4 \tag{3.2}$$

*donde la prima denota diferenciación con respecto a la longitud de arco $s$ y $c$ es un número real positivo constante.*

*Demostración.* Por hipótesis las curvaturas principales sobre $U$ son

$$k_3 = -\frac{3H}{2} \qquad \& \qquad k_2 = k_1 = \frac{9H}{4}. \tag{3.3}$$

Un teorema de M. Do Carmo y M. Dajczer ([2], Teorema (4.2)) afirma lo siguiente: sea $\overline{M}^{n+1}(c)$ una variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante $c$ y sea $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, con $n \geq 3$, una hipersuperficie arbitraria. Si las curvaturas principales $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ de $f$ satisfacen $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = -\lambda \neq 0$ y $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$, con $\lambda - \mu \neq 0$, entonces $f(M^n)$ está contenida en una hipersuperficie rotacional.

Apliquemos este resultado en la demostración del presente teorema. En efecto, sea $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^4$. Por otra parte, como $U \subseteq M_1$, se sigue que $H$ no se anula sobre $U$. Por lo tanto $k_1 = k_2 = -\lambda = \frac{9H}{4} \neq 0$ y $k_3 = -\mu = -\frac{3H}{2} \neq 0$ donde $\lambda - \mu \neq 0$. En consecuencia $U$ está contenido en una hipersuperficie rotacional en $\mathbb{R}^4$.

Por medio de un movimiento rígido podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$x(s,\vec{\theta}) = f(s)\vec{\theta} + g(s)\vec{\varepsilon}$$

es una parametrización local de $U$, donde $f(s) > 0$, $(f')^2 + (g')^2 = 1$, $\vec{\theta}$ es el vector de posición de la 2-esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ y $\vec{\varepsilon}$ es un vector unitario sobre el eje de rotación.

Como $\vec{\theta}$ es el vector de posición de $\mathbb{S}^2$, sobre dominios apropiados $C \subseteq \mathbb{R} \times (0,\pi)$ la función $\vec{\theta} : C \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{\theta}(\theta,t) = (sen\ t\cos\theta, sen\ tsen\ \theta, \cos t)$ resulta ser una parametrización local de $\mathbb{S}^2$. Por lo tanto la parametrización local $x$ se puede escribir como

$$x(s,\theta,t) = f(s)(sen\ t\cos\theta, sen\ tsen\ \theta, \cos t) + g(s)\vec{\varepsilon}.$$

Más aún, si elegimos a $\vec{\varepsilon}$ como el vector unitario estándar $(0,0,0,1)$ de $\mathbb{R}^4$, entonces $x$ se puede escribir explícitamente como

$$x(s,\theta,t) = (f(s)sen\ t\cos\theta, f(s)sen\ tsen\ \theta, f(s)\cos t, g(s)).$$

Con esta parametrización local de $U$ y usando la fórmula de Rodrigues podemos calcular las curvaturas principales de $U$ en términos de $f$ y $g$ siguiendo el mismo procedimiento utilizado para la obtención de las ecuaciones 3.28 y 3.34 de las proposiciones 3.17 y 3.18. Estas son

$$k_3 = \frac{g''}{f'} \qquad \& \qquad k_2 = k_1 = \frac{g'}{f}.$$

Luego, en vista de la ecuación 3.3 obtenemos

$$\frac{g''}{f'} = -\frac{3H}{2} \qquad \& \qquad \frac{g'}{f} = \frac{9H}{4}. \tag{3.4}$$

Las dos ecuaciones anteriores implican que

$$3ff'' = 1 - (f')^2.$$

En efecto, como la curva $(f(s), g(s))$ es de rapidez unitaria, se sigue que $(f')^2 + (g')^2 = 1$ y $f'f'' + g'g'' = 0$. Por 3.4 tenemos $f'' = -g'\frac{g''}{f'} = -g'(-\frac{3H}{2})$; lo cual implica

$$3ff'' = 2g'\left(f\frac{9H}{4}\right) = 2(g')^2 = 2(1 - (f')^2)$$

como deseábamos probar. Por otro lado, como $\frac{g'}{f} = \frac{9H}{4} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{3H}{2}\right) = -\frac{3}{2}\frac{g''}{f'}$, se sigue que

$$2f'g' = -3fg''. \tag{3.5}$$

Por una parte

$$\left[\left(\frac{g'}{f}\right)^{-1}\right]' = \left(\frac{4}{9H}\right)' = -\frac{4}{9}\frac{H'}{H^2}$$

mientras que por otra parte

$$\left[\left(\frac{g'}{f}\right)^{-1}\right]' = \left(\frac{f}{g'}\right)' = \frac{f'g' - fg''}{(g')^2} = \frac{\frac{5}{3}f'g'}{(g')^2}$$

en virtud de la ecuación 3.5. Como

$$-\frac{4}{9}\frac{H'}{H^2} = \frac{\frac{5}{3}f'g'}{(g')^2},$$

resulta que

$$-\frac{H'}{H} = \frac{9H}{4}\left(\frac{\frac{5}{3}f'g'}{(g')^2}\right) = \frac{g'}{f}\left(\frac{\frac{5}{3}f'g'}{(g')^2}\right) = \frac{5}{3}\frac{f'}{f},$$

de donde se sigue que

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3H'}{5H}. \tag{3.6}$$

En virtud de la regla de la cadena tenemos que

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = -\frac{3}{5}(\ln H)'.$$

Integrando con respecto a $s$ resulta que

$$\ln f = -\frac{3}{5}\ln H + c_1 = -\frac{3}{5}\ln H + \ln c_2$$

con $c_1$ y $c_2$ constantes apropiadas tales que $c_1 = \ln c_2$. Luego, por las propiedades de la función logaritmo natural $\ln f = \ln(c_2 H^{-\frac{3}{5}})$, lo cual implica que

$$f = c_2 H^{-\frac{3}{5}}. \tag{3.7}$$

Derivando directamente con respecto a $s$ resulta

$$f' = -\frac{3c_2}{5}H^{-\frac{8}{5}}H'. \tag{3.8}$$

Mientras que usando las ecuaciones 3.4 y 3.7 obtenemos que

$$g' = \frac{9H}{4}f = \frac{9H}{4}(c_2H^{-\frac{3}{5}}) = \frac{9c_2}{4}H^{\frac{2}{5}}. \tag{3.9}$$

Al usar las fórmulas 3.8 y 3.9 para $g'$ y $f'$ y la identidad $(f')^2 + (g')^2 = 1$, resulta que

$$1 = (f')^2 + (g')^2 = \frac{9c_2^2}{25}H^{-\frac{16}{5}}(H')^2 + \frac{81}{16}c_2^2H^{\frac{4}{5}}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
(H')^2 &= \frac{1 - \frac{81}{16}c_2^2H^{\frac{4}{5}}}{\frac{9}{25}c_2^2H^{-\frac{16}{5}}} = \frac{\frac{16-81c_2^2H^{\frac{4}{5}}}{16}}{\frac{9c_2^2H^{-\frac{16}{5}}}{25}} \\
&= \frac{25(16 - 81c_2^2H^{\frac{4}{5}})}{16 \cdot 9c_2^2H^{-\frac{16}{5}}} \\
&= \left(\frac{25}{9c_2^2}\right)H^{\frac{16}{5}} - \frac{225}{16}H^4 \\
&= cH^{\frac{16}{5}} - \frac{225}{16}H^4
\end{aligned}$$

donde $c := (\frac{25}{9c_2^2})$, como queríamos demostrar. $\square$

## 3.2. Hipersuperficies con tres curvaturas principales distintas

De ahora en adelante denotaremos por $V$ a una componente conexa no vacía de $M_1$ con tres distintas curvaturas principales. Consideremos el marco ortonormal $e_1, e_2, e_3$ de vectores principales en $V$ (con $e_3$ paralelo a $grad\ H$, digamos $grad\ H = fe_3$ para alguna $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$) con correspondientes curvaturas principales $k_1, k_2, k_3$ y $k_3 = -\frac{3H}{2}$. Sea $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ el comarco dual y $\omega_{ij}$ las formas de conexión asociadas a $e_1, e_2, e_3$.

### 3.2.1. Formas de conexión

**Lema 3.7.** *Las formas de conexión están dadas por*

$$\omega_{13} = \omega_{13}(e_1)\omega_1, \quad \omega_{23} = \omega_{23}(e_2)\omega_2, \quad \omega_{12} = \omega_{12}(e_1)\omega_1 + \omega_{12}(e_2)\omega_2.$$

*Más aún, $e_1$ y $e_2$ son paralelos en $\mathbb{R}^4$ a lo largo de las curvas integrales de $e_3$.*

*Demostración.* Encontremos todos los valores de $\omega_{ij}$. En efecto, en virtud de la definición 1.33 y del teorema 2.9 tenemos que $\omega_{13}(e_3) = -\omega_{31}(e_3) = -\omega_1(D_{e_3}e_3) = -\omega_1(\nabla_{e_3}e_3) = 0$ porque $\nabla_{e_3}e_3 = 0$. De manera similar $\omega_{32}(e_3) = \omega_2(D_{e_3}e_3) = \omega_2(\nabla_{e_3}e_3) = 0$. Aplicaremos el teorema 2.1 para el caso particular en que $X = e_1$ y $Y = e_2$. Pero antes recordemos que *grad* $H$ y $e_3$ son ortogonales a $e_1$ y $e_2$, esto es, $\langle e_1, grad\ H\rangle = 0 = \langle e_2, grad\ H\rangle$. También recordemos que como la distribución $\mathcal{D}$ es involutiva, se sigue que $[e_1, e_2] \in \mathcal{D}$ pues $e_1, e_2 \in \mathcal{D}$. Luego

$$\begin{aligned}
k_2\langle e_2, \nabla_{e_1} grad\ H\rangle &= \langle Ae_2, \nabla_{e_1} grad\ H\rangle = \langle Ae_1, \nabla_{e_2} grad\ H\rangle = k_1\langle e_1, \nabla_{e_2} grad\ H\rangle \\
&= -k_1\langle \nabla_{e_2} e_1, grad\ H\rangle \\
&= -k_1\langle \nabla_{e_1} e_2, grad\ H\rangle - k_1\langle [e_2, e_1], grad\ H\rangle \\
&= k_1\langle e_2, \nabla_{e_1} grad\ H\rangle
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $(k_1 - k_2)\langle e_2, \nabla_{e_1} grad\ H\rangle = 0$. Lo cual implica que

$$\begin{aligned}
0 &= \langle e_2, \nabla_{e_1} grad\ H\rangle = \omega_2(\nabla_{e_1} f e_3) = \omega_2(e_1(f)e_3 + f\nabla_{e_1} e_3) \\
&= \omega_2(e_1(f)e_3) + f\omega_2(\nabla_{e_1} e_3) = f\omega_2(D_{e_1} e_3) = f\omega_{32}(e_1)
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\omega_{32}(e_1) = 0$ porque $f$ no se anula en ningún punto. Análogamente

$$\begin{aligned}
0 &= \langle e_2, \nabla_{e_1} grad\ H\rangle = -\langle \nabla_{e_1} e_2, grad\ H\rangle = -\langle \nabla_{e_2} e_1 + [e_1, e_2], grad\ H\rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_2} e_1, grad\ H\rangle = -f\langle \nabla_{e_2} e_1, e_3\rangle = f\langle \nabla_{e_2} e_3, e_1\rangle = f\omega_1(\nabla_{e_2} e_3) \\
&= f\omega_{31}(e_2) = -f\omega_{13}(e_2)
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\omega_{13}(e_2) = 0$. Por el otro lado, probaremos que la ecuación de Codazzi implica que

$$(k_1 - k_2)\omega_{12}(e_3) = (k_3 - k_2)\omega_{32}(e_1).$$

En efecto, en primer lugar

$$\begin{aligned}\langle A(D_{e_3}e_1), e_2\rangle &= \langle D_{e_3}e_1, Ae_2\rangle = k_2\langle D_{e_3}e_1, e_2\rangle = k_2\omega_2(D_{e_3}e_1)\\ &= k_2\omega_{12}(e_3)\end{aligned}$$

y similarmente, en segundo lugar

$$\begin{aligned}\langle A(D_{e_1}e_3), e_2\rangle &= \langle D_{e_1}e_3, Ae_2\rangle = k_2\langle D_{e_1}e_3, e_2\rangle = k_2\omega_2(D_{e_1}e_3)\\ &= k_2\omega_{32}(e_1).\end{aligned}$$

En tercer lugar

$$\begin{aligned}k_1\omega_{12}(e_3) &= k_1\omega_2(D_{e_3}e_1) = k_1\langle D_{e_3}e_1, e_2\rangle = -k_1\langle e_1, D_{e_3}e_2\rangle\\ &= -\langle Ae_1, D_{e_3}e_2\rangle = \langle D_{e_3}(Ae_1), e_2\rangle = \langle \nabla_{e_3}(Ae_1), e_2\rangle\\ &= \langle(\nabla_{e_3}A)e_1, e_2\rangle + \langle A(\nabla_{e_3}e_1), e_2\rangle = \langle(\nabla_{e_3}A)e_1, e_2\rangle + k_2\omega_{12}(e_3).\end{aligned}$$

Finalmente, en virtud de la ecuación de Codazzi tenemos que

$$\begin{aligned}(k_1 - k_2)\omega_{12}(e_3) &= \langle(\nabla_{e_3}A)e_1, e_2\rangle = \langle(\nabla_{e_1}A)e_3, e_2\rangle\\ &= \langle\nabla_{e_1}(Ae_3), e_2\rangle - \langle A(\nabla_{e_1}e_3), e_2\rangle = -\langle\nabla_{e_1}e_2, Ae_3\rangle - k_2\omega_{32}(e_1)\\ &= -k_3\omega_{23}(e_1) - k_2\omega_{32}(e_1) = k_3\omega_{32}(e_1) - k_2\omega_{32}(e_1)\\ &= (k_3 - k_2)\omega_{32}(e_1)\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\omega_{12}(e_3) = 0.$$

En virtud de los valores de las formas de conexión que hemos encontrado, de la observación 1.34 y del teorema 1.35 resulta que

$$\begin{aligned} D_{e_3}e_1 &= \sum_{i=1}^{4}\omega_{1i}(e_3)e_i \\ &= \omega_{11}(e_3)e_1 + \omega_{12}(e_3)e_2 + \omega_{13}(e_3)e_3 + \omega_{14}(e_3)e_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $\omega_{11} = 0$ porque las formas de conexión son antisimétricas y donde

$$\omega_{14}(e_3) \;=\; h_{11}\omega_1(e_3) + h_{12}\omega_2(e_3) + h_{13}\omega_3(e_3) = 0$$

pues $h_{13} = \langle Ae_1, e_3\rangle = 0$. Haciendo exactamente el mismo cálculo encontramos que $D_{e_3}e_2 = 0$.

Finalmente, si $\gamma$ es una curva integral de $e_3$, entonces para cada $t$,

$$\overline{D}_t(e_1 \circ \gamma)(t) = D_{\gamma'(t)}e_1 = D_{e_3(\gamma(t))}e_1 = (D_{e_3}e_1)(\gamma(t)) = 0.$$

Análogamente $\overline{D}_t(e_2 \circ \gamma)(t) = 0$ y en consecuencia $e_1$ y $e_2$ son paralelos a lo largo de curvas integrales de $e_3$. □

### 3.2.2. Operadores de forma de superficies integrales

**Definición 3.8.** Sea $H_0$ una superficie integral de la distribución $\mathcal{D}$ en $V$. Denotemos por $\alpha$ y $\beta$ los valores propios de $A_w$ y por $\gamma$ y $\delta$ los valores propios de $A_e$.

**Lema 3.9.** *De la ecuación 2.4 obtenemos*

$$A(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad A'(0) = \cos(0) = 1,$$

$$B'(0) = sen\ (0) = 0, \quad A^{(2)}(0) = 0, \quad B^{(2)}(0) = k(0),$$

$$A^{(3)}(0) = -k^2(0), \quad B^{(3)}(0) = k'(0),$$

$$A^{(4)}(0) = -2k'(0)k(0) - k'(0)k(0) = -3k'(0)k(0),$$

$$B^{(4)}(0) = -k^3(0) + k''(0).$$

*Demostración.* En virtud de la definición de $A(s)$ y $B(s)$ y del teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$A'(s) = \cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right) \qquad \& \qquad B'(s) = sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right),$$

$$A^{(2)}(s) = -k(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right) \qquad \& \qquad B^{(2)}(s) = k(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right),$$

$$A^{(3)}(s) \;\; = \;\; -k^2(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right) - k'(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right),$$

$$B^{(3)}(s) = -k^2(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right) + k'(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right),$$

$$\begin{aligned} A^{(4)}(s) \;\; &= \;\; -2k(s)k'(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right) + k^3(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right) \\ &\quad -k''(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right) - k'(s)k(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(4)}(s) \;\; &= \;\; -2k(s)k'(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right) - k^3(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right) \\ &\quad +k''(s)\cos\left(\int_0^s k(u)\ du\right) - k'(s)k(s) sen\ \left(\int_0^s k(u)\ du\right). \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor $s = 0$, entonces obtenemos lo que queremos probar. $\square$

El corolario 2.30 de la fórmula de Rodrigues nos dice que localmente las curvaturas principales $k_1, k_2, \cdots, k_n$ de $V$ asociadas al operador de forma $A$ dependen de las curvaturas principales $\alpha_j$ y $\beta_j$ de $H_0$ asociadas a $A_e$ y $A_w$ respectivamente. En el caso particular de nuestra $H$-hipersuperficie $V$ de $\mathbb{R}^4$ estas fórmulas toman la forma

$$k_1 = \frac{-\gamma B' + \alpha A'}{1 - \gamma A - \alpha B}, \qquad k_2 = \frac{-\delta B' + \beta A'}{1 - \delta A - \beta B}, \qquad k_3 = k. \tag{3.10}$$

**Observación 3.10.** Sea $(u^0, 0)$ un punto fijo. Entonces

$$k_1(u^0, 0) = \alpha(u^0).$$

Por otra parte, como $3H = k_1 + k_2 + k_3 = k_1 + k_2 - \frac{3H}{2}$, se sigue que $k_1 + k_2 = 3H + \frac{3H}{2} = \frac{9H}{2} = -3(-\frac{3H}{2}) = -3k_3$, o equivalentemente

$$\frac{-\gamma B' + \alpha A'}{1 - \gamma A - \alpha B} + \frac{-\delta B' + \beta A'}{1 - \delta A - \beta B} = -3k. \tag{3.11}$$

En virtud del lema 3.9, al sustituir el valor $s = 0$ en la ecuación anterior tenemos

$$\alpha + \beta = -3k(0),$$

donde esta última fórmula es considerada como función de la variable $u$.

**Lema 3.11.** *Consideradas $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta$ como funciones de la variable $u$, tenemos*

$$-3k(0) = \alpha + \beta. \tag{3.12}$$

$$-3k'(0) = -\gamma k(0) + \alpha\gamma - \delta k(0) + \beta\delta. \tag{3.13}$$

$$-3k^{(2)}(0) = -\gamma k'(0) - \alpha k^2(0) - 2\gamma^2 k(0) + \alpha^2 k(0) + 2\alpha\gamma^2 \tag{3.14}$$

$$-\delta k'(0) - \beta k^2(0) - 2\delta^2 k(0) + \beta^2 k(0) + 2\beta\delta^2.$$

$$-3k^{(3)}(0) = -\gamma[k''(0) - k^3(0)] - 3\alpha k(0)k'(0) - 3\gamma^2 k'(0) - 7\alpha\gamma k^2(0) \qquad (3.15)$$

$$-6\gamma^3 k(0) + \alpha^2 k'(0) + 6\alpha^2\gamma k(0) + 6\alpha\gamma^3$$
$$-\delta[k''(0) - k^3(0)] - 3\beta k(0)k'(0) - 3\delta^2 k'(0) - 7\beta\delta k^2(0)$$
$$-6\delta^3 k(0) + \beta^2 k'(0) + 6\beta^2\delta k(0) + 6\beta\delta^3.$$

*Demostración.* En la prueba de este lema usaremos continuamente el lema 3.9. Derivando la ecuación 3.11 con respecto a $s$ obtenemos

$$\begin{aligned} -3k' &= \frac{(1-\gamma A - \alpha B)(-\gamma B'' + \alpha A'') - (-\gamma B' + \alpha A')(-\gamma A' - \alpha B')}{(1-\gamma A - \alpha B)^2} \\ &+ \frac{(1-\delta A - \beta B)(-\delta B'' + \beta A'') - (-\delta B' + \beta A')(-\delta A' - \beta B')}{(1-\delta A - \beta B)^2}. \end{aligned}$$

Si $s = 0$, entonces

$$-\gamma k(0) + \alpha\gamma - \delta k(0) + \beta\delta = -3k'(0).$$

Definamos

$$S := (1-\gamma A - \alpha B)(-\gamma B'' + \alpha A'') - (-\gamma B' + \alpha A')(-\gamma A' - \alpha B')$$

$$T := (1-\delta A - \beta B)(-\delta B'' + \beta A'') - (-\delta B' + \beta A')(-\delta A' - \beta B')$$

$$C := \frac{S}{(1-\gamma A - \alpha B)^2} \quad \& \quad D := \frac{T}{(1-\delta A - \beta B)^2}.$$

Podemos escribir

$$-3k' = C + D = \frac{S}{(1-\gamma A - \alpha B)^2} + \frac{T}{(1-\delta A - \beta B)^2}.$$

Al derivar $C$ y $D$ con respecto a $s$ resulta que

$$\begin{aligned} (1-\gamma A - \alpha B)^4 C' &= (1-\gamma A - \alpha B)^2 S' - 2S(1-\gamma A - \alpha B)(-\gamma A' - \alpha B') \\ (1-\delta A - \beta B)^4 D' &= (1-\delta A - \beta B)^2 T' - 2T(1-\delta A - \beta B)(-\delta A' - \beta B') \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} S' &= (1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma B^{(3)}+\alpha A^{(3)})+(-\gamma B^{(2)}+\alpha A^{(2)})(-\gamma A'-\alpha B') \\ &- (-\gamma B'+\alpha A')(-\gamma A^{(2)}-\alpha B^{(2)})-(-\gamma B^{(2)}+\alpha A^{(2)})(-\gamma A'-\alpha B') \\ &= (1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma B^{(3)}+\alpha A^{(3)})-(-\gamma B'+\alpha A')(-\gamma A^{(2)}-\alpha B^{(2)}). \end{aligned}$$

Similarmente $T'$ es la misma expresión pero cambiando $\gamma$ por $\delta$ y $\alpha$ por $\beta$. Es decir, $(1-\gamma A-\alpha B)^4 C'$ es igual a

$$\begin{aligned} & (1-\gamma A-\alpha B)^2[(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma B^{(3)}+\alpha A^{(3)}) \\ - & (-\gamma B'+\alpha A')(-\gamma A^{(2)}-\alpha B^{(2)})] \\ - & 2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A'-\alpha B')[(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma B^{(2)}+\alpha A^{(2)}) \\ - & (-\gamma B'+\alpha A')(-\gamma A'-\alpha B')] \end{aligned}$$

y $(1-\delta A-\beta B)^4 D'$ es la misma expresión pero cambiando $\gamma$ por $\delta$ y $\alpha$ por $\beta$. Como $-3k' = C+D$, se sigue que al derivar y sustituir $s=0$ tenemos que $-3k''(0) = C'(0)+D'(0)$. En otras palabras

$$\begin{aligned} -3k^{(2)}(0) &= -\gamma k'(0)-\alpha k^2(0)-2\gamma^2 k(0)+\alpha^2 k(0)+2\alpha\gamma^2 \\ & \quad -\delta k'(0)-\beta k^2(0)-2\delta^2 k(0)+\beta^2 k(0)+2\beta\delta^2. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} S'' &= (1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma B^{(4)}+\alpha A^{(4)})+(\gamma A'-\alpha B')(-\gamma B^{(3)}+\alpha A^{(3)}) \\ &- (-\gamma B'+\alpha A')(-\gamma A^{(3)}-\alpha B^{(3)})-(-\gamma B^{(2)}+\alpha A^{(2)})(-\gamma A^{(2)}-\alpha B^{(2)}). \end{aligned}$$

Como

$$(1-\gamma A-\alpha B)^4 C' = (1-\gamma A-\alpha B)^2 S' - 2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A'-\alpha B')S,$$

al derivar con respecto a $s$ resulta que $(1-\gamma A-\alpha B)^8 C^{(2)}$ es igual a

$$\begin{aligned}
& (1-\gamma A-\alpha B)^4\{(1-\gamma A-\alpha B)^2 S'' + 2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A'-\alpha B')S' \\
& -2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A'-\alpha B')S' - [2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A^{(2)}-\alpha B^{(2)}) \\
& +2(-\gamma A'-\alpha B')^2]\cdot S\} - 4(1-\gamma A-\alpha B)^3(-\gamma A'-\alpha B')[(1-\gamma A-\alpha B)^2 S' \\
& -2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A'-\alpha B')S] \\
= \; & (1-\gamma A-\alpha B)^4\{(1-\gamma A-\alpha B)^2 S'' - [2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A^{(2)}-\alpha B^{(2)}) \\
& +2(-\gamma A'-\alpha B')^2]\cdot S\} - 4(1-\gamma A-\alpha B)^3(-\gamma A'-\alpha B')[(1-\gamma A-\alpha B)^2 S' \\
& -2(1-\gamma A-\alpha B)(-\gamma A'-\alpha B')S].
\end{aligned}$$

Algo similar sucede para $(1-\delta A-\beta B)^8 D^{(2)}$. Por lo tanto, si $s=0$, entonces

$$\begin{aligned}
-3k^{(3)}(0) &= -\gamma[k''(0)-k^3(0)] - 3\alpha k(0)k'(0) - 3\gamma^2 k'(0) - 7\alpha\gamma k^2(0) \\
&- 6\gamma^3 k(0) + \alpha^2 k'(0) + 6\alpha^2\gamma k(0) + 6\alpha\gamma^3 \\
&- \delta[k''(0)-k^3(0)] - 3\beta k(0)k'(0) - 3\delta^2 k'(0) - 7\beta\delta k^2(0) \\
&- 6\delta^3 k(0) + \beta^2 k'(0) + 6\beta^2\delta k(0) + 6\beta\delta^3.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.12.** *Los valores propios de los operadores de forma $A_w$ y $A_e$ son constantes a lo largo de la superficie integral $H_0$ de $\mathcal{D}$ en $V$.*

*Demostración.* La ecuación 3.12 implica

$$\beta - k(0) = -(4k(0)+\alpha) \qquad \& \qquad \beta = -3k(0) - \alpha. \tag{3.16}$$

Las fórmulas 3.13 y 3.16 implican

$$\gamma[\alpha - k(0)] = -3k'(0) + \delta[4k(0)+\alpha]. \tag{3.17}$$

Usando la ecuación 3.16 tenemos

$$\gamma[\alpha - k(0)] + \delta[\beta - k(0)] = -3k'(0).$$

Multiplicando la fórmula 3.14 por $\alpha - k(0)$ y sustituyendo $\beta$ y $\gamma$ de 3.12 y 3.17 respectivamente, encontramos que

$$0 = 10k(0)[4k(0)+\alpha]\delta^2 - k'(0)[51k(0)+14\alpha]\delta + 3k''(0)\alpha + 6k^3(0)\alpha \tag{3.18}$$

$$+ \quad 4k^2(0)\alpha^2 + 2k(0)\alpha^3 - 3k(0)k''(0) - 12k^4(0) + 21[k'(0)]^2.$$

Sean

$$\begin{aligned} p &= 10k(0)[4k(0)+\alpha], \\ q &= \frac{k'(0)}{2}[51k(0)+14\alpha], \\ r &= 3k''(0)\alpha + 6k^3(0)\alpha + 4k^2(0)\alpha^2 + 2k(0)\alpha^3 - 3k(0)k''(0) - 12k^4(0) + 21[k'(0)]^2, \\ R &= \sqrt{q^2 - pr}. \end{aligned}$$

En este momento presentaremos el argumento que prueba que los valores propios de $A_w$ y $A_e$ son constantes a lo largo de una superficie integral $H_0$. Nótese que el punto $(u^0, 0)$ está en $H_0$ cuando $s = 0$ y que $k_1(u^0, 0) = \alpha(u^0)$ por la observación 3.10. Si existe una vecindad abierta $G$ de $H_0$ alrededor de $(u^0, 0) \in H_0$ tal que $\alpha(u)$ tome el valor constante $k_1(u^0, 0) = \alpha(u^0)$ para todo $(u, 0) \in G$, entonces la ecuacion 3.16 implica que $\beta$ es constante sobre $G$. Más aún, las fórmulas 3.18 y 3.15 muestran que $\delta$ y $\gamma$ también son constantes sobre $G$, con lo cual queda demostrado el lema porque $V$ es conexo.

En caso contrario, supongamos que para cada vecindad $G$ de $H_0$ alrededor de $(u^0, 0)$ existe un punto $(u_G, 0) \in G \setminus \{(u^0, 0)\}$ tal que $\alpha(u_G) \neq k_1(u^0, 0)$. Sea $(u, 0) \in G$ fijo arbitrario. Al sustituir el punto $u$ en la fórmula 3.18 resulta un polinomio de segundo grado con coeficientes reales en la indeterminada $\delta(u)$. A partir de ahora $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta$ y las expresiones que dependan de ellas se considerarán evaluadas en el punto arbitrario fijo $u$, pero no escribiremos este punto en las ecuaciones para simplificar la notación.

El polinomio 3.18 tiene raices

$$\delta = \frac{q}{p} \pm \frac{R}{p}.$$

Primero estudiaremos el caso

$$\delta = \frac{q}{p} + \frac{R}{p}. \tag{3.19}$$

El otro caso se estudia similarmente. Definamos

$$A := q[4k(0) + \alpha] - 3k'(0)p, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &:= -k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6k(0)\alpha^2, \\ \Delta &:= -k''(0) + 76k^3(0) + 43\alpha k^2(0) + 6k(0)\alpha^2. \end{aligned}$$

En virtud de las ecuaciones 3.17 y 3.20 y despejando $\delta p$ de la fórmula 3.19 se sigue que

$$\begin{aligned} p\gamma[\alpha - k(0)] &= -3pk'(0) + \delta p(4k(0) + \alpha) \\ &= -3k'(0)p + (q + R)(4k(0) + \alpha) \\ &= q(4k(0) + \alpha) + R(4k(0) + \alpha) - 3k'(0)p \\ &= A + R(4k(0) + \alpha). \end{aligned}$$

Es decir,

$$p\gamma[\alpha - k(0)] = A + R(4k(0) + \alpha). \tag{3.21}$$

Si dividimos la ecuación 3.21 entre $p(\alpha - k(0))$ resulta

$$\gamma = \frac{A}{p(\alpha - k(0))} + \frac{4k(0) + \alpha}{p(\alpha - k(0))}R. \tag{3.22}$$

Agrupando términos la relación 3.15 se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -3k^{(3)}(0) &= -3k(0)k'(0)(\alpha + \beta) + k'(0)(\alpha_2 + \beta^2) + \gamma[-k''(0) + k^3(0) \\ &- 7\alpha k^2(0) + 6\alpha^2 k(0)] - 3\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^3[\alpha - k(0)] + \delta[-k''(0) + k^3(0) \\ &- 7\beta k^2(0) + 6\beta^2 k(0)] - 3\delta^2 k'(0) + 6\delta^3[\beta - k(0)]. \end{aligned}$$

Por la ecuación 3.17, tenemos que

$$\begin{aligned}
& 6\gamma^3[\alpha - k(0)] \\
= \; & 6\gamma^2\{\gamma[\alpha - k(0)]\} \\
= \; & 6\gamma^2\{-3k'(0) + \delta(4k(0) + \alpha)\} \\
= \; & -18\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^2\delta(4k(0) + \alpha).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$6\gamma^3[\alpha - k(0)] = -18\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^2\delta(4k(0) + \alpha). \tag{3.23}$$

En cada uno de los términos de la fórmula 3.14 anterior sustituyamos el valor $\beta = -3k(0) - \alpha$ de la ecuación 3.16. Haciendo esto resulta

$$\begin{aligned}
-3k^{(3)}(0) \; = \; & -3k(0)k'(0)[-3k(0)] + k'(0)[\alpha^2 + 9k^2(0) + 6\alpha k(0) + \alpha^2] \\
+ \; & \gamma[-k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6\alpha^2 k(0)] - 3\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^3[\alpha - k(0)] \\
+ \; & \delta[-k''(0) + k^3(0) - 7(-3k(0) - \alpha)k^2(0) + 6(9k^2(0) + 6\alpha k(0) + \alpha^2)k(0)] \\
- \; & 3\delta^2 k'(0) + 6\delta^3(-4k(0) - \alpha).
\end{aligned}$$

Al realizar los cálculos observemos que el corchete que multiplica a $\gamma$ es $\Gamma$ y el corchete que multiplica a $\delta$ es $\Delta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
-3k^{(3)}(0) \; = \; & 9k^2(0)k'(0) + 2\alpha^2 k'(0) + 9k^2(0)k'(0) + 6\alpha k(0)k'(0) + \gamma\Gamma \\
- \; & 3\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^3[\alpha - k(0)] + \delta\Delta - 3\delta^2 k'(0) - 6\delta^3(4k(0) + \alpha).
\end{aligned}$$

Agrupando los términos comunes y usando la relación 3.23 que dedujimos anteriormente resulta

$$\begin{aligned}
& \Gamma\gamma - 21k'(0)\gamma^2 + 6(4k(0) + \alpha)\gamma^2\delta + \delta\Delta - 3\delta^2 k'(0) - 6(4k(0) + \alpha)\delta^3 \\
= \; & -3k''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha.
\end{aligned}$$

Si ahora sustituimos las fórmulas 3.19 y 3.22 en la ecuación anterior obtenemos

$$
\begin{aligned}
& -3k''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha \\
= \ & \frac{A + (4k(0)+\alpha)R}{p(\alpha - k(0))}\Gamma - 21k'(0)\frac{A^2 + (4k(0)+\alpha)R^2 + 2(4k(0)+\alpha)AR}{p^2(\alpha - k(0))^2} \\
+ \ & 6(4k(0)+\alpha)\left(\frac{qA^2 q(4k(0)+\alpha)^2R^2 + 2(4k(0)+\alpha)AR^2}{p^3(\alpha-k(0))^2}\right. \\
+ \ & \left.\frac{A^2 + 2q(4k(0)+\alpha)A + (4k(0)+\alpha)^2R^2}{p^3(\alpha - k(0))^2}R\right) + \Delta\frac{q+R}{p} \\
- \ & 3k'(0)\frac{q^2 + R^2 + 2qR}{p^2} - 6(4k(0)+\alpha)\left(\frac{q^3 + 3qR^2}{p^2} + \frac{3q^2 + R^2}{p^3}R\right).
\end{aligned}
$$

Si insertamos en la última ecuación los valores de $A$, $\Gamma$, $\Delta$, $R$, $p$, $q$ y $r$, entonces después de algunos cálculos tediosos uno puede ver que resulta un polinomio no trivial de grado 14 en la indeterminada $\alpha(u)$ donde ya no aparecen $\beta, \gamma, \delta$ ni las otras funciones de $u$, cuyo coeficiente del término principal es $2^4 \cdot 7^2 \cdot 10^4 \cdot k^6(0) \cdot [k'(0)]^2$ y en donde todos los demás coeficientes solo aparecen $k$ o sus derivadas evaluadas en el punto 0.

Como $u$ fue arbitrario, podemos pensar en tal polinomio como en una función de la variable $u$. Luego, en virtud del teorema fundamental del álgebra la función $\alpha$ sólo puede adoptar un número finito de valores que son soluciones de dicho polinomio. Como $\alpha$ es una función diferenciable, en particular es continua. Luego debe ser constante pues toma un número finito de valores. Si el valor de esta constante es distinto de $k_1(u^0, 0) = \alpha(u^0)$, entonces al añadir a $G$ el punto $(u^0, 0)$ la función $\alpha$ resulta discontinua. Pero si el valor de la constante es igual a $k_1(u^0, 0)$, entonces en particular $\alpha(u_G) = k_1(u^0, 0)$, lo cual es una contradicción. $\square$

**Corolario 3.13.** *Los valores propios $k_1$ y $k_2$ de $A$ son constantes a lo largo de $H_0$.*

*Demostración.* En virtud del teorema 3.12 sabemos que los valores propios $\alpha$ y $\beta$ de $A_w$ y $\gamma$ y $\delta$ de $A_e$ son constantes a lo largo de la superficie integral $H_0$. Luego los valores propios $k_1$ y $k_2$ de $A$ también son constantes a lo largo de $H_0$ por las ecuaciones 3.10. $\square$

## 3.3. Teorema de clasificación

**Lema 3.14.** *$H_0$ es una superficie no mínima de $\mathbb{R}^4$ con vector de curvatura media paralelo en el haz normal.*

*Demostración.* Primero probaremos que $H_0$ tiene vector de curvatura media $\vec{H}|_{H_0}$ paralelo en el haz normal, esto es, $\nabla^{\perp}_X(\vec{H}|_{H_0}) = 0$ para cada campo vectorial $X$ tangente a $H_0$. En efecto, denotaremos por $\vec{H}$ al vector de curvatura media de $M$ restringido a $H_0$ para simplificar la notación.

Sobre $H_0$ tenemos $\vec{H} = HN$ y $D_X\vec{H} = D_X(HN) = (XH)N + HD_XN = HD_XN$ para cada $X \in \Gamma(TH_0)$, pues $XH = 0$ porque la curvatura media $H$ es constante sobre la superficie integral. Finalmente, teniendo en mente que $N$ es paralelo en el haz normal $TH_0^{\perp}$ en virtud del lema 2.14, se sigue que

$$\nabla^{\perp}_X\vec{H} = (D_X\vec{H})^{\perp} = (HD_XN)^{\perp} = H(D_XN)^{\perp} = H\nabla^{\perp}_XN = H \cdot 0 = 0$$

como queríamos demostrar.

Por otro lado observemos que el vector de curvatura media $\vec{H}|_{H_0}$ de $H_0$ no se anula en ningún punto de $H_0$ pues recordemos que $H_0 \subseteq V \subseteq M_1 = M \setminus \{p \in M \mid (Hgrad\ H)(p) = 0\}$. En efecto, si de lo contrario, existiera algún punto $p \in H_0$ tal que $0 = \vec{H}(p) = H(p)N(p)$, entonces $H(p) = 0$, lo cual contradice que $H_0 \subseteq M_1$. En consecuencia la superficie integral $H_0$ no es mínima. $\square$

**Lema 3.15.**

$$(k_1 - k_2)\omega_{12}(e_2) = e_1(k_2) \qquad \& \qquad (k_2 - k_1)\omega_{21}(e_1) = e_2(k_1). \tag{3.24}$$

*Demostración.* Notemos que $k_2 = \langle Ae_2, e_2\rangle$ implica que $e_1(k_2) = \langle \nabla_{e_1} Ae_2, e_2\rangle + \langle \nabla_{e_1} e_2, Ae_2\rangle$.

La ecuación de Codazzi implica que

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)\omega_{12}(e_2) &= k_1\omega_{12}(e_2) - k_2\omega_{12}(e_2) = -k_1\omega_{21}(e_2) - k_2\omega_{12}(e_2)\\
&= -k_1\langle e_1, D_{e_2}e_2\rangle - k_2\langle e_2, D_{e_2}e_1\rangle = -\langle Ae_1, \nabla_{e_2}e_2\rangle - \langle Ae_2, \nabla_{e_2}e_1\rangle\\
&= \langle e_2, \nabla_{e_2}Ae_1\rangle - \langle e_2, A(\nabla_{e_2}e_1)\rangle = \langle (\nabla_{e_2}A)e_1, e_2\rangle\\
&= \langle (\nabla_{e_1}A)e_2, e_2\rangle = \langle e_2, \nabla_{e_1}Ae_2\rangle - \langle e_2, A(\nabla_{e_1}e_2)\rangle\\
&= \langle e_2, \nabla_{e_1}Ae_2\rangle - \langle Ae_2, \nabla_{e_1}e_2\rangle = e_1(k_2) - 2\langle Ae_2, \nabla_{e_1}e_2\rangle\\
&= e_1(k_2).
\end{aligned}$$

Similarmente, la ecuación de Codazzi implica que

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)\omega_{21}(e_1) &= k_2\omega_{21}(e_1) - k_1\omega_{21}(e_1) = -k_2\omega_{12}(e_1) - k_1\omega_{21}(e_1)\\
&= -k_2\langle e_2, D_{e_1}e_1\rangle - k_1\langle e_1, D_{e_1}e_2\rangle = -\langle Ae_2, \nabla_{e_1}e_1\rangle - \langle Ae_1, \nabla_{e_1}e_2\rangle\\
&= \langle e_1, \nabla_{e_1}Ae_2\rangle - \langle e_1, A(\nabla_{e_1}e_2)\rangle = \langle (\nabla_{e_1}A)e_2, e_1\rangle\\
&= \langle (\nabla_{e_2}A)e_1, e_1\rangle = \langle e_1, \nabla_{e_2}Ae_1\rangle - \langle e_1, A(\nabla_{e_2}e_1)\rangle\\
&= \langle e_1, \nabla_{e_2}Ae_1\rangle - \langle Ae_1, \nabla_{e_2}e_1\rangle = e_2(k_1) - 2\langle Ae_1, \nabla_{e_2}e_1\rangle\\
&= e_2(k_1).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.16.** *La superficie integral $H_0$ es un subconjunto abierto de un producto riemanniano de círculos o un subconjunto abierto de un cilindro circular.*

*Demostración.* En la prueba de este teorema constantemente sustituiremos los valores de $\omega_{ij}(e_k)$ que se encontraron en el lema 3.7. Demostraremos que la superficie integral

$H_0$ tiene curvatura gaussiana constante y aplicaremos un resultado que enunciaremos mas adelante.

Aplicando la segunda de las ecuaciones estructurales extrínsecas del teorema 1.35 probaremos que

$$\omega_{13}(e_1)\omega_{23}(e_2) + k_1k_2 = e_2(\omega_{12}(e_1)) - (\omega_{12}(e_1))^2 - e_1(\omega_{12}(e_2)) - (\omega_{12}(e_2))^2.$$

Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\omega_{12}([e_2, e_1]) &= \omega_{12}(D_{e_2}e_1 - D_{e_1}e_2) = \omega_{12}(D_{e_2}e_1) - \omega_{12}(D_{e_1}e_2) \\
&= \omega_{12}\left(\sum_{\ell=1}^{4} \omega_{1\ell}(e_2)e_\ell\right) - \omega_{12}\left(\sum_{\ell=1}^{4} \omega_{2\ell}(e_1)e_\ell\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{4}[\omega_{1\ell}(e_2)\omega_{12}(e_\ell) - \omega_{2\ell}(e_1)\omega_{12}(e_\ell)] \\
&= (\omega_{12}(e_2))^2 + (\omega_{12}(e_1))^2.
\end{aligned}$$

Ahora, si $i = 1$ y $j = 2$, entonces

$$\begin{aligned}
d\omega_{12}(e_2, e_1) &= e_2(\omega_{12}(e_1)) - e_1(\omega_{12}(e_2)) - \omega_{12}([e_2, e_1]) \\
&= e_2(\omega_{12}(e_1)) - e_1(\omega_{12}(e_2)) - (\omega_{12}(e_2))^2 - (\omega_{12}(e_1))^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, una vez más, por el teorema 1.35 resulta

$$\begin{aligned}
d\omega_{12}(e_2, e_1) &= \sum_{k=1}^{4} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2}(e_2, e_1) = (\omega_{13} \wedge \omega_{32})(e_2, e_1) + (\omega_{14} \wedge \omega_{42})(e_2, e_1) \\
&= [\omega_{13}(e_2)\omega_{32}(e_1) - \omega_{13}(e_1)\omega_{32}(e_2)] + [\omega_{14}(e_2)\omega_{42}(e_1) - \omega_{14}(e_1)\omega_{42}(e_2)] \\
&= \omega_{13}(e_1)\omega_{23}(e_2) + k_1k_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega_{13}(e_1)\omega_{23}(e_2) + k_1k_2 = e_2(\omega_{12}(e_1)) - (\omega_{12}(e_1))^2 - e_1(\omega_{12}(e_2)) - (\omega_{12}(e_2))^2. \quad (3.25)$$

En virtud del corolario 3.13 y de la fórmula 3.24 se sigue que $e_1(k_2) = 0$ y $e_2(k_1) = 0$ sobre $H_0$ y en consecuencia

$$\omega_{12}(e_2) = 0 \qquad \& \qquad \omega_{21}(e_1) = 0.$$

Por lo tanto el lado derecho de la fórmula 3.25 se anula. Sustituyendo de nuevo los valores de $\omega_{ij}(e_k)$ que se encontraron en el lema 3.7 en la ecuación 1.9 del teorema 1.36 se sigue que el lado izquierdo de la fórmula 3.25 es la curvatura gaussiana $K_{H_0}$ de $H_0$. Luego $H_0$ tiene curvatura gaussiana cero.

Un resultado de B. Y. Chen y G. D. Ludden ([9], Corolario 2), afirma que si $H_0$ es una superficie no mínima de $\mathbb{R}^4$ con curvatura gaussiana constante y vector de curvatura media paralelo en el haz normal, entonces $H_0$ es un subconjunto abierto de una de las siguientes superficies: a) una 2-esfera en $\mathbb{R}^3$, b) un cilindro circular en $\mathbb{R}^3$ o c) un producto riemanniano de dos círculos planos. Un resultado parecido puede encontrarse también en un artículo de D. Hoffman ([16]; Teorema 3.1).

Luego, en virtud de este resultado $H_0$ es una superficie del tipo (b) o (c) porque la curvatura gaussiana de la 2-esfera de radio R es constante positiva mientras que la de un cilindro circular en $\mathbb{R}^3$ y la del producto riemanniano de dos círculos planos es constante cero. □

**Proposición 3.17.** *En caso de que $H_0$ sea un cilindro circular de radio R, el vector de posición de la $H$-hipersuperficie $V$, con respecto a un origen apropiado está dado por:*

$$y(u, v, s) = (f(s)\cos u, f(s)sen\ u, v, g(s)),$$

*donde $(f(s), g(s))$ es una curva de rapidez unitaria con curvatura no constante que satisface*

$$3ff'' = 1 - (f')^2.$$

*Más aún, la curvatura media $H$ satisface*

$$(H')^2 = cH^{\frac{7}{2}} - 36H^4, \tag{3.26}$$

*donde $c$ es una constante positiva.*

*Demostración.* Sea $H_0$ una superficie integral de $\mathcal{D}$ en $V$. En virtud del teorema 3.16 podemos asumir que el vector de posición de $H_0$ está dado por

$$x(u,v) = (R\cos u, Rsen\ u, v, 0).$$

Los campos vectoriales unitarios

$$\xi_1 = (\cos u, sen\ u, 0, 0) \qquad \& \qquad \xi_2 = (0,0,0,1)$$

constituyen un marco ortonormal del espacio normal $TH_0^{\perp}$ de $H_0$ en $\mathbb{R}^4$. Más aún, $\xi_1$ y $\xi_2$ son paralelos en el haz normal. En efecto, sea $X$ un campo vectorial tangente a $H_0$ arbitrario. Como $\xi_2$ es un campo vectorial constante de $\mathbb{R}^4$, se sigue que $D_X\xi_2 = 0$. Por lo tanto $\nabla_X^{\perp}\xi_2 = (D_X\xi_2)^{\perp} = 0^{\perp} = 0$.

Por otro lado, claramente $\langle D_X\xi_1, \xi_2\rangle = 0$, con lo cual $D_X\xi_1$ es ortogonal a $\xi_2$. Además, $1 = \langle \xi_1, \xi_1\rangle$ implica que $0 = X\langle \xi_1, \xi_1\rangle = 2\langle D_X\xi_1, \xi_1\rangle$, de donde se sigue que $D_X\xi_1$ es ortogonal a $\xi_1$. Luego $D_X\xi_1$ es tangente a $H_0$ y en consecuencia $\nabla_X^{\perp}\xi_1 = 0$.

Sabemos que $e$ y $w$ son campos vectoriales normales paralelos de $H_0$ en $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto podemos asumir que existe un ángulo constante $\theta$ tal que

$$e(u,v) = \cos\theta\xi_1 + sen\ \theta\xi_2 \qquad \& \qquad w(u,v) = -sen\ \theta\xi_1 + \cos\theta\xi_2.$$

En virtud de la ecuación 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
y(u,v,s) &= x(u,v) + A(s)e(u,v) + B(s)w(u,v) = (R\cos u, Rsen\ u, v, 0)\\
&+ A(s)\left[(\cos\theta\cos u, \cos\theta sen\ u, 0, 0) + (0,0,0,sen\ \theta)\right]\\
&+ B(s)\left[(-sen\ \theta\cos u, -sen\ \theta sen\ u, 0, 0) + (0,0,0,\cos\theta)\right]\\
&= ([R + A(s)\cos\theta - B(s)sen\ \theta]\cos u, [R + A(s)\cos\theta - B(s)sen\ \theta]sen\ u,\\
&\quad v, A(s)sen\ \theta + B(s)\cos\theta)\\
&= (f(s)\cos u, f(s)sen\ u, v, g(s)).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$y(u,v,s) = (f(s)\cos u, f(s)sen\ u, 0, g(s)) + v(0,0,1,0), \tag{3.27}$$

donde se ha definido

$$f(s) := R + A(s)\cos\theta - B(s)sen\ \theta \qquad \& \qquad g(s) := A(s)sen\ \theta + B(s)\cos\theta.$$

La curva $(f(s), g(s))$ es de rapidez unitaria pues

$$f'(s) = A'(s)\cos\theta - B'(s)sen\ \theta \qquad \& \qquad g'(s) = A'(s)sen\ \theta + B'(s)\cos\theta,$$

$$(f'(s))^2 = (A'(s))^2\cos^2\theta - 2sen\ \theta\cos\theta A'(s)B'(s) + (B'(s))^2 sen\ ^2\theta,$$

$$(g'(s))^2 = (A'(s))^2 sen\ ^2\theta + 2sen\ \theta\cos\theta A'(s)B'(s) + (B'(s))^2\cos^2\theta,$$

$$\begin{aligned}
(f'(s))^2 + (g'(s))^2 &= (A'(s))^2\cos^2\theta + (A'(s))^2 sen\ ^2\theta + (B'(s))^2 sen\ ^2\theta \\
&+ (B'(s))^2\cos^2\theta = (A'(s))^2 + (B'(s))^2 \\
&= \cos^2\left(\int_0^s k(u)\ du\right) + sen\ ^2\left(\int_0^s k(u)\ du\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

El campo vectorial normal de $V$ en $\mathbb{R}^4$ está dado por la ecuación 2.6, que en este caso en particular nos dice que

$$\begin{aligned}
N(u,v,s) &= -B'(s)e(u,v) + A'(s)w(u,v) \\
&= -B'(s)(\cos\theta\xi_1 + sen\ \theta\xi_2) + A'(s)(-sen\ \theta\xi_1 + \cos\theta\xi_2) \\
&= (-B'(s)\cos\theta - A'(s)sen\ \theta)\xi_1 + (-B'(s)sen\ \theta + A'(s)\cos\theta)\xi_2 \\
&= (-B'(s)\cos\theta - A'(s)sen\ \theta)(\cos u, sen\ u, 0, 0) \\
&+ (-B'(s)sen\ \theta + A'(s)\cos\theta)(0,0,0,1) \\
&= -g'(s)(\cos u, sen\ u, 0, 0) + f'(s)(0,0,0,1) \\
&= (-g'(s)\cos u, -g'(s)sen\ u, 0, f'(s)).
\end{aligned}$$

Ahora usaremos la fórmula de Rodrigues para determinar las curvaturas principales. En efecto,

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{\partial x}{\partial u} = \left( \frac{\partial (R\cos u)}{\partial u}, \frac{\partial (Rsen\ u)}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial u}, \frac{\partial (0)}{\partial u} \right) \\ &= (-Rsen\ u, R\cos u, 0, 0). \end{aligned}$$

Similarmente $x_v = (0,0,1,0)$. Además , como

$$e(u,v) = (\cos\theta\cos u, \cos\theta sen\ u, 0, sen\ \theta),$$

$$w(u,v) = (-sen\ \theta\cos u, -sen\ \theta sen\ u, 0, \cos\theta),$$

se sigue que

$$\begin{aligned} D_{x_u} e &= (x_u(\cos\theta\cos u), x_u(\cos\theta sen\ u), x_u(0), x_u(sen\ \theta)) \\ &= \left( \frac{\partial(\cos\theta\cos u)}{\partial u}, \frac{\partial(\cos\theta sen\ u)}{\partial u}, 0, \frac{\partial(sen\ \theta)}{\partial u} \right) \\ &= (-\cos\theta sen\ u, \cos\theta\cos u, 0, 0) \\ &= \frac{\cos\theta}{R}(-Rsen\ u, R\cos u, 0, 0). \end{aligned}$$

Luego $\gamma = -\frac{\cos\theta}{R}$. Análogamente

$$D_{x_v} e = (0,0,0,0) = 0 \cdot x_v \qquad \& \qquad \delta = 0.$$

También

$$D_{x_u} w = (sen\ \theta sen\ u, -sen\ \theta\cos u, 0, 0) = \frac{-sen\ \theta}{R}(-Rsen\ u, R\cos u, 0, 0)$$

y

$$D_{x_v} w = (0,0,0,0) = 0 \cdot x_v.$$

Por lo tanto

$$\alpha = \frac{sen\ \theta}{R} \qquad \& \qquad \beta = 0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \frac{A'(s)\alpha - B'(s)\gamma}{1 - A(s)\gamma - B(s)\alpha} = \frac{A'(s)\frac{sen\ \theta}{R} + B'(s)\frac{\cos\theta}{R}}{1 + A(s)\frac{\cos\theta}{R} - B(s)\frac{sen\ \theta}{R}} = \frac{A'(s)sen\ \theta + B'(s)\cos\theta}{R + A(s)\cos\theta - B(s)sen\ \theta} \\ &= \frac{g'(s)}{f(s)}, \end{aligned}$$

$$k_2(s) = \frac{A'(s)\beta - B'(s)\delta}{1 - A(s)\delta - B(s)\beta} = 0.$$

pues $\beta = 0 = \delta$. Similarmente

$$g''(s) = -sen\ \theta B'(s)k(s) + \cos\theta A'(s)k(s) \quad \& \quad f'(s) = -sen\ \theta B'(s) + \cos\theta A'(s)$$

implican que

$$k(s) = \frac{g''(s)}{f'(s)}.$$

De esta manera

$$\frac{g'}{f} = \frac{9H}{2} \qquad \& \qquad \frac{g''}{f'} = -\frac{3H}{2}. \tag{3.28}$$

Las dos ecuaciones anteriores implican que

$$3ff'' = 1 - (f')^2.$$

En efecto, como la curva $(f(s), g(s))$ es de rapidez unitaria, se sigue que $(f')^2 + (g')^2 = 1$ y $f'f'' + g'g'' = 0$. Por 3.28 tenemos $f'' = -g'\frac{g''}{f'} = -g'(-\frac{3H}{2})$; lo cual implica

$$3ff'' = g'\left(f\frac{9H}{2}\right) = (g')^2 = 1 - (f')^2$$

como deseábamos probar. Por otro lado, $\frac{g'}{f} = \frac{9H}{2} = -3\left(-\frac{3H}{2}\right) = -3\frac{g''}{f'}$ implica que

$$f'g' = -3fg''. \tag{3.29}$$

Por una parte

$$\left[\left(\frac{g'}{f}\right)^{-1}\right]' = \left(\frac{2}{9H}\right)' = -\frac{2}{9}\frac{H'}{H^2}$$

mientras que por otra parte

$$\left[\left(\frac{g'}{f}\right)^{-1}\right]' = \left(\frac{f}{g'}\right)' = \frac{f'g' - fg''}{(g')^2} = \frac{\frac{4}{3}f'g'}{(g')^2}$$

en virtud de la ecuación 3.29. Como

$$-\frac{2}{9}\frac{H'}{H^2} = \frac{\frac{4}{3}f'g'}{(g')^2},$$

resulta que

$$-\frac{H'}{H} = \frac{9H}{2}\left(\frac{\frac{4}{3}f'g'}{(g')^2}\right) = \frac{g'}{f}\left(\frac{\frac{4}{3}f'g'}{(g')^2}\right) = \frac{4}{3}\frac{f'}{f},$$

de donde se sigue que

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3H'}{4H}. \tag{3.30}$$

En virtud de la regla de la cadena tenemos que

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = -\frac{3}{4}(\ln H)'.$$

Integrando con respecto a $s$ resulta que

$$\ln f = -\frac{3}{4}\ln H + c_1 = -\frac{3}{5}\ln H + \ln c_2$$

con $c_1$ y $c_2$ constantes apropiadas tales que $c_1 = \ln c_2$. Luego, en virtud de las propiedades de la función logaritmo natural, $\ln f = \ln(c_2 H^{-\frac{3}{4}})$, lo cual implica que $f = c_2 H^{-\frac{3}{4}}$. Derivando directamente con respecto a $s$ resulta

$$f' = -\frac{3c_2}{4}H^{-\frac{7}{4}}H' \tag{3.31}$$

mientras que usando la fórmula 3.28 obtenemos

$$g' = \frac{9H}{2}f = \frac{9H}{2}(c_2 H^{-\frac{3}{4}}) = \frac{9c_2}{2}H^{\frac{1}{4}}. \tag{3.32}$$

Al usar las fórmulas 3.31 y 3.32 para $g'$ y $f'$ y la identidad $(f')^2 + (g')^2 = 1$ resulta que

$$1 = (f')^2 + (g')^2 = \frac{9c_2^2}{16}H^{-\frac{7}{2}}(H')^2 + \frac{81}{4}c_2^2 H^{\frac{1}{2}}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
(H')^2 &= \frac{1-\frac{81}{4}c_2^2H^{\frac{1}{2}}}{\frac{9}{16}c_2^2H^{-\frac{7}{2}}} = \frac{\frac{4-81c_2^2H^{\frac{1}{2}}}{4}}{\frac{9c_2^2H^{-\frac{7}{2}}}{16}} \\
&= \frac{16(4-81c_2^2H^{\frac{1}{2}})}{4\cdot 9c_2^2H^{-\frac{7}{2}}} \\
&= \left(\frac{16}{9c_2^2}\right)H^{\frac{7}{2}} - 36H^4
\end{aligned}$$

donde $c := (\frac{16}{9c_2^2})$, como queríamos demostrar. □

**Proposición 3.18.** *En caso de que $H_0$ sea un producto de dos círculos planos, uno de radio $x_0$ y el otro de radio $y_0$, el vector de posición de la $H$-hipersuperficie $V$, con respecto a un origen apropiado está dado por:*

$$\bar{y}(u,v,s) = (x(s)\cos u, x(s)sen\ u, y(s)\cos v, y(s)sen\ v) \tag{3.33}$$

*donde $(x(s), y(s))$ es una curva de rapidez unitaria, con curvatura no constante, que satistace*

$$x'y'' - x''y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x}\right).$$

*Demostración.* Asumamos que el vector de posición de $H_0$ está dado por

$$\bar{x}(u,v) = (x_0\cos u, x_0 sen\ u, y_0\cos v, y_0 sen\ v).$$

Los campos vectoriales unitarios

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, sen\ u, -\cos v, -sen\ v) \quad \& \quad \bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -sen\ u, -\cos v, -sen\ v),$$

constituyen un marco local ortonormal paralelo del espacio normal de $H_0$ en $\mathbb{R}^4$. Procedamos como en la proposición 3.17. En efecto, como $\bar{\xi}_1$ y $\bar{\xi}_2$ son paralelos en el haz normal de $H_0$, existe un ángulo fijo $\bar{\theta}$ tal que

$$e(u,v) = \cos\bar{\theta}\bar{\xi}_1 + sen\ \bar{\theta}\bar{\xi}_2 \quad \& \quad w(u,v) = -sen\ \bar{\theta}\bar{\xi}_1 + \cos\bar{\theta}\bar{\xi}_2.$$

Luego $\bar{y}(u,v,s)$ está dada por la ecuación 2.5, a saber,

$$\begin{aligned}
& \bar{x}(u,v) + A(s)e(u,v) + B(s)w(u,v) \\
= \;& (x_0 \cos u, x_0 sen\ u, y_0 \cos v, y_0 sen\ v) + A(s)[\cos\bar{\theta}\bar{\xi}_1 + sen\ \bar{\theta}\bar{\xi}_2] \\
+ \;& B(s)[-sen\ \bar{\theta}\bar{\xi}_1 + \cos\bar{\theta}\bar{\xi}_2] \\
= \;& (x_0 \cos u, x_0 sen\ u, y_0 \cos v, y_0 sen\ v) + A(s)[\frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{2}}(\cos u, sen\ u, -\cos v, -sen\ v) \\
+ \;& \frac{sen\ \bar{\theta}}{\sqrt{2}}(-\cos u, -sen\ u, -\cos v, -sen\ v)] + B(s)[-\frac{sen\ \bar{\theta}}{\sqrt{2}}(\cos u, sen\ u, -\cos v, -sen\ v) \\
+ \;& \frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{2}}(-\cos u, -sen\ u, -\cos v, -sen\ v)] \\
= \;& (x(s)\cos u, x(s) sen\ u, y(s)\cos v, y(s) sen\ v)
\end{aligned}$$

donde definimos

$$x(s) := x_0 + \frac{A(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) - \frac{B(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}),$$

$$y(s) := y_0 - \frac{A(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}).$$

La curva $(x(s), y(s))$ es de rapidez unitaria. En efecto,

$$x'(s) = \frac{A'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) - \frac{B'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}),$$

$$y'(s) = -\frac{A'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B'(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}),$$

$$\begin{aligned}
(x')^2 \;&=\; \frac{(A')^2}{2}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta})^2 - A'B'(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta})(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) \\
&+\; \frac{(B')^2}{2}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})^2 \\
&=\; \frac{(A')^2}{2} - (A')^2 \cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta} - A'B'(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta})(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{(B')^2}{2} \\
&+\; (B')^2 \cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(y')^2 &= \frac{(A')^2}{2}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})^2 - A'B'(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}) \\
&+ \frac{(B')^2}{2}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})^2 \\
&= \frac{(A')^2}{2} + (A')^2\cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta} - A'B'(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}) + \frac{(B')^2}{2} \\
&- (B')^2\cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta}
\end{aligned}
$$

implican que $(x')^2 + (y')^2 = (A')^2 + (B')^2 = 1$. El campo vectorial normal $N(u, v, s)$ de $V$ en términos de la ecuación 2.6 está dado por

$$
\begin{aligned}
& -B'(s)e(u,v) + A'(s)w(u,v) \\
= & -B'(s)[\cos\bar{\theta}\bar{\xi}_1 + sen\ \bar{\theta}\bar{\xi}_2] + A'(s)[-sen\ \bar{\theta}\bar{\xi}_1 + \cos\bar{\theta}\bar{\xi}_2] \\
= & -B'(s)\left[\frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{2}}(\cos u, sen\ u, -\cos v, -sen\ v) + \frac{sen\ \bar{\theta}}{\sqrt{2}}(-\cos u, -sen\ u, -\cos v, -sen\ v)\right] \\
+ & A'(s)\left[-\frac{sen\ \bar{\theta}}{\sqrt{2}}(\cos u, sen\ u, -\cos v, -sen\ v) + \frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{2}}(-\cos u, -sen\ u, -\cos v, -sen\ v)\right] \\
= & \Bigg(\left[-\frac{A'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B'(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})\right]\cos u, \\
& \left[-\frac{A'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B'(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})\right] sen\ u, \\
& \left[\frac{A'(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}) + \frac{B'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})\right]\cos v, \\
& \left[\frac{A'(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}) + \frac{B'(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})\right] sen\ v\Bigg) \\
= & (y'(s)\cos u, y'(s)sen\ u, -x'(s)\cos v, -x'(s)sen\ v).
\end{aligned}
$$

Ahora usaremos la fórmula de Rodrigues para determinar las curvaturas principales.

En efecto, sabemos que

$$\begin{aligned}
e(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\bar\theta\cos u, \cos\bar\theta sen\ u, -\cos\bar\theta\cos v, -\cos\bar\theta sen\ v\right)\\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-sen\ \bar\theta\cos u, -sen\ \bar\theta sen\ u, -sen\ \bar\theta\cos v, -sen\ \bar\theta sen\ v\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\bar\theta\cos u - sen\ \bar\theta\cos u, \cos\bar\theta sen\ u - sen\ \bar\theta sen\ u,\right.\\
&\left. -\cos\bar\theta\cos v - sen\ \bar\theta\cos v, -\cos\bar\theta sen\ v - sen\ \bar\theta sen\ v\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos u(\cos\bar\theta - sen\ \bar\theta), sen\ u(\cos\bar\theta - sen\ \bar\theta),\right.\\
&\left. -\cos v(\cos\bar\theta + sen\ \bar\theta), -sen\ v(\cos\bar\theta + sen\ \bar\theta)\right).
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
w(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos u(\cos\bar\theta + sen\ \bar\theta), -sen\ u(\cos\bar\theta + sen\ \bar\theta)\right.,\\
&\left.\cos v(sen\ \bar\theta - \cos\bar\theta), sen\ v(sen\ \bar\theta - \cos\bar\theta)\right),
\end{aligned}$$

$$\bar{x}_u = (-x_0 sen\ u, x_0\cos u, 0, 0) \qquad \& \qquad \bar{x}_v = (0, 0, -y_0 sen\ v, y_0\cos v).$$

Luego

$$\begin{aligned}
D_{\bar{x}_u} w &= \frac{1}{\sqrt{2}}(sen\ u(sen\ \bar\theta + \cos\bar\theta), -\cos u(sen\ \bar\theta + \cos\bar\theta), 0, 0)\\
&= \left(-\frac{1}{x_0\sqrt{2}}(sen\ \bar\theta + \cos\bar\theta)\right)\bar{x}_u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\bar{x}_v} w &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -sen\ v(sen\ \bar\theta - \cos\bar\theta), \cos v(sen\ \bar\theta - \cos\bar\theta))\\
&= \left(\frac{1}{y_0\sqrt{2}}(sen\ \bar\theta - \cos\bar\theta)\right)\bar{x}_v,
\end{aligned}$$

$$\alpha(u,v) = \frac{1}{x_0\sqrt{2}}(sen\ \bar\theta + \cos\bar\theta) \qquad \& \qquad \beta(u,v) = -\frac{1}{y_0\sqrt{2}}(sen\ \bar\theta - \cos\bar\theta).$$

Similarmente para $A_e$ resulta

$$\begin{aligned} D_{\bar{x}_u} e &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-sen\ u(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}), \cos u(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}), 0, 0) \\ &= \frac{1}{x_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta})\bar{x}_u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\bar{x}_v} e &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, sen\ v(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}), -\cos v(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})) \\ &= -\frac{1}{y_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})\bar{x}_v, \end{aligned}$$

$$\gamma(u,v) = -\frac{1}{x_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) \qquad \& \qquad \delta(u,v) = \frac{1}{y_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \frac{-B'(s)\gamma + A'(s)\alpha}{1 - A(s)\gamma - B(s)\alpha} = \frac{\frac{B'(s)}{x_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) + \frac{A'(s)}{x_0\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} + \cos\bar{\theta})}{1 + \frac{A(s)}{x_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) - \frac{B(s)}{x_0\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} + \cos\bar{\theta})} \\ &= -\frac{y'(s)}{x(s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(s) &= \frac{-\delta B'(s) + \beta A'(s)}{1 - \delta A(s) - \beta B(s)} = \frac{-\frac{B'(s)}{y_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) - \frac{A'(s)}{y_0\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})}{1 - \frac{A(s)}{y_0\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B(s)}{y_0\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})} \\ &= \frac{x'(s)}{y(s)}. \end{aligned}$$

En otras palabras

$$k_1 = -\frac{y'}{x} \qquad \& \qquad k_2 = \frac{x'}{y}. \tag{3.34}$$

Por otra parte, como

$$x''(s) = \frac{A''(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) - \frac{B''(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}),$$

$$y''(s) = -\frac{A''(s)}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B''(s)}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta}),$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
x'y'' &= \left(\frac{A'}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) - \frac{B'}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})\right) \times \\
&\quad \left(-\frac{A''}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B''}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})\right) \\
&= -\frac{A'A''}{2}(\cos^2\bar{\theta} - sen\ ^2\bar{\theta}) + \frac{A'B''}{2}(-1 + 2\cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta}) \\
&+ \frac{A''B'}{2}(1 + 2\cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta}) - \frac{B'B''}{2}(sen\ ^2\bar{\theta} - \cos^2\bar{\theta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x''y' &= \left(\frac{A''}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} - sen\ \bar{\theta}) - \frac{B''}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta})\right) \times \\
&\quad \left(-\frac{A'}{\sqrt{2}}(\cos\bar{\theta} + sen\ \bar{\theta}) + \frac{B'}{\sqrt{2}}(sen\ \bar{\theta} - \cos\bar{\theta})\right) \\
&= -\frac{A'A''}{2}(\cos^2\bar{\theta} - sen\ ^2\bar{\theta}) + \frac{A'B''}{2}(1 + 2\cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta}) \\
&+ \frac{A''B'}{2}(-1 + 2\cos\bar{\theta} sen\ \bar{\theta}) - \frac{B'B''}{2}(sen\ ^2\bar{\theta} - \cos^2\bar{\theta}).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$x'y'' - x''y' = -A'B'' + A''B' = \frac{A''}{B'} = \frac{-B'k}{B'} = -k = -k_3$$

y en consecuencia

$$k_3 = x''y' - x'y''.$$

Luego, como $-3k_3 = k_1 + k_2$, se sigue que

$$x'y'' - x''y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x}\right).$$

Más aún, como las curvaturas principales de $V$ deben ser distintas, tenemos que $\frac{y'}{x} \neq -\frac{x'}{y}$, lo cual implica que $x^2(s)+y^2(s)$ es no constante, pues de lo contrario existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $x^2(s)+y^2(s) = C$ para cada $s$. Al derivar con respecto a $s$ tenemos que

$0 = 2xx' + 2yy' = 2(xx' + yy')$, de donde se sigue que $0 = xx' + yy'$ y que $\frac{y'}{x} = -\frac{x'}{y}$, lo cual es una contradicción.

Finalmente, nótese que la curva $(x(s), y(s))$ tiene curvatura $x''y' - x'y''$, la cual es no constante porque $V$ tiene curvatura media no constante. $\square$

**Observación 3.19.** Las proposiciónes 3.17 y 3.18 implican que $V$ es un cilindro generarizado erecto sobre una superficie de revolución que está contenida en algún $\mathbb{R}^3$ (vea la ecuación 3.27) o una hipersuperficie $O(2) \times O(2)$-invariante de $\mathbb{R}^4$ (vea la ecuación 3.33).

El siguiente teorema resume las principales proposiciones que hemos obtenido.

**Teorema 3.20.** *Teorema de clasificación. Una $H$-hipersuperficie en $\mathbb{R}^4$ es exactamente una de las siguientes hipersuperficies:*

*i) Una hipersuperficie con curvatura media constante.*

*ii) Una hipersuperficie rotacional con curvatura media no constante como se describe en la proposición 3.6.*

*iii) Un cilindro generalizado sobre una superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$, con curvatura media no constante, como se describe en la proposición 3.17.*

*iv) Una hipersuperficie $O(2) \times O(2)$-invariante con curvatura media no constante, como se describe en la proposición 3.18.*

# Capítulo 4

# Teorema principal

Nuestra motivación para la investigación precedente fue el estudio de $H$-hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$. Ahora estudiaremos $H$-hipersuperficies que además son biarmónicas. Teniendo en mente el corolario 1.39, recordemos que estas últimas satisfacen las ecuaciones

$$A(grad\ H) = -\frac{3H}{2} grad\ H \qquad \& \qquad \Delta H + SH = 0.$$

Para la demostración del teorema necesitaremos los tres lemas siguientes.

**Lema 4.1.** *Las hipersuperficies rotacionales de $\mathbb{R}^4$ con curvatura media no constante, como se describen en la proposición 3.6, no son biarmónicas.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$x(\theta, t, s) = (f(s) sen\ t \cos\theta, f(s) sen\ t sen\ \theta, f(s)\cos t, g(s))$$

es una parametrización local de una hipersuperficie rotacional biarmónica con curvatura media no constante, donde $(f(s), g(s))$ es una curva de rapidez unitaria con $f(s) > 0$ y $0 < t < \pi$. Como las curvaturas principales deben ser $k_1 = k_2 = \frac{9H}{4}$ y $k_3 = -\frac{3H}{2}$ y la longitud de la segunda forma fundamental está dada por la suma de los cuadrados de las curvaturas principales en virtud de la ecuación 1.10, se sigue que $S = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = (\frac{9H}{4})^2 + (\frac{9H}{4})^2 + (-\frac{3H}{2})^2 = \frac{99}{8}H^2$, es decir,

$$S = \frac{99}{8}H^2.$$

El laplaciano se puede escribir en términos de coordenadas locales $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ como

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

donde $g_{ij}$ son las componentes del tensor métrico, $g = (g_{ij})$ es la matriz con entradas $g_{ij}$ y $g^{-1} = (g^{ij})$ es la matriz inversa de $g$.

Calculemos el laplaciano en términos de la parametrización local de arriba. En efecto,

$$x_1(\theta, t, s) = (-f(s)sen\ tsen\ \theta, f(s)sen\ t\cos\theta, 0, 0),$$

$$x_2(\theta, t, s) = (f(s)\cos t\cos\theta, f(s)\cos tsen\ \theta, -f(s)sen\ t, 0),$$

$$x_3(\theta, t, s) = (f'(s)sen\ t\cos\theta, f'(s)sen\ tsen\ \theta, f'(s)\cos t, g'(s)).$$

Por otro lado

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = f^2(s)sen\ ^2tsen\ ^2\theta + f^2(s)sen\ ^2t\cos^2\theta = f^2(s)sen\ ^2t,$$

$$g_{22}(\theta, t, s) = f^2(s)\cos^2 t\cos^2\theta + f^2(s)\cos^2 tsen\ ^2\theta + f^2(s)sen\ ^2t = f^2(s),$$

$$g_{33} = \langle x_3, x_3 \rangle = (f')^2 + (g')^2 = 1,$$

mientras que $g_{ij} = 0$ para cada $i \neq j$. Por lo tanto la matriz de $g$ y su matriz inversa $g^{-1}$ son las matrices

$$g = \begin{pmatrix} f^2(s)sen\ ^2t & 0 & 0 \\ 0 & f^2(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2(s)sen\ ^2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además $\det g = f^4(s)sen\ ^2 t$. Al sustituir estos valores en la expresión local para el laplaciano resulta

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\frac{1}{f^2(s)sen\ t}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[g^{11}(f^2(s)sen\ t)\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[g^{22}(f^2(s)sen\ t)\frac{\partial}{\partial t}\right]\right.\\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial s}\left[g^{33}(f^2(s)sen\ t)\frac{\partial}{\partial s}\right]\right\}\\
&= -\frac{1}{f^2(s)sen\ t}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{1}{sen\ t}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[(sen\ t)\frac{\partial}{\partial t}\right]\right.\\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial s}\left[(f^2(s)sen\ t)\frac{\partial}{\partial s}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Como la curvatura media $H$ no depende ni de $\theta$ ni de $t$, al aplicarle el laplaciano tenemos que

$$\Delta H = -\frac{1}{f^2(s)sen\ t}\frac{\partial}{\partial s}\left[(f^2(s)sen\ t)\frac{\partial H}{\partial s}\right] = -\frac{2f'(s)}{f(s)}\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} = -2\frac{f'(s)}{f(s)}H' - H''.$$

Por otro lado, como $0 = \Delta H + SH$, se sigue que

$$0 = -H'' - 2\frac{f'}{f}H' + \frac{99}{8}H^3.$$

Multiplicando por $H'$ la ecuación anterior y teniendo en mente que $\frac{f'}{f} = \lambda\frac{H'}{H}$ donde $\lambda = -\frac{3}{5}$ en virtud de 3.6, tenemos que

$$0 = -H'H'' - 2\lambda\frac{(H')^3}{H} + \frac{99}{8}H'H^3.$$

Integrando la ecuación anterior respecto a $s$ resulta

$$\begin{aligned}
0 &= -\int H'H''\ ds - 2\int \lambda\frac{(H')^3}{H}\ ds + \int\frac{99}{8}H'H^3\ ds\\
&= -\frac{1}{2}(H')^2 - 2\int\lambda\frac{(H')^3}{H}\ ds + \frac{99}{32}H^4,
\end{aligned}$$

donde se ha supuesto (sin pérdida de generalidad) que la constante de integración es cero. Sean

$$F = \tfrac{f'H'}{f} \quad \& \quad G = H \quad \& \quad dF = \tfrac{ff''H' + ff'H'' - (f')^2H'}{f^2}\ ds \quad \& \quad dG = H'\ ds.$$

Aplicando el método de integración por partes se sigue que

$$\begin{aligned}
\int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds &= \int \frac{f'H'}{f} H'\, ds = \frac{f'H'H}{f} - \int \frac{ff''H'H + ff'H''H - (f')^2 H'H}{f^2}\, ds \\
&= \lambda (H')^2 - \int \frac{f''H'H}{f}\, ds - \int \frac{f'H''H}{f}\, ds + \int \left(\frac{f'}{f}\right)^2 H'H\, ds \\
&= \lambda (H')^2 + \int \frac{g'}{f}\frac{g''}{f'} H'H\, ds - \int \lambda H''H'\, ds + \int \lambda^2 \frac{(H')^2}{H^2} H'H\, ds \\
&= \lambda (H')^2 + \int \left(\frac{9H}{4}\right)\left(-\frac{3H}{2}\right) H'H\, ds - \frac{\lambda}{2}(H')^2 + \lambda \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds \\
&= \frac{\lambda}{2}(H')^2 - \frac{27}{32} H^4 + \lambda \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds
\end{aligned}$$

si, y sólo si

$$(1-\lambda)\int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds = \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds - \lambda \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds = \frac{\lambda}{2}(H')^2 - \frac{27}{32} H^4$$

si, y sólo si

$$\int \lambda \frac{(H')^3}{H}\, ds = \frac{\frac{\lambda}{2}(H')^2 - \frac{27}{32}H^4}{1-\lambda} = -\frac{15}{80}(H')^2 - \frac{135}{256} H^4.$$

En consecuencia

$$0 = -\frac{1}{2}(H')^2 - 2\left[-\frac{15}{80}(H')^2 - \frac{135}{256}H^4\right] + \frac{99}{32}H^4 = -\frac{1}{8}(H')^2 + \frac{531}{128}H^4$$

si, y sólo si

$$(H')^2 = \frac{531}{16} H^4.$$

Finalmente, en virtud de la ecuación 3.2 resulta

$$cH^{\frac{16}{5}} - \frac{225}{16}H^4 = (H')^2 = \frac{531}{16}H^4,$$

luego

$$cH^{\frac{16}{5}} = \frac{531}{16}H^4 + \frac{225}{16}H^4 = \frac{756}{16}H^4,$$

lo cual implica que

$$c^5 H^{16} = \left(\frac{756}{16}\right)^5 H^{20},$$

lo cual a su vez es equivalente a que

$$-\left(\frac{756}{16}\right)^5 H^{20} + c^5 H^{16} = 0,$$

lo cual implica que $H$ es una raíz de un polinomio de grado 20. Por lo tanto $H$ toma un número finito de valores reales y en consecuencia es una función constante pues es continua. Pero esto último es una contradicción. En consecuencia la hipersuperficie rotacional no es biarmónica. $\square$

**Lema 4.2.** *Los cilindros generalizados erectos sobre superficies de revolución contenidos en algún $\mathbb{R}^3$, con curvatura media no constante, como se describen en la proposición 3.17, no son biarmónicos.*

*Demostración.* Asumamos sin pérdida de generalidad que el vector de posición (una parametrización local) de tal cilindro está dado por

$$x(u, v, s) = (f(s)\cos u, f(s)sen\ u, v, g(s))$$

donde la curva $(f(s), g(s))$ es de rapidez unitaria con $f(s) > 0$. Como las curvaturas principales son $k_1 = \frac{9H}{2}$, $k_2 = 0$ y $k_3 = -\frac{3H}{2}$, tenemos que $S = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = (\frac{9H}{2})^2 + (-\frac{3H}{2})^2 = \frac{90}{4}H^2$ en virtud de la ecuación 1.10, es decir

$$S = \frac{90}{4}H^2.$$

Calculemos localmente el laplaciano en términos de la parametrización de arriba. En efecto,

$$x_1(u, v, s) = (-f(s)sen\ u, f(s)\cos u, 0, 0),$$

$$x_2(u, v, s) = (0, 0, 1, 0),$$

$$x_3(u, v, s) = (f'(s)\cos u, f'(s)sen\ u, 0, g'(s)).$$

Por otro lado $g_{11}(u, v, s) = f^2(s)$, $g_{22}(u, v, s) = 1$, $g_{33}(u, v, s) = (f'(s))^2 + (g'(s))^2 = 1$ y $g_{ij} = 0$ para cada $i \neq j$. Por lo tanto la matriz de $g$ y su matriz inversa $g^{-1}$ son las matrices

$$g = \begin{pmatrix} f^2(s) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además $\det g = f^2(s)$. Al sustituir estos valores en la expresión local para el laplaciano resulta

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{f(s)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{f(s)}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(f(s)\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(f(s)\frac{\partial}{\partial s}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{f^2(s)}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{f'(s)}{f(s)}\frac{\partial}{\partial s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta H = -\frac{f'(s)}{f(s)}H'(s) - H''(s).$$

Por otro lado, como $0 = \Delta H + SH$, se sigue que

$$0 = -H'' - \frac{f'}{f}H' + \frac{90}{4}H^3.$$

Multiplicando por $H'$ la ecuación anterior y teniendo en mente que $\frac{f'}{f} = \lambda\frac{H'}{H}$ donde $\lambda = -\frac{3}{4}$ en virtud de 3.30, tenemos que

$$0 = -H'H'' - \lambda\frac{(H')^3}{H} + \frac{90}{4}H'H^3.$$

Integrando la ecuación anterior respecto a $s$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= -\int H'H''\ ds - \int \lambda\frac{(H')^3}{H}\ ds + \int \frac{90}{4}H'H^3\ ds \\ &= -\frac{1}{2}(H')^2 - \int \lambda\frac{(H')^3}{H}\ ds + \frac{90}{16}H^4, \end{aligned}$$

donde se ha supuesto (sin pérdida de generalidad) que la constante de integración es cero. Sean

$$F = \frac{f'H'}{f} \quad \& \quad G = H \quad \& \quad dF = \frac{ff''H' + ff'H'' - (f')^2H'}{f^2}\ ds \quad \& \quad dG = H'\ ds.$$

Aplicando el método de integración por partes se sigue que

$$\begin{aligned}
\int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds &= \int \frac{f'H'}{f} H'\ ds = \frac{f'H'H}{f} - \int \frac{ff''H'H + ff'H''H - (f')^2 H'H}{f^2}\ ds \\
&= \lambda (H')^2 - \int \frac{f''H'H}{f}\ ds - \int \frac{f'H''H}{f}\ ds + \int \left(\frac{f'}{f}\right)^2 H'H\ ds \\
&= \lambda (H')^2 + \int \frac{g'}{f}\frac{g''}{f'} H'H\ ds - \int \lambda H''H'\ ds + \int \lambda^2 \frac{(H')^2}{H^2} H'H\ ds \\
&= \lambda (H')^2 + \int \left(\frac{9H}{2}\right)\left(-\frac{3H}{2}\right) H'H\ ds - \frac{\lambda}{2}(H')^2 + \lambda \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds \\
&= \frac{\lambda}{2}(H')^2 - \frac{27}{16} H^4 + \lambda \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds
\end{aligned}$$

si, y sólo si

$$(1-\lambda)\int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds = \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds - \lambda \int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds = \frac{\lambda}{2}(H')^2 - \frac{27}{16}H^4$$

si, y sólo si

$$\int \lambda \frac{(H')^3}{H}\ ds = \frac{\frac{\lambda}{2}(H')^2 - \frac{27}{16}H^4}{1-\lambda} = -\frac{3}{14}(H')^2 - \frac{108}{112}H^4.$$

En consecuencia

$$0 = -\frac{1}{2}(H')^2 + \frac{3}{14}(H')^2 + \frac{108}{112}H^4 + \frac{90}{16}H^4 = -\frac{2}{7}(H')^2 + \frac{738}{112}H^4$$

si, y sólo si

$$(H')^2 = \frac{369}{16}H^4.$$

Finalmente, en virtud de la ecuación 3.26 resulta

$$cH^{\frac{7}{2}} - 36H^4 = (H')^2 = \frac{369}{16}H^4,$$

luego

$$cH^{\frac{7}{2}} = \frac{576}{16}H^4 + \frac{369}{16}H^4 = \frac{945}{16}H^4,$$

lo cual implica que

$$c^2 H^7 = \left(\frac{945}{16}\right)^2 H^8,$$

lo cual a su vez es equivalente a que

$$\left(\frac{945}{16}\right)^2 H^8 - c^2 H^7 = 0,$$

lo cual implica que $H$ es una raíz de un polinomio de grado 8. Por lo tanto $H$ toma un número finito de valores reales y en consecuencia es una función constante pues es continua. Pero esto último es una contradicción. En consecuencia la hipersuperficie no es biarmónica. $\square$

**Lema 4.3.** *Hipersuperficies $O(2) \times O(2)$-invariantes de $\mathbb{R}^4$ con curvatura media no constante, como se describen en la proposición 3.18, no son biarmómicas.*

*Demostración.* Asumamos que tal hipersuperficie es biarmónica. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el vector de posición está dado por

$$\bar{x}(u, v, s) = (x(s)\cos u, x(s) sen\ u, y(s)\cos v, y(s) sen\ v),$$

donde la curva $(x(s), y(s))$ es de rapidez unitaria y $x(s)y(s) > 0$. Las funciones $x(s)$ y $y(s)$ son no constantes porque el vector de curvatura media se ha supuesto no constante.

En virtud de la fórmula $\frac{1}{3}(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}) = x''y' - x'y'' = \frac{x''}{y'}$ se sigue que

$$x'' = \frac{y'}{3}\left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}\right) \qquad \& \qquad y'' = \frac{x'}{3}\left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x}\right).$$

Como las curvaturas principales son $k_1 = -\frac{y'}{x}$, $k_2 = \frac{x'}{y}$ y $-\frac{3H}{2} = k_3 = x''y' - x'y''$, tenemos que

$$H = \frac{2}{9}\left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x}\right).$$

Calculando directamente la longitud de la segunda forma fundamental resulta

$$\begin{aligned} S &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{(y')^2}{x^2} + \frac{(x')^2}{y^2} + \frac{1}{9}\left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}\right)^2 = \frac{9(y')^2}{9x^2} + \frac{9(x')^2}{9y^2} + \frac{(y')^2}{9x^2} \\ &- \frac{2x'y'}{9xy} + \frac{(x')^2}{9y^2} = \frac{10(y')^2}{9x^2} + \frac{10(x')^2}{9y^2} - \frac{2x'y'}{9xy}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos localmente el laplaciano en términos de la parametrización de arriba. En efecto,

$$\bar{x}_1(u,v,s) = (-x(s)sen\ u, x(s)\cos u, 0, 0),$$

$$\bar{x}_2(u,v,s) = (0, 0, -y(s)sen\ v, y(s)\cos v),$$

$$\bar{x}_3(u,v,s) = (x'(s)\cos u, x'(s)sen\ u, y'(s)\cos v, y'(s)sen\ v),$$

$$g_{11}(u,v,s) = x^2(s) \quad \& \quad g_{22}(u,v,s) = y^2(s) \quad \& \quad g_{33}(u,v,s) = 1,$$

mientras que $g_{ij} = 0$ para cada $i \neq j$. Por lo tanto la matriz de $g$ y su matriz inversa $g^{-1}$ son las matrices

$$g = \begin{pmatrix} x^2(s) & 0 & 0 \\ 0 & y^2(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además $\det g = x^2y^2$. Sustituyendo estos valores en la expresión local para el laplaciano tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{x(s)y(s)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y(s)}{x(s)}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x(s)}{y(s)}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(x(s)y(s)\frac{\partial}{\partial s}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{x^2(s)}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{y^2(s)}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{x'(s)}{x(s)}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{y'(s)}{y(s)}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

Como $H$ no depende ni de $u$ ni de $v$, se sigue que al aplicarle el laplaciano obtenido anteriormente resulta

$$\Delta H = -\frac{x'}{x}H' - \frac{y'}{y}H' - H''.$$

Usando la fórmula $0 = \Delta H + SH$ y las fórmulas que expresan a $H$, $x''$ y $y''$ en términos de $x$ y $y$ y sus primeras derivadas tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (x')^2y'(12x^2y - 30y^3) + x'(y')^2(-12xy^2 + 30x^3) + x'(4xy^2 - 14x^3) \quad (4.1) \\ &+ y'(-4x^2y + 14y^3). \quad (4.2) \end{aligned}$$

La ecuación anterior nos dice que la función que está a la derecha de la igualdad es idénticamente la función cero. Pero la función de la derecha relaciona únicamente a las funciones $x$ y $y$ (pues $x'$ y $y'$ se pueden conocer por medio de $x$ y $y$). Luego, existe una función $F$ tal que $F(x(s), y(s)) = 0$ para cada $s$. Por lo tanto, existe una función, que llamaremos $Y$, tal que $y(s) = Y(x(s)) = (Y \circ x)(s)$ para cada $s$; o sea, $y = Y \circ x$. Aplicando la regla de la cadena a la composición anterior tenemos que $y'(s) = \frac{dY}{dx}(x(s))x'(s)$ para cada $s$. Es decir,

$$y' = \frac{dY}{dx}x',$$

donde el simbolo $\frac{dY}{dx}$ en realidad significa $\frac{dY}{dx} \circ x$.

Nótese que $y' = \frac{dY}{dx}x'$ es equivalente a $\frac{y'}{x'} = \frac{dY}{dx}$. Luego

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{dY}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2} = \frac{1}{\frac{(x')^2}{(x')^2}+\frac{(y')^2}{(x')^2}} = \frac{(x')^2}{(x')^2+(y')^2} = (x')^2.$$

Ahora obtendremos una tercera fórmula. En efecto, primero observemos que

$$\frac{dY}{dx}y' + x' = \frac{y'}{x'}y' + x' = \frac{(y')^2}{x'} + \frac{(x')^2}{x'} = \frac{1}{x'}.$$

Por otra parte, derivando $y' = \frac{dY}{dx}x'$ una vez más obtenemos $y''(s) = \frac{d^2Y}{dx^2}(x(s))(x')^2(s) + \frac{dY}{dx}(x(s))x''(s)$ para cada $s$; es decir, $y'' = \frac{d^2Y}{dx^2}(x')^2 + \frac{dY}{dx}x''$. Multiplicando la ecuación anterior por $x'$ resulta que

$$x'y'' = \frac{d^2Y}{dx^2}(x')^3 + \frac{dY}{dx}x'x'' = \frac{d^2Y}{dx^2}(x')^3 - \frac{dY}{dx}y'y''$$

si, y sólo si

$$\frac{d^2Y}{dx^2}(x')^3 = x'y'' + \frac{dY}{dx}y'y'' = y''\left(\frac{dY}{dx}y' + x'\right) = y''\frac{1}{x'}$$

si, y sólo si

$$y'' = \frac{d^2Y}{dx^2}(x')^4 = \frac{1}{\left[1+\left(\dfrac{dY}{dx}\right)^2\right]^2}\frac{d^2Y}{dx^2}.$$

Finalmente obtendremos una cuarta fórmula que nos será de utilidad posteriormente. En efecto,

$$\frac{x'}{3}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x'}{y}-\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}x'\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x'}{y}-\frac{y'}{x}\right)=x'y''-x''y'=\frac{y''}{x'}$$

si, y sólo si

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}\right)(x')^2=y''.$$

Empleando las anteriores dos identidades para $(x')^2$ y $y''$ se sigue que

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right]^2}\frac{d^2Y}{dx^2}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}\right)\left[1+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right]=\frac{d^2Y}{dx^2}. \tag{4.3}$$

Continuando con la demostración del lema, al dividir la fórmula 4.1 entre $x'$ obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= (x')^2\frac{dY}{dx}(12x^2y-30y^3)+(x')^2\left(\frac{dY}{dx}\right)^2(-12xy^2+30x^3)+(4xy^2-14x^3)\\ &+ \frac{dY}{dx}(-4x^2y+14y^3).\end{aligned}$$

Dividiendo una vez más la ecuación anterior entre $(x')^2$ resulta

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{dY}{dx}(12x^2y - 30y^3) + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2(-12xy^2 + 30x^3) + \left[1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right](4xy^2 - 14x^3) \\
&+ \frac{dY}{dx}\left[1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right](-4x^2y + 14y^3) \\
&= \left[(-4x^2y + 14y^3) + (12x^2y - 30y^3)\right]\frac{dY}{dx} + (-4x^2y + 14y^3)\left(\frac{dY}{dx}\right)^3 \\
&+ \left[(-12xy^2 + 30x^3) + (4xy^2 - 14x^3)\right]\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (4xy^2 - 14x^3) \\
&= (-4x^2y + 14y^3)\left(\frac{dY}{dx}\right)^3 + (-8xy^2 + 16x^3)\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (8x^2y - 16y^3)\frac{dY}{dx} \\
&+ 4xy^2 - 14x^3 \\
&= A_3(x,y)\left(\frac{dY}{dx}\right)^3 + A_2(x,y)\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + A_1(x,y)\frac{dY}{dx} + A_0(x,y),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A_3(x,y) = -4x^2y + 14y^3, &\qquad A_2(x,y) = -8xy^2 + 16x^3, \\
A_1(x,y) = 8x^2y - 16y^3, &\qquad A_0(x,y) = 4xy^2 - 14x^3.
\end{aligned}
$$

Las únicas funciones $Y$ que satisfacen la fórmula anterior y la fórmula 4.3 son las funciones $Y(x(s)) = x(s)$ o $Y(x(s)) = -x(s)$. Luego $y(s) = Y(x(s)) = x(s)$ o $y(s) = Y(x(s)) = -x(s)$ para cada $s$, es decir $y = x$ o $y = -x$. En consecuencia $H = 0$ en virtud de que $H = \frac{2}{9}\left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y}\right)$. Por lo tanto la hipersuperficie es mínima, lo cual es una contradicción pues la curvatura media se supuso no constante. $\square$

**Teorema 4.4.** *Toda hipersuperficie biarmónica de $\mathbb{R}^4$ es mínima.*

*Demostración.*

Como corolario del teorema 3.20 una $H$-hipersuperficie biarmónica en $\mathbb{R}^4$ debe ser una hipersuperficie con curvatura media constante, pero esto a su vez implica que la hipersuperficie debe ser mínima en virtud del corolario 1.32. $\square$

# Bibliografía


[1] T. Bröcker y K. Jänich, *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.

[2] M. Do Carmo y M. Dajczer, *Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 685-709.

[3] M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[4] R. Caddeo, S. Montaldo y C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of $S^3$*, Internat. J. Math. 12 (2001), 867-876.

[5] B. Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. 17 (1991), 169-188.

[6] B. Y. Chen, *Pseudo-riemannian geometry, $\delta$-invariants and applications*, World Scientific, 2011.

[7] B. Y. Chen, *Recent Developments of Biharmonic Conjecture and Modified Biharmonic Conjectures*, arXiv: 1307.0245v3, [math.DG] (2014).

[8] B. Y. Chen y S. Ishikawa, *Biharmonic surfaces in pseudo-euclidean spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A 45 (1991), 323-347.

[9] B. Y. Chen y G. D. Ludden, *Surfaces with Mean Curvature Vector Parallel in the Normal Bundle*, Nagoya Math. J. 47 (1972), 161-167.

[10] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series 13, Publish or Perish Inc., 1990.

[11] I. Dimitric, *Quadric representation and submanifolds of finite type*, Ph.D. Thesis, MSU, 1989.

[12] I. Dimitric, *Submanifolds of* $\mathbb{E}^n$ *with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 (1992), 53-65.

[13] A. Derdzinski, *Some Remarks on the Local Structure of Codazzi Tensors*, Lecture Notes in Math., 838 (1981), Springer-Verlag, 251-255.

[14] S. H. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence, *Linear Algebra*, 4th edition, Pearson, 2003.

[15] T. Hasanis y T. Vlachos, *Hypersurfaces in* $\mathbb{E}^4$ *with Harmonic Mean Curvature Vector Field*, Math. Nachr. 172 (1995), 145-169.

[16] D. Hoffman, *Surfaces of Constant Mean Curvature in Manifolds of Constant Curvature*, J. Diff. Geom. 8 (1973), 161-176.

[17] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A, 7 (1986), 130-144.

[18] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library, American Mathematical Society, 2002.

[19] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag New York Inc., 2002.

[20] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer-Verlag New York Inc., 1997.

[21] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry*, Series: Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., 1983.

[22] Y. L. Ou, *On conformal biharmonic immersions*, Ann. Global Anal. Geom. 36 (2009), no. 2, 136-142.

[23] Y. L. Ou y L. Tang, *On the Generalized Chen's Conjecture on Biharmonic Submanifolds*, Michigan Math. J. 61 (2012), 531-542.