

Acciones por isometrías
en variedades (y otros espacios métricos)

Jesús Núñez Zimbrón
Facultad de Ciencias
UNAM.

Financiado parcialmente por el proyecto
PAPIIT IN101322

7 - Diciembre de 2022

Idea de la teoría:

problema (difícil):

·) Clasificar o entender a la clase de variedades con $\sec > 0$

·) Muy pocos ejemplos de variedades con $\sec > 0$.

·) Conjetura de Hopf:
 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ no admite $\sec > 0$.

(abierta!)

Programa de Grove:

·) Clasificar o entender la clase de variedades con $\sec > 0$ y "muchísima simetría"

·) Conjetura de Hopf
con simetría circular

No existe una métrica en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ con $\sec > 0$ y que admita una acción por isometrías de $\mathbb{S}^1$.

(Hsiang-Kleiner, 1989)

Def. (X, d) espació mètric
 G gpo de lie.

$\mu : G \times X \rightarrow X$ continua
es una acció (izquierda) de G en X
($G \curvearrowright X$)

si

- 1) $ex = x \quad \forall x \in X$
- 2) $(gh) \cdot x = g(hx) \quad \forall g, h \in G, x \in X$
- 3) $\mu_g : X \rightarrow X$
 $\mu_g(x) = g \cdot x$ } es una isometría de X
(i.e. $d(x, y) = d(gx, gy)$)

En variedades riemannianas:

métrica riemanniana $g \rightsquigarrow$ distancia riemanniana d_g
 $d_g(p, q) = \inf_{\gamma: p \rightarrow q} \{l(\gamma)\}.$

Teorema (Myers - Steenrod, 1939 - Palais 1957)

1) isometría "métrica" $\Leftrightarrow$ isometría "riemanniana"
 $d(x, y) = d(\psi(x), \psi(y))$ $\langle u, v \rangle = \langle d\psi(u), d\psi(v) \rangle.$

2) $\text{Isom}(M)$ es un grupo de Lie
(compacto si M es compacta)

$\Rightarrow$ "muchas simetrías" $\rightsquigarrow$ "acciones 'grandes' de grupos de Lie por isometrías".

Nota: (Kazdan, Warner, 1975) Cualquier función C^∞ , $\leq: M \rightarrow \mathbb{R}$ negativa en algún punto es la curv. scalar de alguna métrica.

$\Rightarrow \exists$ variedades con $\text{Isom}(M) = \{e\}$.

y variedades no compactas con $\text{Isom}(M)$ cpto.

Definiciones y herramientas:

Noción de equivalencia:

$$G \curvearrowright X, \quad G \curvearrowright Y, \quad F: X \rightarrow Y$$

es G -equivariante si

$$F(g \cdot x) = g \cdot F(x). \quad \forall g \in G, x \in X.$$

Órbitas: $G(x) = \{ \underline{g \cdot x} \mid g \in G \}$

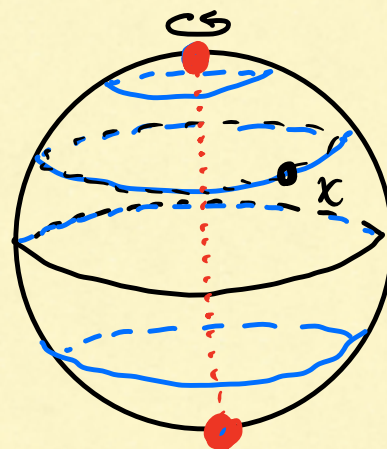
Isotropías: $G_x = \{ \underline{g \in G} \mid \underline{g \cdot x = x} \}.$

↑

Identificación natural:

$$G(x) \cong G/G_x$$

$$gG_x \mapsto g \cdot x \quad \text{es un difeomorfismo}$$



-) Cuando G es compacto,
 $G(x)$ es cerrada y $g \mapsto gx$ es encaje.

-) Si la acción es "propia" i.e.

$$\varphi: G \times M \longrightarrow M \times M$$

$$(g, x) \longmapsto (gx, x) \text{ es } \underline{\text{propia}}$$

preimagen de
ptos es cpta.

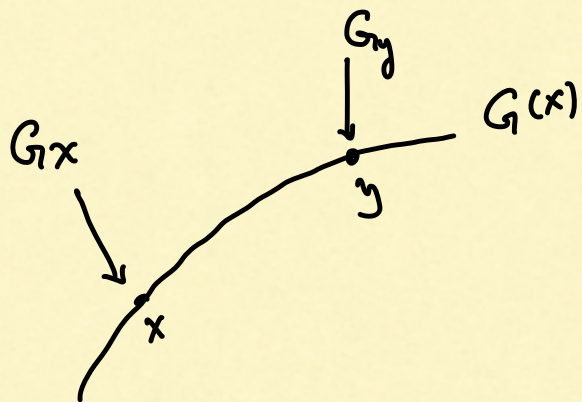
$\Rightarrow M/G$ es de Hausdorff.

$$(G \curvearrowright \Sigma \underset{\text{isom}}{\Leftrightarrow} G \underset{\text{propia}}{\curvearrowright} \Sigma)$$

-) Si p. ej. M cpta, G cpto,

μ es propia

-) Los "tipos" de órbita están ordenados.



$$g \in G_y, \quad h \in G \text{ tal que} \\ y = hx. \Rightarrow$$

$$hx = y = gy = ghx$$

$$\Leftrightarrow x = h^{-1}ghx$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}gh \in G_x$$

$$\Leftrightarrow g \in hG_xh^{-1}.$$

$$G_y \subseteq hG_xh^{-1}$$

-) Una órbita $G(x)$ es de tipo (H) donde $H \leq G$ es un grupo de isotropía, si G_x es conjugado de H .

-) $(H) \leq (K) \stackrel{\text{def}}{\iff} K \text{ es conjugado de un subgrupo de } H.$

-) Isotropía / órbita principal: Tipo más pequeño de isotropía. Teorema de órbita principal $\exists$ por
 $(\Rightarrow \text{órbita más grande})$

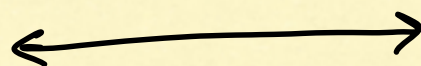
-) Se suele suponer que la acción es "efectiva":

$$\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$$

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\mu} & M \\ \downarrow & & \nearrow \tilde{\mu} \\ \frac{G}{\bigcap_{x \in M} G_x} \times M & & \end{array}$$

Burdamente :

$G \curvearrowright M$
propia
efectiva



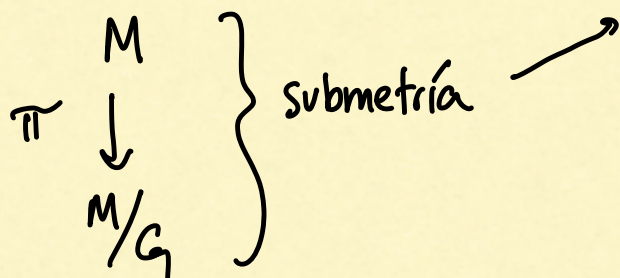
$G \leq \text{Isom}(M)$
(para alguna métrica)

Reducción de dimensión (con un precio a pagar)

M/G : métrica natural :

$$d_{M/G}(G(x), G(y)) = \inf \left\{ \underline{d_M(\hat{x}, \hat{y})} \mid \begin{array}{l} \hat{x} \in G(x) \\ \hat{y} \in G(y) \end{array} \right\}$$

proyección:



$$\forall x \in M, r \geq 0,$$

$$\pi(\bar{B}_M(x, r)) = \bar{B}_{M/G}(\pi(x), r)$$

Análogo métrico de submersión

•) M/G no necesariamente es variedad! $\left(\begin{array}{l} \mathcal{M} \text{ propia + libre} \\ \text{entonces sí.} \end{array} \right)$

M/G :

Variedad Riemanniana
Orbifold Riemanniano

Si M tiene $\sec \geq k$,

M/G es Alexandrov con $\text{curv} \geq k$

Si M tiene $\text{Ric} \geq k$

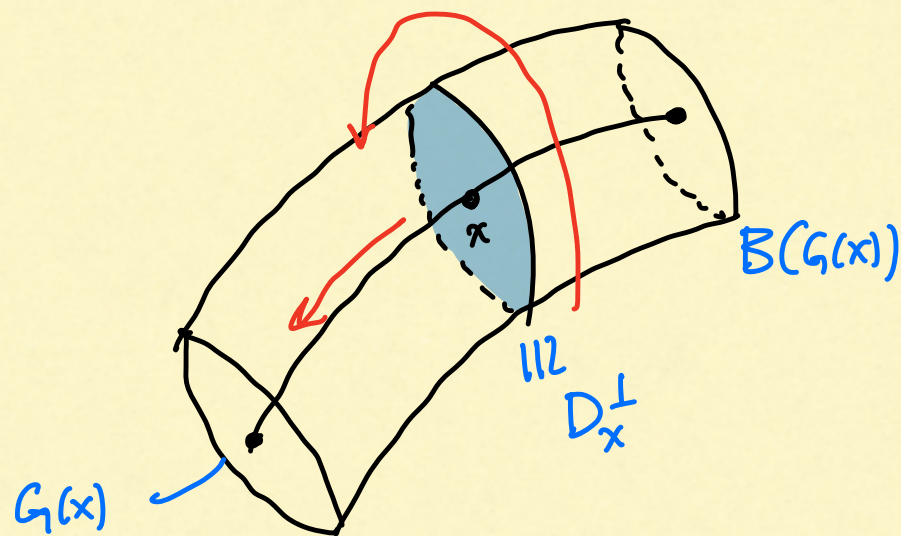
M/G es $\text{RCD}(N, k)$

(Galaz-García Kelj, Mondino, Sosa, 2018)

Identificación del espacio de órbitas

Teorema de la rebanada (Koszul 1957)

Para cada $x \in M$, una vecindad tubular suficientemente pequeña de la órbita $B(G(x))$ es equivariantemente difeomorfa a $G \times_{G_x} D_x^\perp$



$$G_x \curvearrowright G$$

$$G_x \curvearrowright D_x^\perp$$

localmente:

$$G/G_x \times D_x^\perp$$

Alexandrov:

órbita principal: Galat-García 2013
Guíjarro

Rebanada: Harvey-Searle 2017

Mucha Flexibilidad:

•) Podemos elegir:

Tipo de grupo: Finito, discreto, abeliano, cpto, loc. cpto.
(toros)

Tipo de espacio: Variedad, orbifold, Alex, RCD, CAT, etc.

tipo de acción: libre, transitiva, efectiva,
con/sin puntos fijos, etc

"cuánta simetría:"

$$\text{cohom}(M, G) := \dim(M/G) \quad G/H$$

$$\text{symrk}(M) := \text{rango}(\text{Isom}(M))$$

(si $\text{Isom}(M)$ es conexo y cpto:
dim de toro máximo)

codim de
órbita principal.

Algunos resultados:

Teorema (Hsiang - Kleiner, 1989) una variedad M^4 cerrada, simplemente conexa con $\sec \geq 0$ y una acción efectiva por isometrías de S^1 es homeomorfa a S^4 o $\mathbb{CP}^2$
(difeomorfa, Fintushe)

Teorema (Myers - Steenrod, 1939) M^n variedad riemanniana.
Entonces:

1) $\dim(\text{Isom}(M)) \leq \frac{n(n+1)}{2}$

$\dim(O(n))$
 $\downarrow$
Isometrías
de $(S^n, \text{redonda})$

2) si $\dim(\text{Isom}(M))$ es máxima $\Rightarrow M^n$ es
isométrica a $S^n, \mathbb{RP}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$
(con las métricas de $\sec \equiv \text{cte}$).

Prototipo de problemas :

Clasificación topológica (diferenciable, isométrica)

- o) Dada una clase de espacios $\mathcal{M}$, clasificar salvo isomorfismo a los G -espacios $X \in \mathcal{M}$.

Ejemplo: Hsiang-Kleiner

Clasificación equivariante

- o) Dado un G -espacio $X \in \mathcal{M}$, clasificar salvo isomorfismo equivariante, todas las posibles acciones de G .

Ejemplo: Teorema (Grove-Searle, 1994, Galaz-García 2009, Grove-Wilking 2014)

Alexandrov:
Harvey-Searle 2021

Toda acción efectiva por isometrías de S^1 sobre S^4 ó $\mathbb{CP}^2$ con $\sec \geq 0$ es equivalente a una acción lineal
↳ (equiv. difeomorfa)

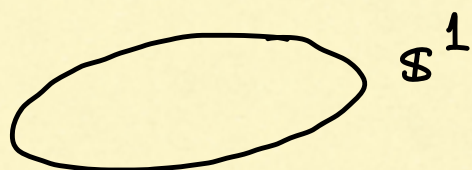
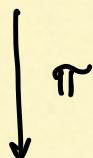
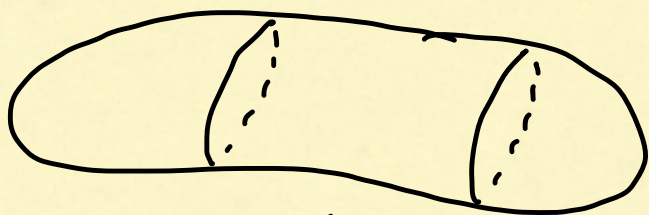
En términos de cohomogeneidad

$\text{cohom} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad M = G/H \text{ espacios homogéneos}$

$\text{cohom} = 1 \quad \rightsquigarrow$

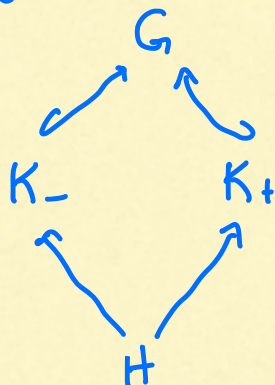
Mostert 1957, Neumann 1968, Hoelscher 2010,
Galaz-García, Searle 2011,
Galaz-García, Zarei 2018,

Alexandrov.

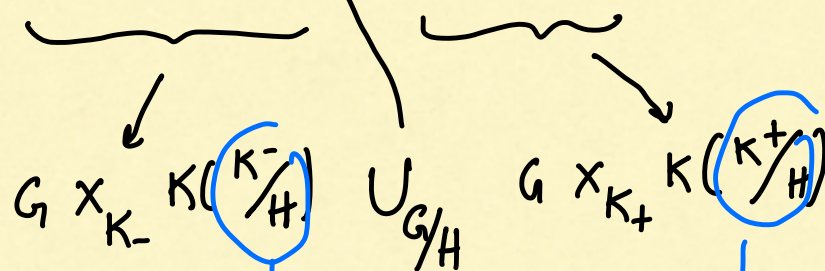
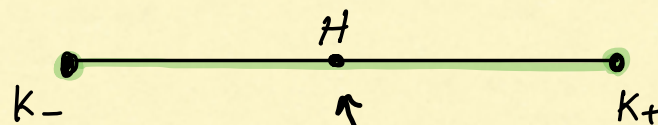
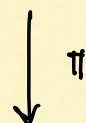
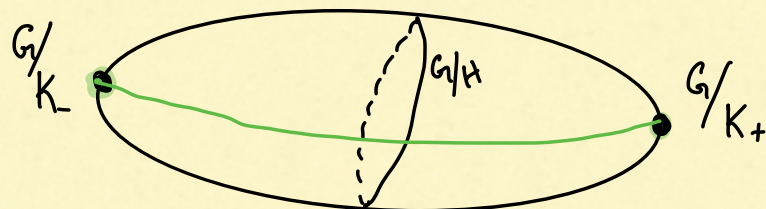


$\Rightarrow M = \text{fibrado sobre } S^1 \text{ con fibra } G/H$

Diagrama de grupos:



$$K^\pm/H = S^{l^\pm}$$



$$\cong S^{l^-}$$

$$\cong S^{l^+}$$

Fibrados con fibra discos.

Ejemplo de aplicación:

-) Grove - Ziller 2000, Goette, Kerin, Shankar 2020 : Si $G/\mathbb{K}^\pm$ tienen codim 2
 $\Rightarrow M$ admite $\text{sec} \geq 0$.
 $\Rightarrow$ 7-esferas exóticas admiten $\text{sec} \geq 0$.

-) Grove - Verdiani - Ziller 2011 : Nuevos ejemplos de variedades
Deanricott 2011 con $\text{sec} \geq 0$.
usando variedades de cohom 1.

cohom = 2 :

Raymond 1968, Orlik-Raymond 1972, dim 3.
Orlik-Raymond 1972, dim 4 orientables. equiv. + top.

Pao 1977 } dim 4 no-orientables
Kim 1993 } (clasificación topológica parcial).

Oh 1993 $T^3 \curvearrowright M^5$
(clasificación equivariante
topológica parcial)

Alexandrov: N2 2015, Galaz-García, N2 2018,
acciones locales

Corro, N2, Zarei 2022 : Alex orientables
con acción de T^2 .

clasificación equivariante.
topología parcial.

En términos de rango de
simetría

Teorema. (Grove-Searle 1994) M^n variedad riemanniana cerrada
con $\sec > 0$. Entonces

$$\text{symrk}(M) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

y si la igualdad se da,

$M^n \underset{\text{difeo}}{\cong}$ esfera, plano proyectivo real o complejo,
espacios lente.

Teorema. (Galaz-García, 2014): Cualquier acción de un
toro maximal en M^n con $\sec > 0$ y rango de simetría máximo
es equivalente a una acción lineal.

Una nota sobre cómo interpretar Simetría

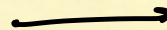
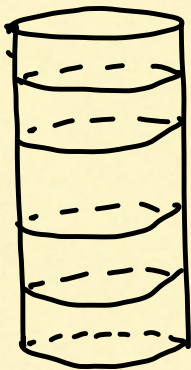
" $G \curvearrowright M$ "

→
relajación

"acción local" ó
"foliaciones singulares
riemannianas".

↳ quizás no
vienen de
acciones.

Colapso:



Una suposición de "simetría":

Teorema (Yamaguchi) $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $\sec M_i \gg -1$,

si $B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{GH} M_i$ existe y B es variedad riemanniana,
entonces para i suficientemente grande $\exists$ haz fibrado suave

$$\pi_i : M_i \rightarrow B$$

$$\text{con } 1 - \varepsilon_i < \frac{\langle u, v \rangle_{M_i}}{\langle d\pi_i(u), d\pi_i(v) \rangle_B} < 1 + \varepsilon_i.$$

Casi una submersión riemanniana

Alexandrov: Yamaguchi 90's, Fujio Ka 2019.

¡ Muchas gracias !

Acciones de cohomogeneidad baja

Jesús Núñez Zimbrón
Facultad de Ciencias
UNAM

9 - Diciembre - 2022.

Financiado parcialmente por el proyecto
PAPIIT IN101322

-) La vez pasada hablamos de acciones de cohomogeneidad 1.
-) Ahora hablaremos de cohomogeneidad 2.

En dimensión 3:

•) $G \curvearrowright M^3$ M cerrada, G conexo, cpto.
efectiva

•) $\text{cohom}(M, G) = 2. \Rightarrow \dim(M/G) = 2$

$\therefore \boxed{\dim G = 1}$

$\Rightarrow \boxed{G \cong \mathbb{S}^1.}$

-) (Raymond 1968, Orlik-Raymond 1972)
Clasificación de acciones del $\mathbb{S}^1$ sobre M^3 cerradas.

Teorema (Orlik-Raymond 1972) El conjunto de acciones (módulo difeomorfismo equivariante) efectivas en M^3 cerrada está en correspondencia 1-1 con un conjunto de invariantes

$$\{ b, \varepsilon, g, f, t, \{ (\alpha_i, \beta_i) \}_{i=1}^n \}$$

Maís aún, si $f > 0$, entonces M es equivariantemente homeomorfa a:

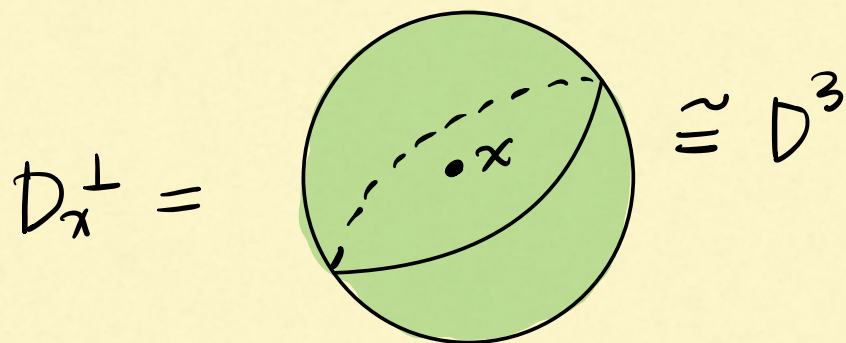
$$\mathbb{S}^3 \# \underbrace{\left(\# \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \right)}_{\psi(g, f, \varepsilon)} \# \underbrace{\left(\# \mathbb{S}^2 \tilde{\times} \mathbb{S}^1 \right)}_{\psi(g, f, \varepsilon)} \# \underbrace{\left(\# \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1 \right)}_t \# \left(\#_{i=1}^n L(\alpha_i, \beta_i) \right)$$

Ideas de la demostración:

posibles isotropías $\{e\}, \mathbb{Z}/k, \mathbb{S}^1$

puntos fijos

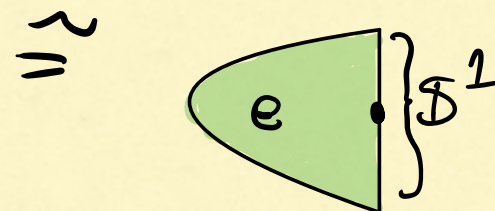
$$G(x) = \mathbb{S}^1 / \mathbb{S}^1 \cong \{pt\}$$



$$B(G(x)) = \mathbb{S}^1 \times_{\mathbb{S}^1} D^3$$

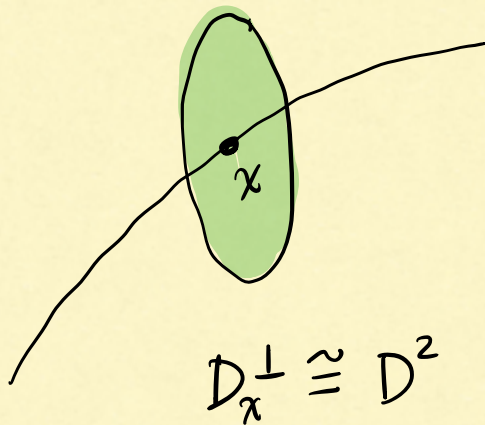
La acción de $\mathbb{S}^1$
sobre D^3 es
ortogonal
(Kerekjarto,
Neumann)

$$\therefore B(G(x)) / \mathbb{S}^1$$



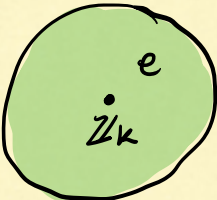
puntos excepcionales

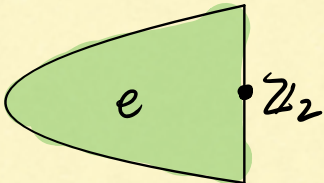
$$G(x) = S^1 / \mathbb{Z}_k \cong S^1$$



$G_x \cong \mathbb{Z}_k$ actúa en D^2
dos distintas formas:

① G_x preserva la orientación
local
 $\mathbb{Z}_k \curvearrowright D^2$ rotaciones.

① $B(G(x)) / S^1 \cong$ 

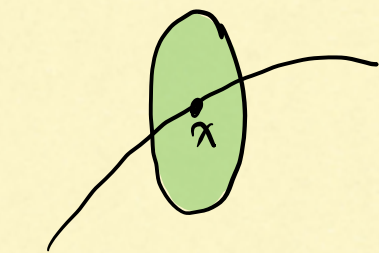
② $B(G(x)) / S^1 \cong$ 

② G_x invierte la orientación
local $\Rightarrow$
 $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}_2$ y

$\mathbb{Z}_2 \curvearrowright D^2$ reflexión
respecto a un
eje de D^2 .

puntos principales

$$G(x) = \mathbb{S}^1 / \{e\} \cong \mathbb{S}^1$$

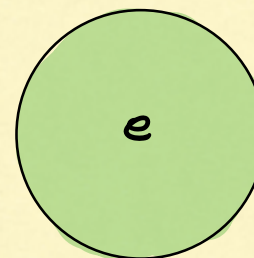


$$D_x \perp \cong D^2$$

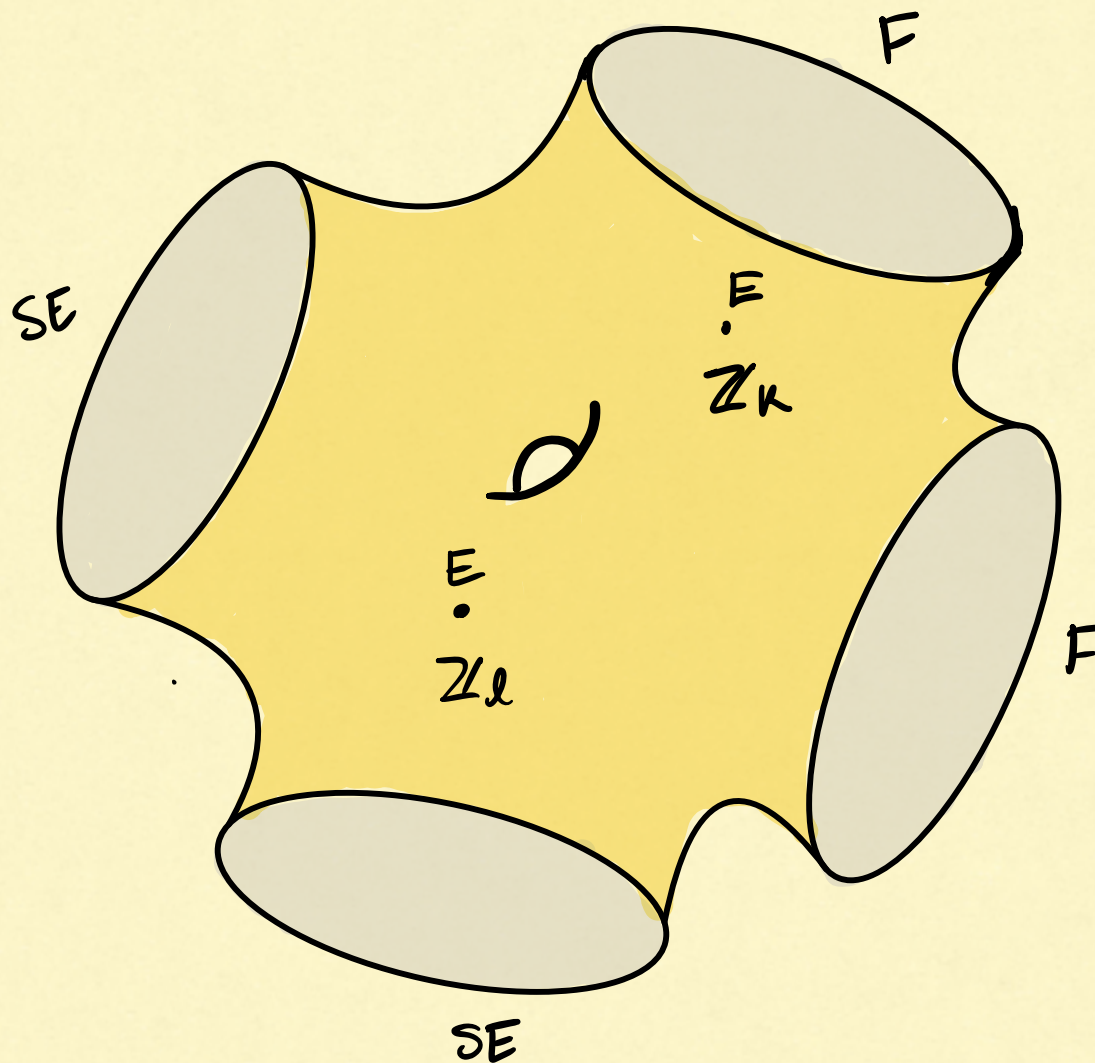
G_x actúa libremente sobre D^2 .

$\therefore$

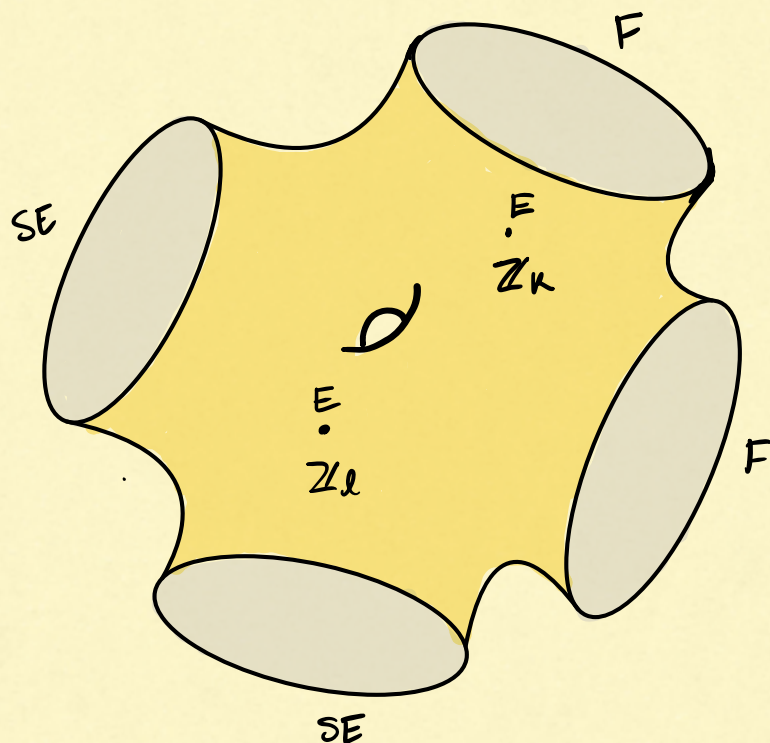
$$B(G(x)) / \mathbb{S}^1 \cong$$



Estructura del espacio de órbitas



Invariantes



$\varepsilon \in \{0, n\}$
 $\uparrow$ M/G orientable
 $\uparrow$ M/G no-orientable

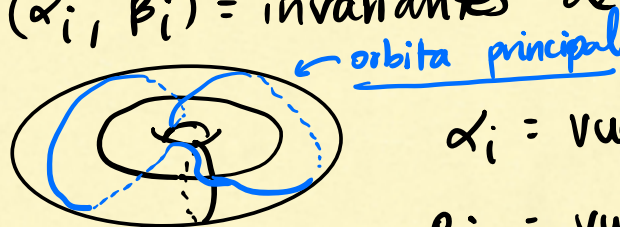
g = género de M/G .

f = # componentes de frontera de M/G que corresponden a F

t = # componentes de frontera de M/G que corresponden a SE

Nota: $\varepsilon, g, f+t$ caracteriza topológicamente a M/G .

(α_i, β_i) = invariantes de Seifert



α_i = vueltas así ↺

β_i = vueltas así ↻

b = obstrucción a que la parte principal sea un S^1 -haz principal trivial.

•) Para cada acción en M^3 , podemos "leer" los invariantes.

•) Dada una lista
 $\{ b, \varepsilon, g, f, t, \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n \}$

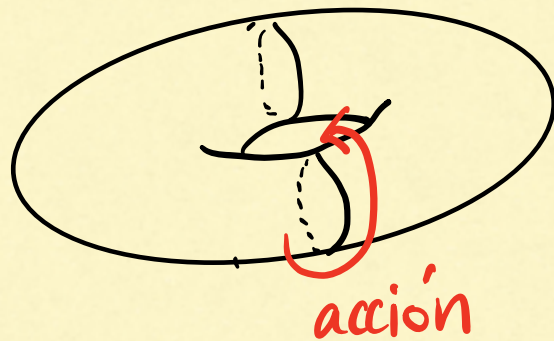
$\exists$ una variedad con una acción con exactamente estos invariantes.

•) Por simplicidad olvidemos b

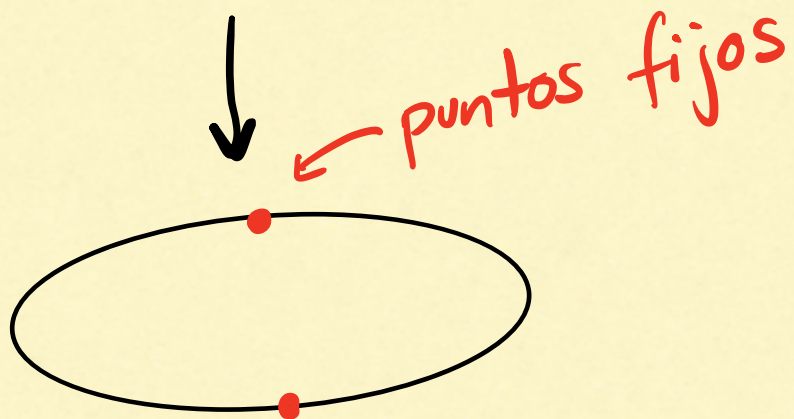
•) Sea M^* determinada por $\varepsilon, g, f+t$

•) Sea $\hat{M}^3 = M^* \times \mathbb{S}^1$ con la acción obvia en el factor $\mathbb{S}^1$

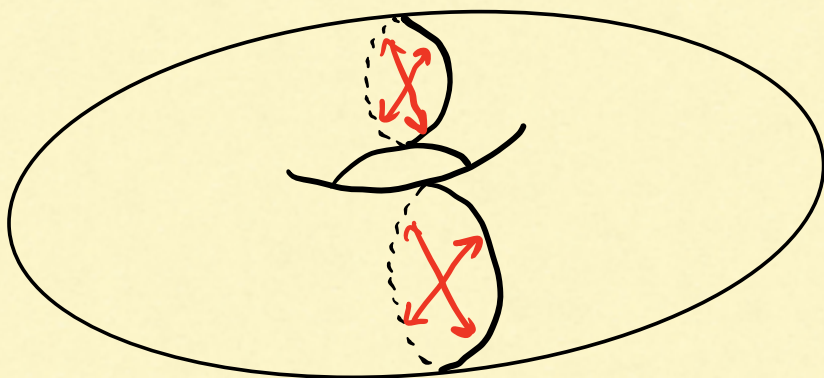
.) En f fronteras $S^1 \times S^1$:



"colapsamos" uno de los factores



-) En las otras t fronteras $S^1 \times S^1$:



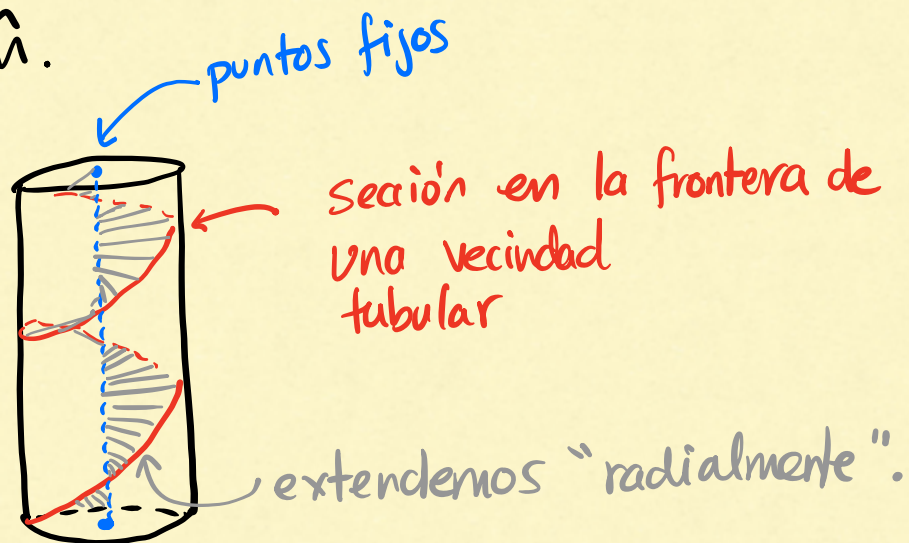
Identificamos
antipodos en el
segundo factor S^1

-) Para incorporar las órbitas excepcionales quitamos n discos de M^* y pegamos toros "fibrados" (α_i, β_i) a $\hat{M}$.

•) Para ver que la variedad obtenida es única :

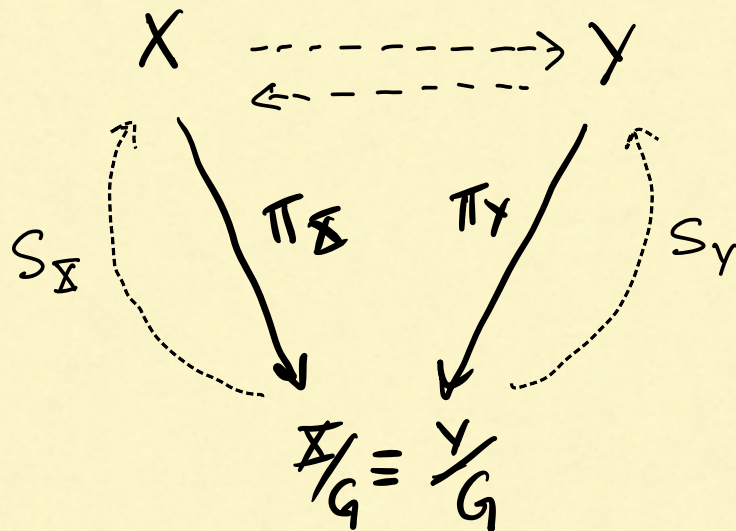
•) Hay una sección a la acción
en $M^* \times \mathbb{S}^1$ claramente

•) la sección se puede extender
a las fronteras tipo F y SE
en $\hat{M}$.



$\Rightarrow \mathbb{S}^1 \curvearrowright M^3$; si $E = \emptyset$, hay
una sección a la acción.

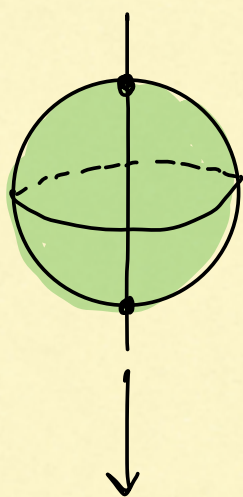
$$\mathbb{S}^1 \curvearrowright X \text{ con } E = \emptyset, \quad \mathbb{S}^1 \curvearrowright Y \text{ con } E = \emptyset$$



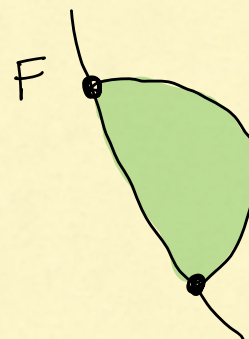
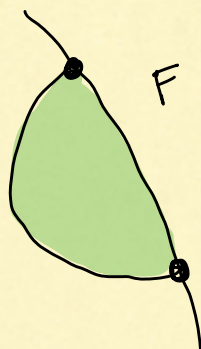
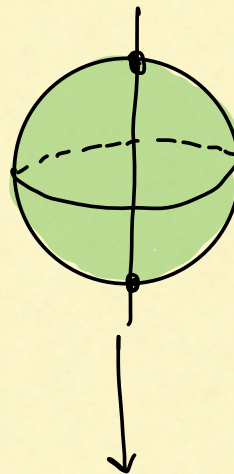
-) $\therefore$ Hay una única $\mathbb{S}^1$ -3-variedad M^3 que corresponde a los invariantes $\{b, \varepsilon, g, f, t, \phi\}$
-) Hay esencialmente una única manera de pegar las vecindades de órbitas excepcionales respetando los (α_i, β_i) .

clasificación Topológica

Si tenemos puntos fijos: en $M/\mathbb{S}^1$:

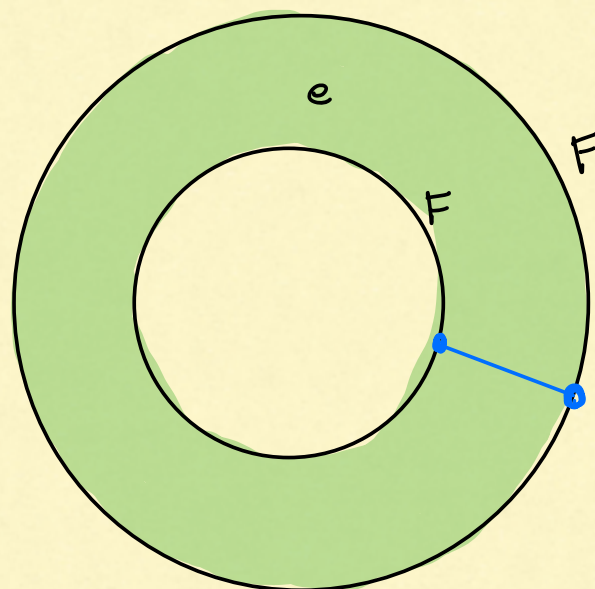


equivariante



•) Entonces separamos en piezas estandar :

p. ej. :



← se levanta a S^2
con acción por rotaciones

$$\text{Es } M = \{ b=0, \varepsilon=0, g=0, f=2, t=0, (\alpha_i, \beta_i) \neq \emptyset \}$$

$$\therefore M \cong S^2 \times S^1.$$



Extensiones:

He (2017) Clasificación equivariante y clasificación parcial
topológica de M^3 cpta con $\partial M \neq \emptyset$.

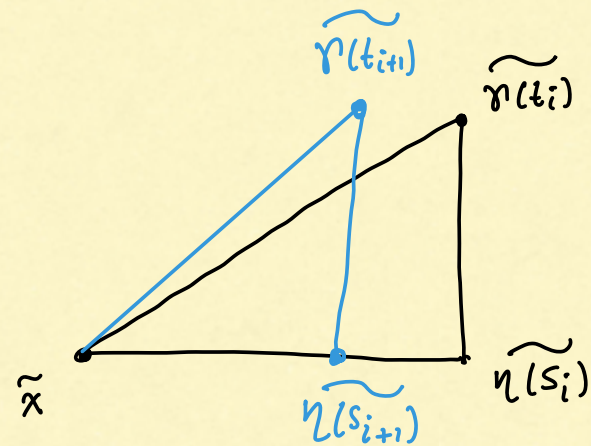
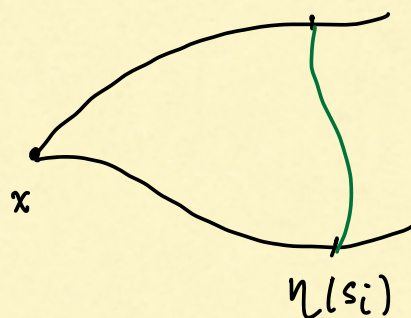
Galaz-García, Borrego, NZ, Palmas (2022) Clasificación equivariante
y topológica (con $F \neq \emptyset$)
de M^3 no-compacta y
 $\partial M \neq \emptyset$.

↖ con este trabajo está
esencialmente completa la
clasificación de S^1 -3-variedades.

El caso de Alexandrov

Algo de geometría de Alexandrov:

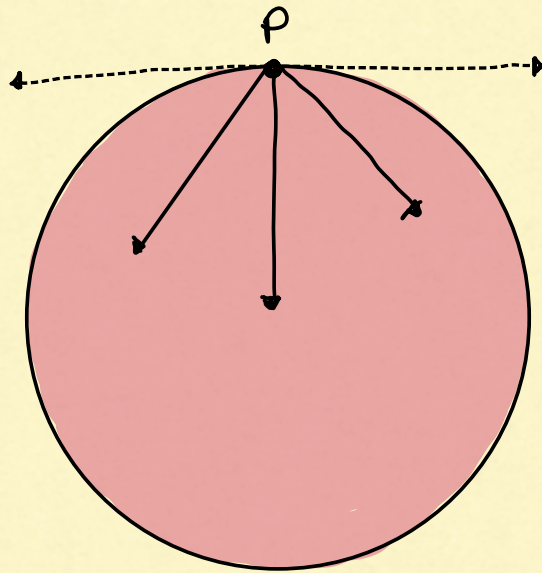
.) ángulos entre geodésicas



$$\angle(r, \eta) = \lim_{i \rightarrow \infty} \angle^{M_K^2}(\gamma(t_i), x, \eta(s_i))$$

.) $S_p = \{ [\gamma] \}$ donde $\gamma \sim \eta \iff \angle(\gamma, \eta) = 0$

•) S_p puede no ser completo



•) Consideramos $\Sigma_p = \overline{(S_p, \star)}$

Teorema (Burago, Burago, Perelman 1992) $\mathbb{X}$ Alexandrov, $p \in \mathbb{X}$. Entonces:

- (i) Σ_p es Alexandrov (curv ≥ 1)
- (ii) $\dim \Sigma_p = \dim \mathbb{X} - 1$
- (iii) $\mathcal{R} := \{p \in \mathbb{X} \mid \Sigma_p \cong \mathbb{S}^{n-1}\}$ es denso y abierto en $\mathbb{X}$.

Teorema (Perelman, 1994) (Vecindad cónica)
Para todo $p \in \mathbb{X}$, toda vecindad $B_\varepsilon(p)$ para ε suficientemente pequeño, es punteadamente homeomorfa a $K(\Sigma_p)$.

Teorema (Perelman 1994) $\text{Sing}(\mathbb{X}) := \mathbb{X} \setminus \mathcal{R}$ tiene

$$\text{codim}(\text{Sing}(\mathbb{X})) \geq 2$$

$$\left(\text{si } \partial \mathbb{X} = \emptyset \Rightarrow \text{codim}(\text{Sing}(\mathbb{X})) \geq 3 \right)$$

↑ Definida inductivamente.

En dimensión 3, para Σ cerrado

$\Rightarrow \dim \Sigma_p = 2 \Rightarrow \Sigma_p \cong \text{variedad topológica cerrada de dim 2}$
 (con una métrica de Alexandrov con $\text{curv} \geq 1$)

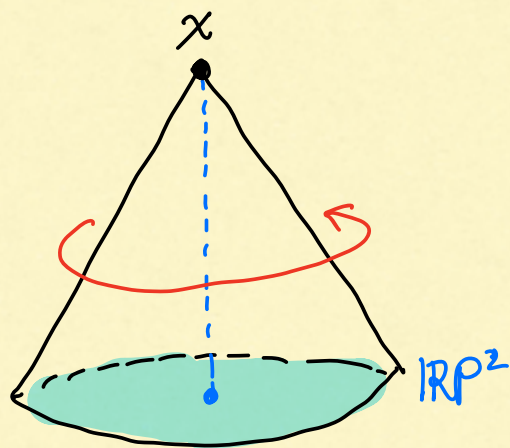
Bonnet-Myers (versión Alexandrov) $\Rightarrow |\pi_1 \Sigma_p| < \infty$
 $\Rightarrow \Sigma_p \cong \begin{cases} \mathbb{S}^2 \\ \mathbb{RP}^2 \end{cases}$

Vecindad cónica $\Rightarrow$
 + estimado de codimensión de Sing

Número finito de puntos con $\Sigma_p \cong \mathbb{RP}^2$. y

$$\Sigma \cong M^3 \cup \left(\bigcup_{i=1}^K K(\mathbb{RP}^2) \right).$$

Acciones de S^1 por isometrías en X



•) $x \in \text{Sing} \Rightarrow x$ es pto. fijo

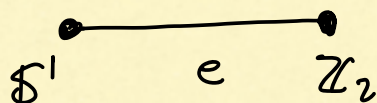
•) La acción conmuta con tomar cono :

$$K(\mathbb{RP}^2)/_{S^1} \cong K(\mathbb{RP}^2/_{S^1})$$

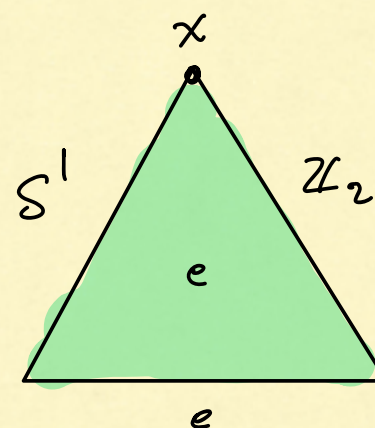
↑
acción
"ortogonal"

Espacio de órbitas :

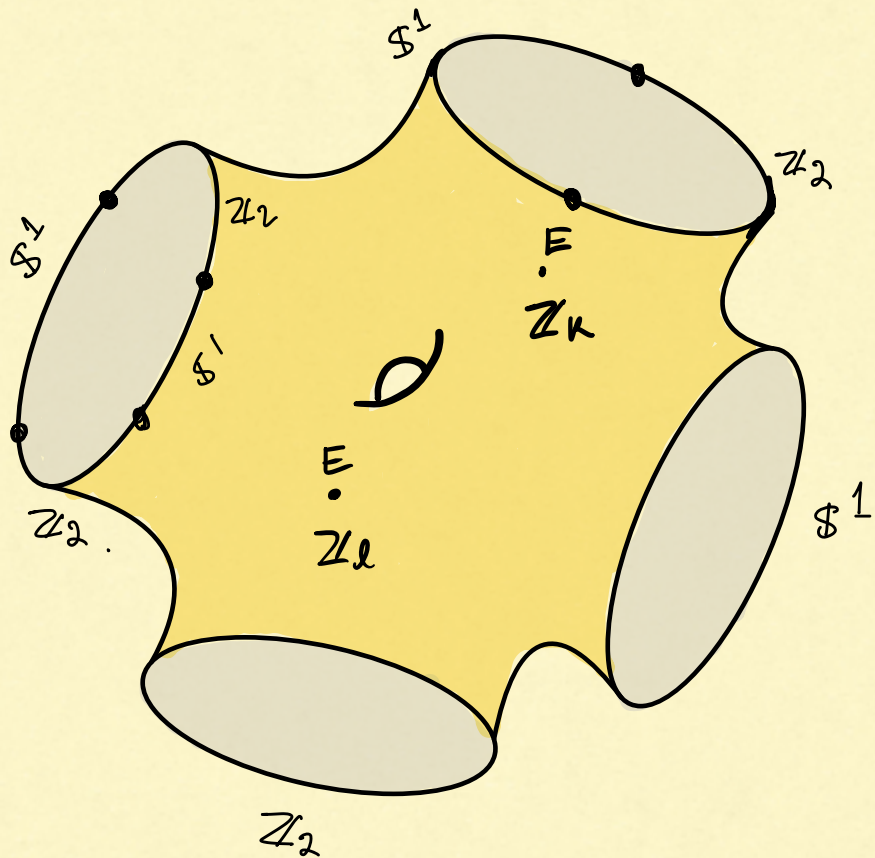
En cada "nivel" del cono,



$\Rightarrow$
tomando
cono



Estructura de $\mathbb{X}/\mathbb{S}^1$:



•) Nuevos invariantes:

$r_i = \#$ puntos singulares en la i -ésima componente de frontera de $\mathbb{X}/\mathbb{S}^1$.

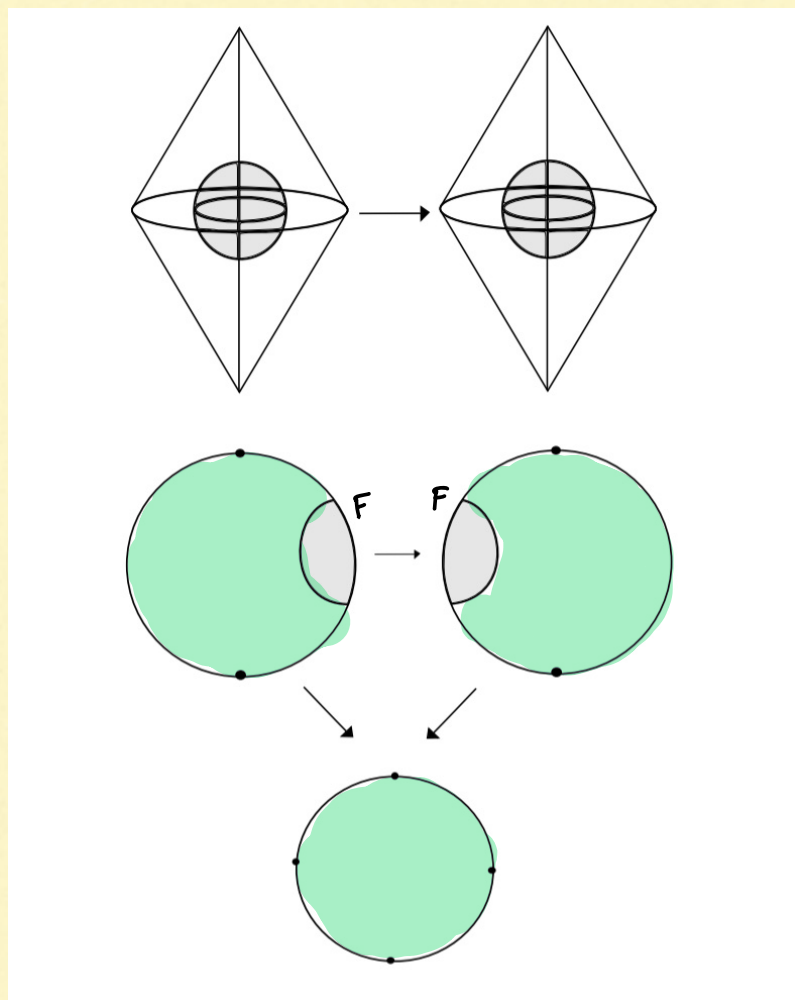
Teorema (Nz, 2015) El conjunto de acciones
(módulo difeomorfismo equivariante) efectivas en Σ^3 cerrado
está en correspondencia 1-1 con el conjunto de
invariantes

$$\{b, \varepsilon, g, f, t, \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n, (r_1, \dots, r_s)\}$$

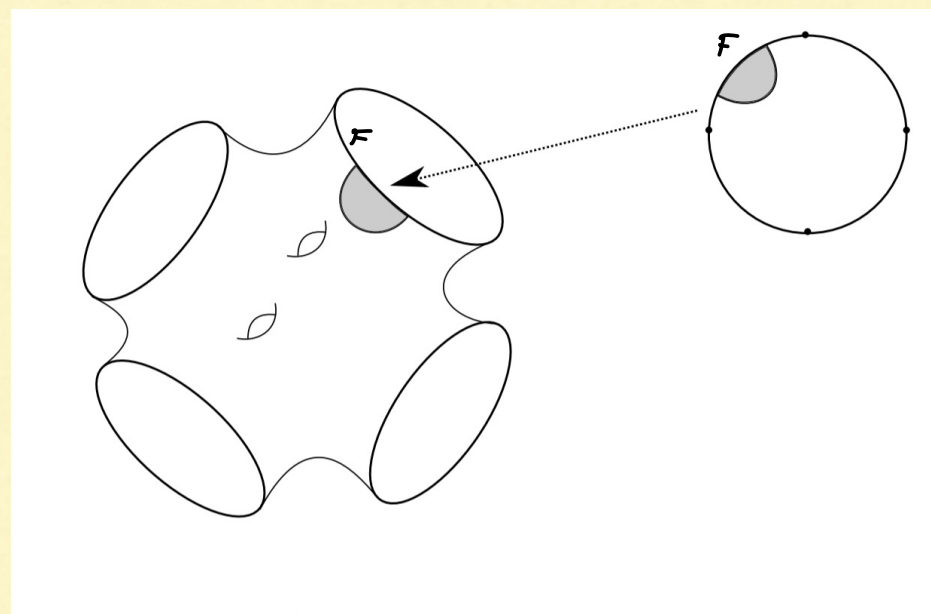
Más aún, Σ es equivariantemente homeomorfo a

$$\begin{matrix} M_{\text{Morlik}}^3 \\ \text{Raymond} \end{matrix} \# \text{Susp}(\mathbb{R}P^2) \# \dots \# \text{Susp}(\mathbb{R}P^2).$$

Idea de la clasificación topológica:



La variedad
 $\{(b, \varepsilon, g, \textcolor{blue}{f+s}, t, \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n)\}$
tiene al menos S círculos de
puntos fijos



Nota: No hay una clasificación de espacios de Alexandrov de dim 3 cerrados incluso en el caso simplemente conexo

Corolario (conjetura de Poincaré con acciones de S^1)

Los únicos X^3 cerrados y simplemente conexos con acción de S^1 por isometrías son

S^3 y $Susp(\mathbb{R}P^2) \# \dots \# Susp(\mathbb{R}P^2)$.

Otros resultados con "simetría"
en dimensión 3 ↪ (i.e. colapso).

Teorema (Galaz-García, Guijarro, NZ, 2017) Si X^3 es cerrado,
"irreducible" y "suficientemente colapsado" entonces X es geométrico
↓
↓
↓
Toda S^2 acota
una D^3 y
todo $\mathbb{RP}^2$ acota
a un $K(\mathbb{RP}^2)$.
↓
vol(X) es muy pequeño
respecto al diam(X)
↓
(cociente de
una de las
geometrías de
Thurston
excepto H^3)

$$\pi_k(X) = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Teorema (Bárcenas, NZ, 2019) Si X^3 es cerrado, asférico,
suficientemente colapsado, entonces X es homeomorfo a una
variedad.

(Implica la conjetura de Borel en esta situación).

*¡ Muchas
gracias !*