TAREA 3 SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES

El material de la tarea corresponde a la sección 8.5 y al capítulo 10 del Hirsch-Smale-Devaney, excepto por el teorema de Floquet para el que tienen que consultar la página 221 del libro de Perko.

Observación 1. Para usar el Teorema de Floquet se necesita encontar la solución general de un sistema lineal periódico $x' = A(t)x$ lo que es equivalente a encontrar soluciones con las condiciones inciales $x_i(0) = e_i$ para e_1, e_2 una base de $\mathbb{R}^2$, siendo lo mas natural usar la base canonica. La matriz $[x_1(t)\ x_2(t)]$ es una matriz fundamental.

Observación 2. Una aplicación típica del teorema de Poincare-Bendixson es demostrar la existencia de una órbita periódica en una región anular. Se necesita que en la frontera de la región el campo vectorial apunte hacia adentro de dicha región y que no haya puntos de equilibrio en la misma.

Observación 3. Para una órbita T-periódica γ de la ecuacion $x' = f(x)$, derivando $\varphi_T(\gamma(t)) = \gamma(t)$ se tiene $D\varphi_T(\gamma(0))\gamma'(0) = \gamma'(0)$, o sea que 1 es un valor propio de $D\varphi_T(\gamma(0))$. Si P es la transformación de Poincaré alrededor de $\gamma(0)$, los restantes valores propios de $D\varphi_T(\gamma(0))$ son precisamente los valores propios de $DP(\gamma(0))$.

Ejercicio 1. Encuentra una condición general sobre las derivadas de $f_a(x)$, $a, x \in \mathbb{R}$, para que la ecuación $x' = f_a(x)$ experimente una bifurcacion de tipo tridente.

Ejercicio 2. Da un ejemplo de una familia de ecuaciones diferenciales $x' = f_a(x)$, $a, x \in \mathbb{R}$ para la que no haya puntos de equilibrio para $a < 0$, un solo equilibrio para $a = 0$ y cuatro equilibrios para $a > 0$. Dibuja el diagrama de bifurcación.

Ejercicio 3. Discute los comportamientos local y global de las soluciones de los siguientes sistemas en coordenadas polares, antes, en el momento y después de los valores de bifurcación. Discute los cambios globales que ocurren en las bifurcaciones

$$r' = r - r^3, \quad \theta' = \sin^2(\theta) + a \tag{1}$$

$$r' = r - r^2, \quad \theta' = \sin\theta + a \tag{2}$$

Ejercicio 4. Encuentra los multiplicadores característicos para los siguientes sistemas lineales periódicos

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sen} 2t & \operatorname{sen}^2 t \end{pmatrix} x. \tag{3}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix} x. \tag{4}$$

con $f(t) = (\cos t + \sin t)/(2 + \sin t - \cos t)$

Ejercicio 5. Muestra que los siguientes sistemas tienen una órbita periódica en la región indicada

$$x' = x - y - x^3, \; y' = x + y - y^3 \tag{5}$$

en $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$,

$$x' = x - y - x(x^2 + \tfrac{3}{2}y^2), \; y' = x + y - y(x^2 + \tfrac{1}{2}y^2) \tag{6}$$

en $x^2 + y^2 > 0$,

$$x'' = -x + x'(1 - x^2 - 2x'^{\,2}) \tag{7}$$

en $1/2 \leq x^2 + x'^{\,2} \leq 1$.

Ejercicio 6. Sea φ_t el flujo de $x' = f(x)$ para $f : W \to \mathbb{R}^n$ campo vectorial C^1

(a) Usa el ejercicio 5 de la tarea 1 para demostrar

$$\det D\varphi_t(x) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} f\ (\varphi_s(x))ds\right)$$

(b) Si $\gamma(t) = \varphi_t(x)$ es una órbita T-periódica y P es la transformación de Poincaré alrededor de x, demuestra que

$$\det P(x) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(s))\, ds\right) \tag{8}$$

Por consiguiente, cuando $n = 2$ se tiene que

$$P'(x) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(s))\, ds\right) \tag{9}$$

Ejercicio 7. El sistema

$$x' = -y + ax(1 - x^2 - y^2 + z), \quad y' = x + ay(1 - x^2 - y^2 + z), \quad z' = z(x - a^2)$$

tiene la órbita periódica $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Encuentra los valores propios de la derivada de la transformación de Poincaré alrededor de $(1, 0, 0)$. *Sugerencia*: Observa que al tomar $z = 0$ nos reducimos a un sistema plano y podemos aplicar (9) para obtener un valor propio. Luego consideramos el sistema completo y aplicamos (8).