Ejercicio 1. Encuentra el intervalo maximal de existencia (α, β) para los siguentes problemas de valores inciales (PVI) y en caso de que $\alpha > -\infty$ ó $\beta < \infty$ discute el límite de la solución cuando $t \to \alpha^+$ ó $t \to \beta^-$.

(a)
$$x' = x^2 \quad x(0) = 1$$
$$y' = y + x^{-1} \quad y(0) = 1$$

(b)
$$x' = (2x)^{-1} \quad x(0) = 1$$
$$y' = y^2 \quad y(0) = 1$$

(c)
$$x' = (2x)^{-1} \quad x(0) = 1$$
$$y' = x \quad y(0) = 1$$

Ejercicio 2. En cada uno de los incisos del ejercicio anterior comprueba explicitamente que

$$\varphi_t(\varphi_s(1,1)) = \varphi_{t+s}(1,1) \text{ si } s \in J(1,1), t \in J(\varphi_s(1,1)$$

Ejercicio 3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Utilizando la ecuación variacional aplicada al sistema

$$x' = f(x, \mu)$$
$$\mu' = 0,$$

obtén la ecuación diferencial que satisface $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, x, \mu)$, para el flujo φ definido por la primera ecuación que depende del parámetro μ.

Ejercicio 4. Usando el método de Runge-Kutta con $h = 0{,}1$, determina un valor aproximado de la solución a $t = 1$ para cada PVI. Repite el cálculo con $h = 0{,}025$ y compara con el valor de la solución.

1. $y' = 1 + t - y, y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
2. $y' = 2ty, y(0) = 2; \quad (y(t) = 2e^{t^2})$
3. $y' = 1 + y^2 - t^2, y(0) = 0 \quad (y(t) = t)$
4. $y' = te^{-y} + \dfrac{t}{(1+t^2)}, y(0) = 0; \quad (y(t) = \ln(1 + t^2))$
5. $y' = -1 = 2t + \dfrac{y^2}{(1+t^2)^2}, y(0) = 1; \quad (y(t) = 1 + t^2)$

Ejercicio 5. Sea $A(t)$ una función matricial cuadrada continua y sea $P(t)$ la solución matricial al PVI

$$P' = A(t)P, \; P(0) = P_0.$$

Muestra que $\det P(t)$ es solucion de $u' = \operatorname{Tr} A(t)u$ y que por consiguiente

$$\det P(t) = \det P_0 \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr} A(s) ds\right)$$

Ejercicio 6.

(a) Encuentra el flujo definido por $(x', y', z') = (-x, -y + x^2, z + y^2)$

(b) Muestra que la superficie estable y la curva inestable estan dadas respectivamente por

$$z = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{6}x^2 y - \frac{1}{30}x^4; \quad x = y = 0.$$

Ejercicio 7. Encuentra un cambio global de coordenadas que linealiza el sistema $(x', y', z') = (x + y^2, -y, -z + y^2)$

Ejercicio 8. Supongamos que el origen es un sumidero de la ecuación $x' = F(x)$. Describe la construcción de la conjugación entre el flujo de esta ecuación y el de su linealización alrededor del origen.