Clasificación de las métricas Einstein conformes en el grupo espacio-tiempo de Heisenberg

Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez

Universidade de Vigo

Trabajo conjunto con:

(a) Esteban

(b) Eduardo

(c) Ramón

Contenido

Motivación

$$\rho = \lambda g$$

El espacio actúa sobre la materia diciéndole como moverse, la materia reacciona diciéndole al espacio cómo curvarse

Relatividad especial vs general

- Espacio-tiempo en relatividad especial. (espacio $\mathbb{R}^4$ de Minkowski). Se rige por:
    1. La ley de la física es la misma para todos los observadores que se mueven a velocidad constante con respecto a otro.
    2. La velocidad de la luz es constante para todos los observadores y es independiente de la velocidad del objeto.

Relatividad especial vs general

- Espacio-tiempo en relatividad especial. (espacio $\mathbb{R}^4$ de Minkowski). Se rige por:
  1. La ley de la física es la misma para todos los observadores que se mueven a velocidad constante con respecto a otro.
  2. La velocidad de la luz es constante para todos los observadores y es independiente de la velocidad del objeto.
- Espacio-tiempo de relatividad general [1]. ((M, g) variedad Lorentziana de dimension 4)
  1. Incluye a la gravedad como una propiedad de la geometría del espacio-tiempo.
  2. La gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa y energía.

[1] W. Misner, S. Thorne, A. Wheeler, I. Kaiser, (2017). *Gravitation*. Princeton University Press.

Ecuaciones de campo de Einstein

$$\rho - \frac{1}{2}\tau g = T \tag{1}$$

donde T es el tensor energía/momento, es simétrico y 2-covariante. τ es la curvatura escalar, ρ la curvatura de Ricci y g la métrica.

Ecuaciones de campo de Einstein

$$\rho - \frac{1}{2}\tau g = T \qquad (1)$$

donde T es el tensor energía/momento, es simétrico y 2-covariante. τ es la curvatura escalar, ρ la curvatura de Ricci y g la métrica.

- $\rho - \frac{1}{2}\tau g$ es simétrico, ecs. en derv parciales en g.

Ecuaciones de campo de Einstein

$$\rho - \frac{1}{2}\tau g = T \qquad (1)$$

donde T es el tensor energía/momento, es simétrico y 2-covariante. τ es la curvatura escalar, ρ la curvatura de Ricci y g la métrica.

- $\rho - \frac{1}{2}\tau g$ es simétrico, ecs. en derv parciales en g.
- $\rho - \frac{1}{2}\tau g = 0$ describe el campo gravitacional en el vacío. Se puede obtener como la ecuación de Euler del problema variacional del funcional $\int_M \tau_g \, dVol$, en este caso decimos que la métrica es crítica.

Ecuaciones de campo de Einstein

Por **solución** de la Ecuación (1): una métrica g y un tensor T.

Ecuaciones de campo de Einstein

Por **solución** de la Ecuación (1): una métrica g y un tensor T.

- Si $T = 0$ (vacío), necesitamos encontrar g tal que $\rho - \frac{1}{2}\tau g = 0$.

Ecuaciones de campo de Einstein

Por **solución** de la Ecuación (1): una métrica g y un tensor T.

- Si $T = 0$ (vacío), necesitamos encontrar g tal que $\rho - \frac{1}{2}\tau g = 0$.
- La condición Ricci-llana en el espacio-tiempo describe soluciones en el vacío.

Ecuaciones de campo de Einstein

Por **solución** de la Ecuación (1): una métrica g y un tensor T.

- Si $T = 0$ (vacío), necesitamos encontrar g tal que $\rho - \frac{1}{2}\tau g = 0$.
- La condición Ricci-llana en el espacio-tiempo describe soluciones en el vacío.
- Espacio-tiempo (vacío) está descrito por geometrías que satisfacen $\rho = \lambda g$.

Funcionales

Funcional curvatura escalar total:

$$g \mapsto \int_M \tau_g \, dVol$$

Para mostrar la existencia de métricas de Einstein se puede intentar encontrar los puntos críticos del funcional.

- Los métodos variacionales por sí solos son muy complicados.
- Se requieren suposiciones geométricas sobre la variedad para abordar estos métodos.

[2] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer 2007.

Funcionales

La geometría conforme: diferentes enfoques para modificar la gravedad.

La gravedad conforme: teorías de la gravedad que son invariantes bajo transformaciones conformes. La teoría más simple tiene al cuadrado de la norma del tensor de Weyl como el Lagrangiano:

$$g \mapsto I(g) = \int d^4x\sqrt{-g}\|W\|^2 + I_m$$

donde el Lagrangiano es justo la curvatura escalar. La ecuación de movimiento al variar la métrica es $\mathfrak{B} = 0$.

Funcionales

El tensor de Bach es el gradiente del funcional dado por la norma L^2 del tensor de Weyl:

$$g \mapsto \int_M \|W\|^2 dVol.$$

El tensor de Bach es el gradiente del funcional dado por la norma L^2 del tensor de Weyl:

$$g \mapsto \int_M \|W\|^2 dVol.$$

Definición
Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión cuatro.
(M, g) se dice **Bach-llana** si el tensor de Bach

$$\mathfrak{B} = \operatorname{div}_2 \operatorname{div}_4 W + \frac{1}{2} W[\rho]$$

se anula.

Métricas conforme Einstein (CE)

Una variedad (M, g) se dice **conforme Einstein** si para todo punto $p \in M$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ y una función diferenciable $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, de tal manera que $\overline{\mathbf{g}} = \varphi^{-\mathbf{2}}\mathbf{g}$ es una **métrica de Einstein definida localmente**.

Teorema [Brinkmann]

Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es **conforme Einstein** si y solo si, la siguiente ecuación tiene solución positiva:

$$(n-2)\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \frac{1}{n}((n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau)g. \tag{2}$$

[3] H. W. Brinkmann, *Riemann spaces conformal to Einstein spaces*, Math. Ann. **91** (1924), no. 3-4, 269–278.

Teorema [Brinkmann]

Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es **conforme Einstein** si y solo si, la siguiente ecuación tiene solución positiva:

$$(n-2)\,\mathrm{Hes}_{\varphi} + \varphi\rho = \frac{1}{n}((n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau)g. \tag{2}$$

En el caso **Riemanniano** si las **soluciones** existen, son **únicas** (caso no-conformemente plano).

[3] H. W. Brinkmann, *Riemann spaces conformal to Einstein spaces*, Math. Ann. **91** (1924), no. 3-4, 269–278.

[4] S. T. Yau, *Remarks on conformal transformations*, J. Differential Geometry **8** (1973), 369–381.

Teorema [Kozameh, Newman, Tod]

Sea (M, g) una variedad de dimensión cuatro tal que la métrica conforme $\bar{g} = \varphi^{-2} g$ es Einstein. Entonces

(i) $\boldsymbol{\mathfrak{B} = \mathrm{div}_2\,\mathrm{div}_4\, W + \frac{1}{2} W[\rho] = 0}$,

(ii) $\boldsymbol{\mathfrak{C} - W(X, Y, Z, \nabla\sigma) = 0}$,

donde $\sigma = -\log\varphi$, para alguna función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Recíprocamente, las condiciones (i) y (ii) son suficientes si (M, g) es débilmente genérica.

[5] C. N. Kozameh, E. T. Newman, and K. P. Tod, *Conformal Einstein spaces*, Gen. Relativity Gravitation **17** (1985), no. 4, 343–352.

Clasificar las métricas CE en dimensión cuatro para el caso homogéneo.

Clasificar las métricas CE en dimensión cuatro para el caso homogéneo.

- Caso Lorentziano sobre $H^3 \rtimes \mathbb{R}$

Grupos de Lie Lorentzianos

Variedades homogéneas

- Espacio homogéneo $M = G/H$
- Asociado al espacio homogéneo: $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de tal manera que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

Para un espacio homogéneo con una métrica invariante, las nociones geométricas las podemos estudiar en un punto de G/H.

Clasificación de variedades homogéneas

¿Cómo abordar el problema?

I. **Algebraico:** clasificación de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, donde $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p, q)$, tal que $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = p + q = \dim M$.

II. **Geométrico:** analizar las propiedades geométricas de las variedades homogéneas pseudo-Riemannianas y entender cuáles comparten.

I. Algebraico:

- El caso pseudo-Riemanniano fue abordado por Komrakov: descripción local con isotropía no trivial.

Cada realización de una 4-variedad homogénea pseudo-Riemanniana como G/H junto con la métrica invariante se corresponde con una estructura homogénea pseudo-Riemanniana distinta, excepto para el caso no-reductivo.

Variedades de Einstein homogéneas

- Las variedades de Einstein homogéneas Riemannianas en dimensión 4 son localmente simétricas.
- Si (M, g) es homogénea Riemanniana, completa y simplemente conexa de dimensión 4. Entonces (M, g) es simétrica o es isométrica a un grupo de Lie:
  (a) $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \times \mathbb{R}$, $SU(2) \times \mathbb{R}$
  (b) $\mathbb{R} \ltimes E(2)$ y $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$.
  (c) $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$.
  (d) $\mathbb{R} \ltimes H^3$.

[6] G. R. Jensen, *Homogeneous Einstein spaces of dimension four*, J. Differential Geometry **3** (1969), 309–349.
[7] L. Bérard-Bergery, *Les espaces homogènes riemanniens de dimension 4*, Riemannian geometry in dimension 4 (Paris, 1978/1979) **3** (1981), 40–60.

¿Qué pasa en el caso Lorentziano?

¿Qué pasa en el caso Lorentziano?

- Las métricas Lorentzianas invariantes por la izquierda sobre grupos de Lie no son necesariamente completas.

¿Qué pasa en el caso Lorentziano?

- Las métricas Lorentzianas invariantes por la izquierda sobre grupos de Lie no son necesariamente completas.
- La clase de los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión 4 conexos y simplemente conexos coincide con la clase de los grupos de Lie Riemannianos. Sin embargo, las métricas Lorentzianas inv. por la izq. son mucho más ricas:

- Un subespacio de un espacio vectorial Lorentziano hereda un producto interno que puede ser definido positivo, Lorentziano o degenerado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Un subespacio de un espacio vectorial Lorentziano hereda un producto interno que puede ser definido positivo, Lorentziano o degenerado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- El operador autoadjunto respecto a una métrica Lorentziana no necesariamente es diagonalizable.

- Sea $(G, <, >)$ un grupo de Lie Lorentziano de dimensión 4, donde $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$ y tal que la restricción de la métrica a $\mathfrak{g}_3$ es Lorentziana.

[8] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*. Adv. Math. **21**, 293–329(1976).
[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York (1983).

Extensiones Lorentzianas en groups de Lie

- Sea $(G, <, >)$ un grupo de Lie Lorentziano de dimensión 4, donde $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$ y tal que la restricción de la métrica a $\mathfrak{g}_3$ es Lorentziana.
- Operador de estructura $L(X \times Y) = [X, Y]$ donde $< X \times Y, Z >= \det(X, Y, Z)$.

[8] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*. Adv. Math. **21**, 293–329(1976).
[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York (1983).

Extensiones Lorentzianas en groups de Lie

- Sea $(G, <, >)$ un grupo de Lie Lorentziano de dimensión 4, donde $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$ y tal que la restricción de la métrica a $\mathfrak{g}_3$ es Lorentziana.
- Operador de estructura $L(X \times Y) = [X, Y]$ donde $< X \times Y, Z >= \det(X, Y, Z)$.
- L asegura $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$ que diagonaliza en el caso definido positivo.

[8] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*. Adv. Math. **21**, 293–329(1976).
[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York (1983).

Extensiones Lorentzianas en groups de Lie

- Sea $(G, <, >)$ un grupo de Lie Lorentziano de dimensión 4, donde $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$ y tal que la restricción de la métrica a $\mathfrak{g}_3$ es Lorentziana.
- Operador de estructura $L(X \times Y) = [X, Y]$ donde $< X \times Y, Z >= \det(X, Y, Z)$.
- L asegura $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$ que diagonaliza en el caso definido positivo.
- Si el producto interno es Lorentziano, L es no trivial y está definido por:

[8] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*. Adv. Math. **21**, 293–329(1976).

[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York (1983).

Ia. L **es real diagonalizable**. Existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal con e_3 temporal tal que $L(e_i) = \lambda_i e_i$

Ia. L **es real diagonalizable**. Existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal con e_3 temporal tal que $L(e_i) = \lambda_i e_i$

Ib. L **tiene autovalores complejos**. Existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal con e_3 temporal tal que

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0.$$

Ia. L **es real diagonalizable**. Existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal con e_3 temporal tal que $L(e_i) = \lambda_i e_i$

Ib. L **tiene autovalores complejos**. Existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal con e_3 temporal tal que

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0.$$

II. L **tiene una raíz doble de su polinomio mínimo**. Existe $\{u_1, u_2, u_3\}$ base pseudo-ortonormal tal que

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, < u_1, u_2 >=< u_3, u_3 >= 1.$$

III. L **tiene una raíz triple de su polinomio mínimo**. Existe $\{u_1, u_2, u_3\}$ base pseudo-ortonormal tal que

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, < u_1, u_2 >=< u_3, u_3 >= 1.$$

III. L **tiene una raíz triple de su polinomio mínimo**. Existe $\{u_1, u_2, u_3\}$ base pseudo-ortonormal tal que

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, < u_1, u_2 >=< u_3, u_3 >= 1.$$

III. L **tiene una raíz triple de su polinomio mínimo**. Existe $\{u_1, u_2, u_3\}$ base pseudo-ortonormal tal que

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, < u_1, u_2 >=< u_3, u_3 >= 1.$$

Fijaremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ con L el operador estructura de la subálgebra unimodular $\mathfrak{h}_3$.

Variedades de Einstein homogéneas lorentzianas

- La clasificación de las métricas Einstein inv. izq. lorentzianas en $H^3 \rtimes \mathbb{R}$ fueron descritas por Calvaruso y Zeim (ondas planas Ricci-llanas o $K = cte$ no positiva).
- Otro enfoque muestra que en dimensión 4 en el caso Lorentziano, las métricas de Einstein inv. izq. se dividen en:
  - Espacios simétricos
  - Ondas planas
  - Métricas inv. izq. que no se corresponden a ninguna de las anteriores.

[10] G. Calvaruso and A. Zeim, *Four-dimensional Lorentzian Lie groups*, Differential Geometry and its Applications **31** (2013), 496–509

Las variedades Lorentzianas que admiten un campo degenerado y paralelo $\mathcal{U}$ se dice *pp*-**wave** si su tensor curvatura satisface $R(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathcal{U}^{\perp}$.

Una variedad *pp*-wave es una **onda plana** (o plane-wave) si además, el tensor de curvatura es transversalemente paralelo $\nabla_X R = 0$, para todo $X \in \mathcal{U}^{\perp}$.

- Las variedades *pp*-waves en dimensión 4 son CE si y sólo si $\operatorname{div} W = 0$.
- Ondas planas son CE.

[11] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, and X. Valle-Regueiro, Isotropic quasi-Einstein manifolds, Classical Quantum Gravity. 36 (2019), 245005 (13pp).
[12] T. Leistner and P. Nurowski, Ambient Metrics for *n*-dimensional pp-waves, Comm. Math. Phys. 296 (2010), 881–898.

Clasificación CE en $H^3 \rtimes \mathbb{R}$

Analizamos todas las métricas Lorentzianas inv. izq. en $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ y obtenemos un resultado de classificación de las métricas Bach-llanas y CE.

1. Describimos las métricas CE no triviales.
2. Clasificamos las métricas Bach-llanas estrictas.
3. Obtenemos las métricas Bach-llanas no simétricas y *pp*-waves que no son localmente conformemente planas.

Estrategia

1. Analizar la ecuación CE y/o las ecuaciones tensoriales para ser CE.

Estrategia

1. Analizar la ecuación CE y/o las ecuaciones tensoriales para ser CE.
2. Dado que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es Lorentziano en $\mathfrak{g}$, la restricción a $\mathfrak{h}_3$ puede ser de signatura **degenerada**, **Riemanniana**, or **Lorentziana**. Estudiar cada caso.

Estrategia

1. Analizar la ecuación CE y/o las ecuaciones tensoriales para ser CE.
2. Dado que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es Lorentziano en $\mathfrak{g}$, la restricción a $\mathfrak{h}_3$ puede ser de signatura **degenerada**, **Riemanniana**, or **Lorentziana**. Estudiar cada caso.
3. Analizar cada situación del operador L.

Casos

1. subgrupo normal H^3 degenerado:
   1.1 $\mathfrak{h}'_3 = span\{v\}$ es nulo (3 casos).
   1.2 $\mathfrak{h}'_3 = span\{v\}$ es espacial (3 casos).
2. subgrupo normal H^3 Riemanniano.
3. subgrupo normal H^3 Lorentziano:
   3.1 L es diagonal de rango 1 con kernel definido positivo. Caso Ia.
   3.2 L es diagonal de rango 1 con kernel Lorentziano. Caso Ia.
   3.3 L es nilpotente en 2-pasos. Caso II.

Ejemplo: Caso 3.3

Existe $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ pseudo-ortonormal de $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ tal que $< u_1, u_2 >=< u_3, u_3 >=< u_4, u_4 >= 1$ y donde $\mathfrak{h}_3 = span\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\mathfrak{r} = span\{u_4\}$.

La estructura del álgebra de Lie está determinada por:

$$[u_1, u_3] = \varepsilon u_2, \quad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,$$

$$[u_2, u_4] = \gamma_4 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_5 u_1 + \gamma_6 u_2 - (\gamma_1 - \gamma_4) u_3.$$

Ejemplo: Caso 3.3

1. Analizar la condición Bach-llana: $\mathfrak{B} = \operatorname{div}_2 \operatorname{div}_4 W + \frac{1}{2} W[\rho] = 0$.
   Un cálculo directo del tensor de Bach muestra que:

$$\mathfrak{B}_{34} = -\frac{3}{4}\varepsilon\gamma_4\gamma_5^2$$

   - Si $\gamma_4 = \gamma_5 = 0$. Ejemplo Bach-llano ***pp***-wave, no simetrico y no localmente conformemente llano.
   - Si $\gamma_4 = 0$ con $\gamma_5 \neq 0$. Ejemplo Bach-llano estricto.
   - Si $\gamma_4 \neq 0$ con $\gamma_5 = 0$ se corresponde con el Teorema 1.2 (L.ii) y (L.iii).

Ejemplo: Caso 3.3

2. Analizar la condición de ser C-spacio: $\mathfrak{C} - \boldsymbol{W}(\cdot, \cdot, \cdot, \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$.
    - En el Caso (L.ii) encontramos un campo de vectores gradiente $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\lambda U_2} + \mathbf{4}\boldsymbol{U_4}$ tal que $\mathfrak{C} - \boldsymbol{W}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$.
    - No es débilmente genérico y por tanto, las condiciones no son suficientes para ser CE.

Bosquejo de la prueba CE para (L.ii)

Tenemos que analizar la ecuación CE:

$$2\,\mathrm{Hes}_{\varphi} + \varphi\rho = \frac{1}{4}(2\Delta\varphi + \varphi\tau)g. \tag{3}$$

- El campo de vectores grandiente para $\mathrm{div}_4 W - W(\cdot, \cdot, \cdot, \xi) = 0$ es $\xi = \lambda U_2 + 4U_4$, para alguna función suave λ.
- $\overline{g} = e^{-2\sigma} g$ es Cotton-llana y fijando $\xi = \nabla\sigma$, se tiene que $\nabla\varphi = \varphi\xi$
- $\mathrm{Hes}_{\varphi}(X, Y) = \varphi\{< X, \xi >< Y, \xi > + < \nabla_X \xi, Y >\}$

Sea $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ una base pseudo-ortonormal global obtenida de la base pseudo-ortonormal del álgebra de Lie correspondiente:

- $\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi \begin{pmatrix} d\lambda(U_1) + \lambda^2 + 4\alpha & 16 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$
- $\rho = - \begin{pmatrix} 8\alpha & 32 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}, \quad \Delta\varphi = 48\varphi$ y $\tau = -96$.
- $2\,\mathrm{Hes}_\varphi(U_1, U_1) + \varphi\rho(U_1, U_1) - \frac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\tau\}\langle U_1, U_1\rangle = 2\varphi(d\lambda(U_1) + \lambda^2)$.

- La métrica conforme determinada por una solución de las siguientes ecuaciones, es Einstein:

$$d\lambda(U_2) = d\lambda(U_3) = 0, \quad d\lambda(U_4) = -4\lambda, \quad d\lambda(U_1) = -\lambda^2,$$

- Más aún, la métrica conforme es Ricci-llana.

Teorema 1.2 Caso degenerado CE

Let $(H_3 \rtimes \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be a non-symmetric semi-direct extension of the Heisenberg group equipped with a left-invariant Lorentzian metric. Then, the metric is non-trivial conformally Einstein if and only if it is isomorphically homothetic to one of the following:

(D) The restriction of the metric to $\mathfrak{h}_3$ is degenerate and the metric is determined by

- (D.i) $[u_1, u_4] = u_1$, $[u_2, u_3] = u_1$, $[u_2, u_4] = u_2$.
- (D.ii) $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_1, u_4] = \varepsilon u_1$, $[u_2, u_3] = \alpha u_1$, $[u_2, u_4] = \varepsilon u_2$, with $\varepsilon^2 = 1$ and $\alpha \geq 0$.

Here $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ denotes a pseudo-orthonormal basis of $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ with $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$. Moreover, in all cases the left-invariant metrics are conformally equivalent to a Ricci-flat *pp*-wave.

Teorema 1.2 Caso Riemanniano CE
Let $(H_3 \rtimes \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be a non-symmetric semi-direct extension of the Heisenberg group equipped with a left-invariant Lorentzian metric. Then, the metric is non-trivial conformally Einstein if and only if it is isomorphically homothetic to one of the following:

(R) The restriction of the metric to $\mathfrak{h}_3$ is Riemannian and the metric is determined by

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha e_1 + e_3, \quad [e_3, e_4] = \alpha e_3, \quad \text{with} \quad \alpha > 0,$$

where $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ denotes an orthonormal basis of $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ with e_4 timelike. Moreover, the left-invariant metric is conformally equivalent to a Ricci-flat *pp*-wave.

Teorema 1.2 Caso Lorentziano CE

Let $(H_3 \rtimes \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a non-symmetric semi-direct extension of the Heisenberg group equipped with a left-invariant Lorentzian metric. Then, the metric is non-trivial conformally Einstein if and only if it is isomorphically homothetic to one of the following:

(L) The restriction of the metric to $\mathfrak{h}_3$ is Lorentzian and the metric is determined by

- (L.i) $[e_1, e_3] = -\alpha e_2$, $[e_1, e_4] = e_1 + \alpha e_2$, $[e_2, e_4] = e_2$, where $\alpha > 0$ and $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ denotes an orthonormal basis of $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ with e_3 timelike.
- (L.ii) $[u_1, u_3] = -u_2$, $[u_1, u_4] = 4u_1 + \alpha u_2$, $[u_2, u_4] = 4u_2$, where $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ denotes a pseudo-orthonormal basis of $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ with $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = \langle u_4, u_4 \rangle = 1$.
- (L.iii) $[u_1, u_3] = -u_2$, $[u_1, u_4] = -u_1$, $[u_2, u_4] = 3u_2$, $[u_3, u_4] = 4u_3$, where $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ denotes a pseudo-orthonormal basis of $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$, with $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = \langle u_4, u_4 \rangle = 1$.

Moreover, in all cases but (L.iii) the left-invariant metrics are conformally equivalent to a Ricci-flat *pp*-wave.

Gracias por su atención