SOBRE LAS TAREAS 2, 3 SDNL

1. Fuciones de Liapunov

Según el Teorema de establiidad de Liapunov, podemos probar la estabilidad de un punto de equilibrio z de $x' = f(x)$ encontrando una función V de clase C^1 definida en una vecindad de z que tenga un mínimo estricto en z. Se define $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$. Si probamos que $\dot{V}(x) \leq 0$ entonces z es estable. Si podemos probar que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq z$ entonces z es asintóticamente estable.

2. Sistemas gradiente y hamiltonianos

Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Un sistema de la forma $x' = -\operatorname{grad} V(x)$ se llama gradiente. Como $\dot{V} = -|\operatorname{grad}|^2$, si z es un mínimo local de V entonces z es un punto de equilibrio estable. De Cálculo saben que $\operatorname{grad} V$ es perpendicular a las superficies de nivel de V, lo que permite dibujar las trayectorias de un sistema gradiente, usando las superficies de nivel de V. La linealización de un sistema gradiente alrededor de un punto crítico z es

$$x' = -\operatorname{Hess} V(z)\, x = -D^2V(z)\ x.$$

Como $\operatorname{Hess} V(z)$ es una matriz simétrica, sus valores propios son reales, lo que excluye centros y espirales para esta linealización.

Sea $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Un sistema de la forma

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$$

se llama hamiltoniano y H se llama función hamiltoniana. Como $\dot{H} = 0$ tenemos que H permanece constante a lo largo de trayectorias del sistema hamiltoniano definido por H. Así las curvas de nivel están formadas por una o varias trayectorias del sistema hamiltoniano. La linealización de un sistema hamiltoniano alrededor de un punto crítico es

$$w' = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial^2 y} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}_z w.$$

La forma especial de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ nos dice como pueden ser sus valores propios (ejercicio 11).

En ambos casos del ejercicio 10, se trata de saber si una diferencial es exacta, lo que ya estudiaron en Cálculo.

3. Bifurcaciones

Si en una familia de ecuaciones diferenciales $x' = f_a(x)$ tenemos que x_0 es un equilibrio hiperbólico para $a = a_0$, entonces el comportamiento local de las trayectorias de la ecuación para a cercana a a_0 se preserva, por consiguiente las bifurcaciones del comportamiento local cerca de un equilibrio x_0, ocurren cuando no es hiperbólico. En una dimensión la condición para que x_0 no sea hiperbólico es que $f'_{a_o}(x_0) = 0$. Las condiciones 3 y 4 del Teorema de la bifurcación Silla-Nodo nos dan la situación menos degenerada.

La bifurcación de tipo tridente ya es más degenerada.

Observación 1 (Clave para el ejercicio 1)**.** En el ejemplo de la sección 8.5 del libro de una bifurcación de tipo tridente se tiene que $f_a(x) = xF_a(x)$ donde $x' = F_a(x)$ tiene una bifurcación Silla-Nodo en el origen para $a = 0$.

4. Teoría de Floquet

Por el ejercicio 5 de la tarea 1 si P_0 no es singular entonces la solución matricial $P(t)$ al PVI

$$P' = A(t)P, \; P(0) = P_0$$

no es singular nunca. En tal caso $P(t)$ se llama solución fundamental y cualquier otra solucion matricial $Q(t)$ se puede escribir como $Q(t) = P(t)C$ con C matriz constante. Si $A(t)$ es T-periódica y $P(t)$ es una solución matricial, entonces $P(t+T)$ tambien lo es y si $P(t)$ es solución fundamental $P(t+T) = P(t)C$ donde $C = P(0)^{-1}P(T)$. Los valores propios de C se llaman *multiplicadores característicos* del sistema lineal periódico. Cuando $P(0) = I$ tenemos que $C = P(T)$ que es a lo que se refiere la observación 1 en la tarea 3.

5. Conjuntos límite y Teoría de Poincaré-Bendixson

Los puntos de acumulación de una trayectoria cuando el tiempo se va a ∞ $(-\infty)$ forman el ω (α) límite de la trayectoria. Si toda la trayectoria para tiempos positivos (negativos) permanece en un conjunto compacto entonces el ω (α) límite esta contenido en ese compacto.

El Teorema de Poincaré-Bendixson establece que para un sistema dinamico en el plano, si toda una trayectoria positiva (negativa) esta contenida en un compacto y su ω (α) límite no contiene puntos de equilibrio entonces el ω (α) límite es una órbita periódica.

En la observación 2 de la tarea 3 se menciona una aplicación típica del Teorema de Poincaré-Bendixson que es la hay que efectuar en el ejercicio 5. La frontera de una región anular consiste de dos circunferencias, para demostrar que la region es positivamente invariante hay que probar que en la circunferencia interior (exterior) el campo apunta en la dirección creciente (decreciente) del radio vector.

6. Transformación de Poincaré

Si γ es una órbita T-periódica de la ecuacion $x' = f(x)$ y H es un hiperplano transversal a $f(\gamma(0))$ entonces la órbita de cualquier punto x cercano a $\gamma(0)$ intersecta H en un tiempo $\tau(x)$ cercano a T. Para una vecindad $V \subset H$ de $\gamma(0)$ la transformacion de Poincaré $P : V \to H$ se define como $P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$. En la observación 3 de la tarea 3 mencionamos que los valores propios de $D\varphi_T(\gamma(0)$ son $1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de $DP(\gamma(0)$. Por consiguiente $\det DP(\gamma(0)) = \det D\varphi_T(\gamma(0))$ lo que conduce a los incisos (b) y (c) del ejercicio 6. La sugerencia para el ejercicio 7 es usar lo que se obtuvo en el ejercicio 6.