SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Una transformación continua $f : X \to X$ en un espacio métrico X define un sistema dinámico discreto al considerar sus iteraciones $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\ldots$.

Como en el caso de sistemas dinámicos continuos el objetivo es conseguir una descripción del comportamiento de la sucesión de iteradas f^k cuando $k \to \infty$. Los puntos con comportamiento más simple son los puntos fijos de f y en general los puntos periódicos, es decir puntos z para los cuales hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(z) = z$.

Los estudios de sistema dinámicos discretos y continuos están relacionados como lo podemos ver al considerar la transformacion de Poincaré $P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$ definida en la vecindad de un punto p, para el que $p = \varphi_T(p)$, $\tau(p) = T$. Es claro que p es un punto fijo de P. Supongamos z que es un puntos periódico de P con $P^k(z) = z$ y denotemos $z_j = P^j(z)$, entonces $z_2 = P(z_1) = \varphi_{\tau(z_1)}(z_1) = \varphi_{\tau(z)+\tau(z_1)}(z)$ y así sucesivamente $z_k = \varphi_{\tau(z)+\tau(z_1)+\ldots\tau(z_{k-1})}(z)$. Por lo que la órbita $\varphi_t(z)$ es periódica con periodo $\tau(z) + \tau(z_1) + \ldots \tau(z_{k-1})$.

En el capítulo 15 del libro se considera una función $f : I \subset R \to \mathbb{R}$. El análogo de un equilibrio hiperbólico es un punto fijo z o más generalmente de periodo k tal que $|(f^k)'(z)| \neq 1$. Cuando $|(f^k)'(z)| < 1$ el punto periódico es llamado atractor en el libro y cuando $|(f^k)'(z)| > 1$ es llamado repulsor. Denotando $z_j = f^j(z)$, por la regla de la cadena tenemos que

$$(f^k)'(z) = f'(z_{k-1}) \cdots f'(z).$$

Al igual que en sistemas dinámicos continuos, la hiperbolicidad se mantiene al perturbar el sistema, por lo tanto las bifurcaciones en el comportamiento local en la vecindad de un punto periódico ocurren sólo cuando este no es hiperbólico. En el libro se presentan las bifurcaciones de tipo *silla-nodo, intercambio y doblamiento del periodo* en ejemplos y de forma gráfica, no formal. Se espera que procedas de la misma manera en los ejercicios 2 y 4.

En general no se tiene que $f(I) \subset I$ por lo que no es posible tomar iteradas sucesivas de cualquier punto en I. Esto lleva a considerar el conjunto

$$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I) = \{x \in I : f^n(x) \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

En ejemplos de tipo expansivo, X es un conjunto similar al Cantor. En tales ejemplos $f^{-1} = I_1 \cup \cdots I_r$ donde los I_k son intervalos disjuntos. Se define

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1}) \cdots \cap f^{-n}(I_{s_n})$$

y se tiene que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I_{s_n})$ consiste de un solo punto p, el cual queda entonces caracterizado por su itinerario $f^k(p) \in I_{s_k}$, $k = 0, 1, \ldots$ o lo que es lo mismo por la sucesión $(s_0, s_1, \ldots)$. El itinerario de $f(p)$ está dado por la sucesión $(s_1, s_2, \ldots)$.

De esta forma el conjunto X es equivalente al conjunto Σ de sucesiones (s_k) y $f : X \to X$ es equivalenta a la transfomación $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ dada por $\sigma(s_0, s_1, \ldots) = (s_1, s_2, \ldots)$. La dinámica de σ se conoce como simbólica y es muy útil al estudiar un sistema dinámico caótico (definido en el libro).