

# “Flujo de acortamiento de curvas”

Gabriel Ruiz Hernández

gruiz@matem.unam.mx [www.matem.unam.mx/gruiz](http://www.matem.unam.mx/gruiz)

Instituto de Matemáticas, UNAM, México

EMALCA  
La Paz, Bolivia 2015

- El flujo de acortamiento de curvas (FAC) fue propuesto en 1956 por Mullins para modelar el movimiento de fronteras idealizadas.
- En 1978 Brakke estudio el flujo de curvatura media del cual el FAC es el caso uno dimensional.
- En 1986 los trabajos de Gage y Hamilton sobre curvas convexas planas le dieron un nuevo impulso al estudio del FAC.
- Este flujo es un precursor del flujo de Ricci usado para demostrar la conjetura de Poincare.

# Curvatura de una curva en el plano

Consideremos una curva parametrizada en el plano

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  la cual es regular es decir  $\gamma'(s) \neq 0$  para todo  $s$ .

Su curvatura en el punto  $\gamma(s)$  se define como

$$\kappa(s) = \frac{x_s y_{ss} - y_s x_{ss}}{(x_s^2 + y_s^2)^{3/2}}.$$

Notación:  $x_s := \frac{\partial x}{\partial s}$ ,  $x_{ss} := \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$ .

El vector  $N(s)$  ortogonal a  $\gamma$  y de longitud constante 1 está dado por

$$N(s) = \left( -\frac{y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}}, \frac{x_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} \right).$$

# Definición: Flujo de acortamiento de curvas (FAC)

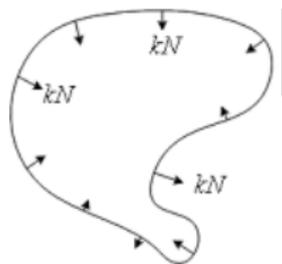
Dada una familia de curvas en el plano

$\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(\mathbf{s}, t) = \kappa(\mathbf{s}, t) N(\mathbf{s}, t),$$

se conoce como el *flujo de acortamiento de curvas*.

- $\kappa(\mathbf{s}, t)$  denota la curvatura de la curva  $\gamma_t$  en el parametro  $\mathbf{s}$ , es decir en el punto  $\gamma(\mathbf{s}, t)$ . Por notación  $\gamma(\mathbf{s}, t) \equiv \gamma_t(\mathbf{s})$ .
- $N(\mathbf{s}, t)$  denota el vector ortogonal a la curva  $\gamma_t$  en el punto  $\gamma(\mathbf{s}, t)$  y además  $N(\mathbf{s}, t) = 1$ .



# Como sistema de ecuaciones

$$x_t = -\frac{(x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^2} \quad (1)$$

$$y_t = \frac{(x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) x_s}{(x_s^2 + y_s^2)^2}. \quad (2)$$

# Ejemplo de una familia de círculos que evoluciona con el flujo de acortamiento de curvas

Consideremos la familia de círculos concéntricos:

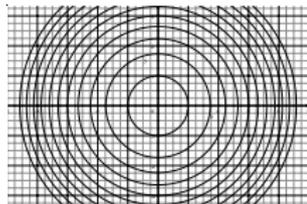
$$\gamma_t(s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s)) \text{ con } r(0) = 1.$$

Se puede ver que  $\kappa(s, t) = \frac{1}{r(t)}$ ,  $N(s, t) = -(\cos(s), \sin(s))$ .

La ecuación del FAC para  $\gamma(s, t)$  es equivalente a

$$r_t = -\frac{1}{r}.$$

La solución es  $r(t) = \sqrt{1 - 2t}$ , con  $t \in (-\infty, \frac{1}{2})$ . En  $T = \frac{1}{2}$  la familia de círculos se contrae a un punto.



# Soluciones inmortales, antiguas y eternas

- Si  $t \in (T, \infty)$ , se llama inmortal.
- Si  $(-\infty, T)$ , se llama antigua.
- Si  $t \in (-\infty, \infty)$ , se llama eterna.

El tiempo máximo de existencia  $t = T$  se llama singularidad y se produce cuando  $\gamma_t$  ya no es diferenciable o ya no es curva regular.

# Acortamiento en curvas cerradas

- Curva cerrada:  $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- Longitud:  $L(\gamma_t) = \int_{\mathbb{S}^1} \|\gamma'_t\| ds$ .

$$\frac{d}{dt}L(\gamma_t) = - \int_{\mathbb{S}^1} (\kappa(s, t))^2 ds.$$

Esta formula explica el nombre de este flujo ya que la longitud es decreciente.

Además,

$$\frac{d}{dt}\gamma_t = -\mathit{grad}(L)_\gamma.$$

# Caso $\gamma_t$ es gráfica para todo $t$

Supongamos que

$$\gamma_t(\mathbf{s}) = (x, y(x, t)) = (x(s, t), y(x(s, t), t)).$$

La curvatura de  $\gamma_t$  esta dada por

$$k(\mathbf{s}, t) = \frac{y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{3/2}}.$$

El vector ortogonal a  $\gamma_t$  y de longitud uno es

$$N(\mathbf{s}, t) = \frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}}(-y_x, 1).$$

Además,

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_t = (x_t, y_x x_t + y_t).$$

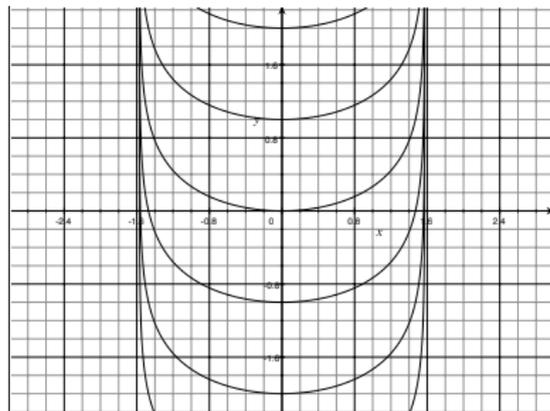
En este caso la ecuación diferencial del FAC se ve como

$$y_t = \frac{y_{xx}}{1 + y_x^2}.$$

# Ejemplo de Eugenio Calabi: "Grim reaper" o "La Parca"

$$y(x, t) = -\log(\cos(x)) + t$$

es una solución eterna, es decir  $t \in (-\infty, \infty)$ .

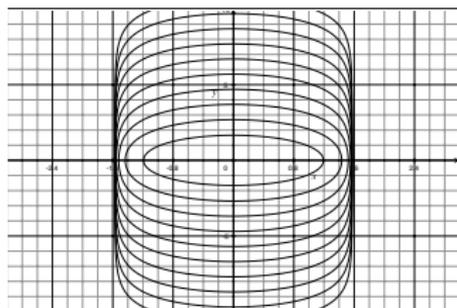


# Ovalos de Angenent

$$y(x, t) = t - \log(\cos x + \sqrt{\cos^2 x - e^{2t}})$$

con  $t \in (-\infty, 0)$  es decir esta solución es antigua.  
De manera equivalente:

$$\cosh y = e^{-t} \cos x.$$



## 1. Teorema de Gage y Hamilton 1986:

Si  $\gamma_0$  es una curva convexa, entonces

- $\gamma_t$  es convexa para todo  $t \geq 0$
- La solución  $\gamma_t$  esta definida para todo  $t \in [0, \frac{A(0)}{2\pi})$
- Cuando  $t \rightarrow \frac{A(0)}{2\pi}$  la curva  $\gamma_t$  se contrae a un punto mientras converge asintoticamente a un circulo.

## 2. Teorema de Grayson 1987:

Si  $\gamma_0$  es simple entonces  $\gamma_t$  se vuelve convexa antes de colapsar, es decir  $\gamma_t$  es convexa para todo  $t \geq t_c$  para algún  $0 \leq t_c \leq \frac{A(0)}{2\pi}$ .

Una solución  $\gamma_t$  se llama antigua si  $t \in (-\infty, T)$  para algún  $T$  máximo.

## **Teorema de Daskalopoulos-Hamilton-Sesum 2008:**

Existen sólo dos soluciones antiguas y convexas: Los círculos y los ovalos de Angenent.

## Definition

*Una solución  $\gamma_t$  se llama autosimilar si para todo  $t$  la curva  $\gamma_t$  se obtiene de  $\gamma_0$  por medio de una homotecia seguida de un movimiento rígido.*

*Es decir es de la forma*

$$\gamma_t(s) = r(t) \exp^{i\theta(t)} \gamma_0(s) + h(t),$$

*donde  $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  
 $r(0) = 1, \theta(0) = 0, h(0) = 0$ .*

Ejemplos:

- Círculos
- La Parca

# Halldorsson 2010: Clasificación de soluciones autosimilares

Toda solución autosimilar satisface la ecuación:

$$r^2(t)\theta'(t)\langle\gamma_0(s), T(s)\rangle+r(t)r'(t)\langle\gamma_0(s), N(s)\rangle+r(t)\langle\exp^{-i\theta(t)}h'(t), N(s)\rangle = \kappa,$$

donde  $T(s) = \gamma'_0(s)/|\gamma'_0(s)|$ .

Toda solución autosimilar es equivalente a una de las siguientes

- Traslación: La Parca
- Homotecia: Una familia unidimensional
- Contracción: Una familia unidimensional
- Rotación: Una familia unidimensional
- Rotación y homotecia: Una familia dos dimensional
- Rotación y contracción: Una familia dos dimensional

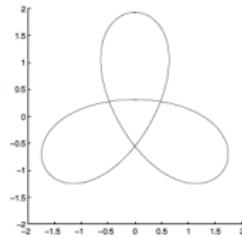


FIGURE 4.  $A = 0$ ,  $B = -1$  (shrinks) Abresch-Langer curve with  $p = 2$  and  $q = 3$ .

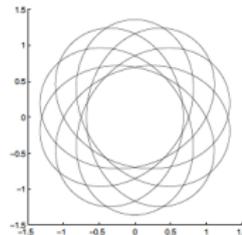


FIGURE 5.  $A = 0$ ,  $B = -1$  (shrinks) Abresch-Langer curve with  $p = 7$  and  $q = 10$ .

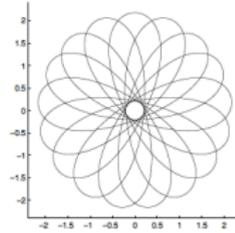


FIGURE 6.  $A = 0$ ,  $B = -1$  (shrinks) Albrecht-Langer curve with  $p = 20$  and  $q = 31$ .

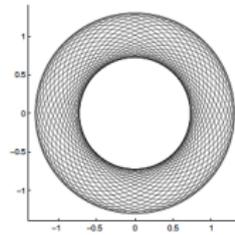


FIGURE 7.  $A = 0$ ,  $B = -1$  (shrinks) Albrecht-Langer curve where the values of  $p$  and  $q$  are very high.

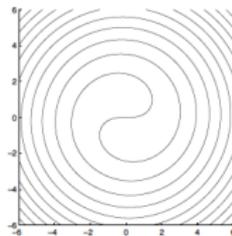


FIGURE 8.  $A = 1$ ,  $B = 0$  (rotates) The symmetric curve is Altshuler's yin-yang spiral.

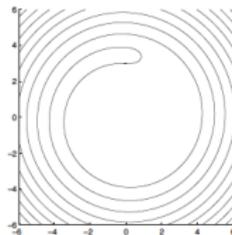


FIGURE 9.  $A = 1$ ,  $B = 0$  (rotates) As the distance to the origin increases, the tip of the spiral looks more and more like the Grim Reaper.

- 1 **J. Lauret, Evolución geométrica de curvas y métricas, Actas del XI Congreso Dr. Antonio Monteiro (2011). (Referencia Principal)**
- 2 C. Mooney, An introduction to curve-shortening and the Ricci flow Tesis doctoral, Stanford University 2001.
- 3 Z. Xi-Ping, The curve shortening problem Chapman-Hall 2001.
- 4 K. Ecker, Regularity theory for mean curvature flow Birkhauser 2004.
- 5 En internet se puede ver la evolucion de cualquier curva.  
<http://a.carapetis.com/csf/>
- 6 H. Halldorsson, Self-similar solutions to the curve shortening flow arxiv 2012.

# GRACIAS POR SU ATENCIÓN