

“Flujo de curvatura media en superficies”

Gabriel Ruiz Hernández

gruiz@matem.unam.mx www.matem.unam.mx/gruiz

Instituto de Matemáticas, UNAM, México

EMALCA
La Paz, Bolivia 2015

Curvaturas de una superficie en $\mathbb{R}^3$

Consideremos una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$

$X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

la cual es regular (la superficie esta inmersa), es decir los vectores

$$X_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$$

$$X_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

son linealmente independientes (para todo $(u, v) \in \Omega$).

Generan el plano tangente de la superficie en el punto $X(u, v)$.

Definimos

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$$e = \langle X_{uu}, N(u, v) \rangle, \quad f = \langle X_{uv}, N(u, v) \rangle, \quad g = \langle X_{vv}, N(u, v) \rangle$$

donde

$$N(u, v) = (X_u \times X_v) / |X_u \times X_v|.$$

Fórmula para la curvatura media y Gaussiana

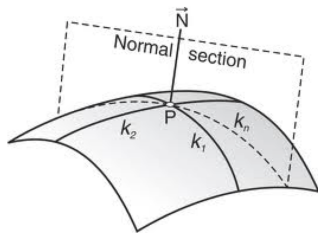
Curvatura media (invariante extrínseco)

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Curvatura Gaussiana (invariante intrínseco)

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Curvatura media de una superficie



La curvatura media de una superficie es una función definida por

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Ejemplo: Curvatura en gráfica de funciones

Consideremos la gráfica de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es una superficie con parametrización $X(x, y) := (x, y, f(x, y))$.

- $X_x = (1, 0, f_x)$, $X_y = (0, 1, f_y)$, $X_{xx} = (0, 0, f_{xx})$,
 $X_{xy} = (0, 0, f_{xy})$, $X_{yy} = (0, 0, f_{yy})$.

- $N(x, y) = (-f_x, -f_y, 1)/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

- $E = 1 + f_x^2$, $F = f_x f_y$, $G = 1 + f_y^2$

- $e = f_{xx}/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$, $f = f_{xy}/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$,
 $g = f_{yy}/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

- $EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$

- $eG - 2fF + Eg = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

La curvatura media de la gráfica de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $X(x, y) := (x, y, f(x, y))$ esta dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

De manera equivalente:

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

donde $\nabla f = (f_x, f_y)$ y $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$.

Flujo de curvatura media (FCM)

Dada una familia de superficies encajadas ($\equiv$ inmersas y X_t inyectiva) en $\mathbb{R}^3$ para todo t , $X_t : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial t} X(u, v, t) = H(u, v, t) N(u, v, t) \quad \textbf{Ecuación del FCM}$$

se conoce como el flujo de curvatura media. Donde $X_t(u, v) \equiv X(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))$

$$(x_t, y_t, z_t) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

Ejemplo: Una superficie mínima, es decir con curvatura media constante $H \equiv 0$.

Formalmente hay una ecuación de calor

En Geometría de superficies en $\mathbb{R}^3$ se prueba la ecuación $\Delta_{M_t} X_t = H_t$ donde $M_t = X(\Omega, t)$.

Podemos reescribir la ecuación del FCM:

$$\frac{\partial}{\partial t} X(u, v, t) = \Delta_{M_t} X_t, \text{ para todo } (u, v) \in \Omega.$$

Esferas concéntricas

Una familia de esferas concéntricas en el origen de radio $r(t)$:
 $x^2(u, v, t) + y^2(u, v, t) + z^2(u, v, t) = r^2(t)$ con $r(0) = \rho$.

- Curvatura media: $\frac{1}{r(t)}$.
- vector ortogonal de norma 1:
 $N(t) = -(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))/r(t)$

La ecuación del FCM queda como:

$$(x_t, y_t, z_t) = -(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))/r^2(t).$$

Haciendo producto interno de ambos lados por $(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))$:

$$r(t)r'(t) = -1.$$

La solución es: $r(t) = \sqrt{\rho^2 - 2t}$ es antigua, es decir esta definida en $t \in (-\infty, \rho^2/2)$.

Cilindros de revolución coaxiales

Una familia de cilindros coaxiales con eje z y radio $r(t)$:
 $x^2(u, v, t) + y^2(u, v, t) = r^2(t)$ con $r(0) = \rho$.

- Curvatura media: $\frac{1}{2r(t)}$.
- vector ortogonal de norma 1:
 $N(t) = -(x(u, v, t), y(u, v, t), 0)/r(t)$

La ecuación del FCM queda como:

$$(x_t, y_t, z_t) = -\frac{1}{2r^2(t)}(x(u, v, t), y(u, v, t), 0).$$

Haciendo producto interno de ambos lados por
 $(x(u, v, t), y(u, v, t), 0)$:

$$r(t)r'(t) = -1/2.$$

La solución es: $r(t) = \sqrt{\rho^2 - t}$ es antigua, es decir esta definida en $t \in (-\infty, \rho^2)$.

Soluciones homoteticas

Dada una parametrización de una superficie

$X_{t_0} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ podemos definir la familia de superficies como

$$X(u, v, t) = \lambda(t)X_{t_0}(u, v).$$

- $\frac{\partial X(u, v, t)}{\partial t} = \lambda'(t)X_{t_0}(u, v)$
- $H(u, v, t) = \frac{1}{\lambda(t)}H(u, v, t_0)$
- $N(u, v, t) = N(u, v, t_0)$.

La ecuación del FCM es:

$$\lambda'(t)X_{t_0}(u, v) = \frac{1}{\lambda(t)}H(u, v, t_0)N(u, v, t_0).$$

Esto implica que $a := \frac{d\lambda^2}{dt} = 2\lambda\lambda'$ no depende de t :

$$\lambda(t) = \sqrt{1 + a(t - t_0)}.$$

Nótese que

$$\lambda(t)\lambda'(t)\langle X_{t_0}(u, v), N(u, v, t_0) \rangle = H(u, v, t_0).$$

como $a := \frac{d\lambda^2}{dt} = 2\lambda\lambda'$ podemos reescribir la ecuación como

$$a/2\langle X_{t_0}(u, v), N(u, v, t_0) \rangle = H(u, v, t_0).$$

Esto motiva la definición de un self-shrinker.

"Self-shrinkers": Soluciones autosimilares de contracción

Un "self-shrinker" bajo el FCM es una superficie que satisface la ecuación diferencial

$$\langle X(u, v), N(u, v) \rangle = H(u, v),$$

donde $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la parametrización de la superficie.

Un self-shrinker genera una solución del FCM por medio de homotecias como se explica a continuación.

Ecuación equivalente a la de FCM

La ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} X(u, v, t) = H(u, v, t) N(u, v, t)$$

es equivalente a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} Y(u, v, t), N(u, v, t) \right\rangle N(u, v, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} Y(u, v, t) \right)^{\perp} = H(u, v, t) N(u, v, t).$$

Ya que si $Y(u, v, t)$ es una solución de esta ecuación modificada entonces

$$X(u, v, t) := Y(\phi(u, v, t), t)$$

es solución de la ecuación original del FCM,
donde $\phi_t : \Omega \rightarrow \Omega$ es una familia de difeomorfismos de Ω tal que

$$DY(\phi(u, v, t), t) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial t} Y(\phi(u, v, t), t) \right)^T.$$

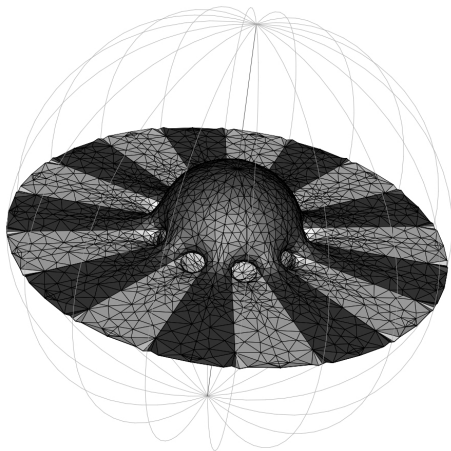
Moller 2012: Clasificación de self-shrinkers de revolución

Teorema

Si $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un self-shrinker de revolución, entonces es una de las siguientes superficies:

- *un plano*
- *una esfera*
- *un cilindro de revolución*
- *un toro encajado $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Ejemplo Ilmanen 1994



Self shrinker con simetria: Superficie de genero g .

Superficies compactas convexas evolucionan a un punto redondo: Huisken 84

El siguiente resultado es analogo al de curvas convexas en el FAC:

Teorema

Si la superficie inicial es compacta y convexa entonces la solución del FCM es una familia de superficies compactas convexas que convergen a un punto redondo en tiempo finito. Es decir, bajo un reescalamiento para mantener el area constante convergen a una esfera.

Evolución del area de superficies compactas bajo el FCM

Dada la familia de superficies

$X(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))$ que evoluciona con el FCM, el area en tiempo t es

$$A(t) = \int_{\Omega} \sqrt{E(u, v, t)G(u, v, t) - F(u, v, t)^2} du dv.$$

La variación del area en el tiempo satisface

$$\frac{d}{dt}A(t) = - \int_{\Omega} H(u, v, t)^2 du dv.$$

Esto nos dice que el area decrece.

Gráficas y Solitones de traslación

Supongamos que la solución del FCM es una familia de gráficas

$$X(u, v, t) = (x, y, f(x, y, t)) = (x(u, v, t), y(u, v, t), f(x(u, v, t), y(u, v, t), t))$$

$$H(u, v, t) = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

$$N(u, v, t) = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

La familia X_t es solución si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_{(x(u,v,t), y(u,v,t), t)}.$$

Si $f(x, y, t) = g(x, y) + t$, tales soluciones se llaman **Solitones de traslación**

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \right)_{(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}.$$

- Si $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un soliton de traslación y Ω es acotado entonces su gráfica no puede ser una superficie completa.
- Sólo hay tres tipos de gráficas de traslación completas:
Cuando $\Omega = \mathbb{R}^2$, una gráfica entre dos planos ó una gráfica de un lado de un plano.

- 1 K. Ecker, Regularity theory for mean curvature flow
Birkhauser 2004.
- 2 B. White, Evolutions of curves and surfaces by mean
curvature Proceedings of the International Congress of
Mathematicians, Beijing, 2002.
- 3 X. P. Zhu, Lectures on mean curvature flow
- 4 C. Mantegazza, Lecture notes in mean curvature flow
Birkhauser 2011.
- 5 S. Kleene, N. M. Moller, Self-shrinkers with a rotational
symmetry Trans. Amer. Math. Soc. (2011).
- 6 Y. I. Xin, Translating solitons of the mean curvature flow
Calculus of Variations and Partial Differential Equations
(2015).
- 7 Leili Shahriyari, Translating graphs by mean curvature flow
Geometriae Dedicata 2015 ó arXiv:1212.6418v2.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN