INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y LA DINÁMICA HAMILTONIANA

HÉCTOR SÁNCHEZ MORGADO

Índice

1. Las ecuaciones de Hamilton

Lema 1. *Sea A un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Las curvas solución de* $\operatorname{rot} A$ *se laman las líneas de vorticidad de A. Si γ_1 es una curva cerrada, las líneas de vorticidad que pasan por γ_1 forman un tubo σ llamado de vorticidad. Sea γ_2 otra curva cerrada en el mismo tubo de vorticidad, entonces*

$$\int_{\gamma_1} \langle A, dr\rangle = \int_{\gamma_2} \langle A, dr\rangle$$

Demostración. Por el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma_2} \langle A, dr\rangle - \int_{\gamma_1} \langle A, dr\rangle = \int_{\sigma} \langle \operatorname{rot} A, n\rangle dS = 0$$

ya que $\operatorname{rot} A$ es tangente a σ. □

Lema 2. *Sea Ω una forma bilineal antisimétrica en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Entonces $\exists X \neq 0$ tal que $\forall Y \in \mathbb{R}^{2n+1}, \Omega(X, Y) = 0$.*

Demostración. Hay una matriz antisimétrica $\mathbb{Q}$ tal que

$$\Omega(X, Y) = \langle \mathbb{Q}X, Y\rangle.$$

$$\det \mathbb{Q} = \det \mathbb{Q}^t = \det(-\mathbb{Q}) = (-1)^{2n+1} \det \mathbb{Q} \Rightarrow \det \mathbb{Q} = 0.$$

Por lo tanto $\exists X \neq 0$ tal que $\mathbb{Q}X = 0$. □

Observación 1. Si $\ker \Omega := \ker \mathbb{Q}$ es unidimensional, decimos que Ω no es singular.

Definición 1. Sea ω una 1-forma diferencial en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Si $d\omega$ no es singular, $\ker d\omega$ se llama dirección característica de ω y las curvas integrales del campo de direcciones características se llaman líneas de vorticidad. Sea γ_1 una curva cerrada, las líneas de vorticidad que pasan por γ_1 forman un tubo σ llamado de vorticidad.

Lema 3. *Si las curvas cerradas γ_1, γ_2 encierran el mismo tubo de vorticidad para la 1-forma diferencial ω en $\mathbb{R}^{2n+1}$, entonces*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Demostración. Podemos parametrizar el tubo de vorticidad mediante $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ de tal manera que $c([0,1] \times \{i-1\}) = \gamma_i, i = 1, 2$ y $\dfrac{\partial c}{\partial v}$ es una dirección de vorticidad. Por el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_c d\omega = \int_{[0,1]^2} \omega(\frac{\partial c}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial v}) = 0$$

□

Consideremos ahora una función diferenciable real

$$H(q, p, t) = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

y la 1-forma diferencial

$$\omega = pdq - Hdt = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - Hdt,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} d\omega &= dp \wedge dq - dH \wedge dt = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n - dH \wedge dt, \\ dH &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = H_p\, dp + H_q\, dq + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt \end{aligned}$$

Teorema 1. *Las líneas de vorticidad de $\omega = pdq - Hdt$ son las curvas integrales del sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_q \end{aligned} \tag{1}$$

Demostración.

$$d\omega(X, Y) = \langle \mathbb{Q} X, Y \rangle, \quad \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} & H_q \\ -\mathbb{I} & 0 & H_p \\ -H_q^t & -H_p^t & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz $\mathbb{Q}$ es $2n$ ya que $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ es invertible y

$$\mathbb{Q} \begin{pmatrix} H_p \\ -H_q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, $(X_H^t, 1) = (H_p^t, -H_q^t, 1)$ genera la dirección de vorticidad de ω. Pero $(H_p^t, -H_q^t, 1)$ es tangente a las curvas integrales del sistema (1). $\square$

Corolario 2. *Si las curvas cerradas γ_1, γ_2 encierran el mismo tubo formado por (segmentos de) curvas integrales del sistema* (1) *entonces*

$$\int_{\gamma_1} pdq - Hdt = \int_{\gamma_2} pdq - Hdt.$$

En particular, si $g_t(q,p) = \varphi_{t_1}^t(q,p)$ denota la solución a (1) *que satisface $g_{t_1} = I$, entonces para cualquier curva cerrada α en $\mathbb{R}^{2n}$ se tiene*

$$\int_\alpha pdq = \int_{g_t \circ \alpha} pdq = \int_\alpha g_t^*(pdq) = \int_\alpha P_t dQ_t$$

donde $g_t = (Q_t, P_t)$.

De acuerdo al Corolario 2 si σ es una superficie bidimensional con frontera, por el Teorema de Stokes tenemos

$$\int_\sigma dp \wedge dq = \int_\sigma g_t^*(dp \wedge dq) = \int_\alpha dP_t \wedge dQ_t,$$

es decir que g_t preserva la forma $\Omega = dp \wedge dq$.

Definición 2. Una transformación $g : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ se llama **simpléctica** o **canónica** si preserva la forma $\Omega = dp \wedge dq$ o sea si

$$Dg(x)^t \, \mathbb{J} \, Dg(x) = \mathbb{J} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Así, la transformación $g = (Q, P)$ es canónica si y sólo si la forma $PdQ - pdq$ es cerrada. En el caso en que U es simplemente conexa, esta condición es equivalente a que $PdQ - pdq$ sea exacta o a que

$$\int_\gamma pdq = \int_{g \circ \gamma} pdq$$

para cualquier curva cerrada γ en U.

Una transformación canónica preserva las formas $\Omega^k, k \in \mathbb{N}$. Como Ω^n es un múltiplo de la forma de volumen $dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n$, tenemos

Corolario 3. *Las transformaciones canónicas presevan el vo-lumen.*

Teorema 4. *Sean $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ abierto y $H : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Una transformación canonica $g = (Q, P) : U \to \mathbb{R}^{2n}$ transforma el sistema hamiltoniano* (1) *en el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= K_P \\ \dot{P} &= -K_Q \end{aligned} \tag{2}$$

donde $K(g(q,p),t) = H(q,p,t)$. Más generalmente si U es simplemente conexo, una familia diferenciable

$$g_t(q,p) = (Q(q,p,t), P(q,p,t)),\ t \in \mathbb{R}$$

de transformaciones canónicas, transforma el sistema (1) *en el sistema* (2) *donde*

$$K(g_t(q,p),t) = H(q,p,t) - \frac{\partial S}{\partial t}$$

y $S : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Demostración. Como $g = (Q, P)$ es canónica, $d(PdQ - pdq) = 0$. Por lo tanto

$$d(pdq - Hdt) = d(PdQ - K(Q,P,t)dt) = G^* d(pdq - Kdt).$$

donde $G(q,p,t) = (g(q,p),t)$. Así, G transforma las líneas de vorticidad de $pdq - Hdt$ en las líneas de vorticidad de $pdq - Kdt$. $\square$

2. Hamiltoninos Autónomos

Supongamos que la función $H(q,p)$ no depende de t. Si $\alpha(t) = (q(t), p(t))$ es una solucion del sistema (1) entonces

$$\frac{d}{dt} H(\alpha(t)) = \langle H_p, \dot{p} \rangle + \langle H_q, \dot{q} \rangle = -\langle H_p, H_q \rangle + \langle H_q, H_p \rangle = 0$$

y así α yace en una superficie de nivel $M_h = \{(q,p) : H(q,p) = h\}$.

Sea $\gamma(t) = (\alpha(t), t)$ una curva integral del sistema (1). Entonces γ es una línea de vorticidad de

$$\omega = pdq - Hdt.$$

Como $dH(\dot{\gamma}) = dH(\dot{\alpha}) = 0$,

$$0 = d\omega(\dot{\gamma}, \cdot) = dp \wedge dq(\dot{\alpha}, \cdot) + dH.$$

Luego, la curva α es una línea de vorticidad de pdq sobre M_h.

Supongamos que en alguna región $H_{p_1} \neq 0$ y que podemos resolver la ecuación $H(q,p) = h$ para p_1:

$$p_1 = K(q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, -q_1) = K(Q, P, T)$$

de tal forma que en dicha región, Q, P, T es un sistema de coordenadas para M_h y $pdq = PdQ - KdT$. Como $\dot{q}_1 = H_{p_1} \neq 0$, podemos parametrizar las líneas de vorticidad de pdq por T. Así

Teorema 5. *Las soluciones del sistema* (1) *satisfacen en* M_h *el sistema*

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &= K_P \\ \frac{dP}{dT} &= -K_Q \end{aligned} \tag{3}$$

donde $P = (p_2, \ldots, p_n)$, $Q = (q_2, \ldots, q_n)$ *y la función* $K(Q, P, T)$ *está definida por la ecuación* $H(-T, Q, K, P) = h$.

3. Principios variacionales

Para $q, Q \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$ consideremos

$\Omega(q, Q, a, b) = \{\alpha \in C^2([a, b], \mathbb{R}^{2n}) : \alpha(a) \in \{q\} \times \mathbb{R}^n, \alpha(b) = \{Q\} \times \mathbb{R}^n\}$

y definimos la funcional de acción $A : \Omega(q, Q, a, b) \to \mathbb{R}$ mediante

$$A(\alpha) = \int_a^b (p(t)\dot{q}(t) - H(\alpha(t), t))dt$$

donde $\alpha(t) = (q(t), p(t))$.

Teorema 6. *La curva* α *es un punto crítico de* A *si y sólo si es una solución de las ecuaciones de Hamilton* (1)

Demostración. Sea $s \mapsto \alpha_s, |s| < \varepsilon$ una curva diferenciable en $\Omega(q, Q, a, b)$ con $\alpha_0 = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dA(\alpha_s)}{ds} &= \int_a^b \Big(\frac{dp}{ds}\dot{q} + p\frac{d\dot{q}}{ds} - H_p\frac{dp}{ds} - H_q\frac{dq}{ds}\Big)dt \\ &= \Big[p\frac{dq}{ds}\Big]_a^b + \int_a^b \Big(\dot{q}\frac{dp}{ds} - \dot{p}\frac{dq}{ds} - H_p\frac{dp}{ds} - H_q\frac{dq}{ds}\Big)dt \\ \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A(\alpha_s) &= \int_a^b \Big((\dot{q} - H_p)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} p - (\dot{p} + H_q)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} q\Big)dt \end{aligned}$$

Por lo tanto α es un punto crítico de A si y sólo si es una solución de las ecuaciones de Hamilton (1). □

Sea $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ un lagrangiano tal que $L_{vv}(q, v)$ es positivo definido para todo (x, v). La función de energía se define por

$$E(q, v) = L_v(q, v)\, v - L(q, v)$$

La transformación de Legendre asociada está definida por

$$\mathcal{L}(q, v) = (q, L_v(q, v)).$$

Por la hipótesis de convexidad, $\mathcal{L}$ es invertible. La transformada de Legendre de L es $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}$. Las ecuaciones de Euler- Lagrange

$$\frac{d}{dt} L_v(q, \dot{q}) = L_x(q, \dot{q}) \tag{4}$$

se transforman mediante $\mathcal{L}$ en el sistema hamiltoniano (1), y por consiguiente E es constante a lo largo de soluciones de (4)

Teorema 7. Principio de Maupertuis.

Sean e un valor regular de E. Para $q, Q \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, *sea* $\Omega(q, Q, a, b : e)$ *el conjunto de parejas de funciones* C^2, $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha : [\tau(a), \tau(b)] \to \mathbb{R}^n$ *tales que*

$$\tau' > 0,\ E(\alpha(\tau(t)), \alpha'(\tau(t))) = e,\ \alpha(\tau(a)) = q, \alpha(\tau(b)) = Q.$$

Definimos la funcional de acción reducida $A_h : \Omega(q, Q, a, b : e) \to \mathbb{R}$

$$A_e(\tau, \alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} L_v(\alpha, \alpha')\alpha'$$

Entonces (τ, α) *es un valor crítico de* A_e *si y sólo si* α *es una solución de las ecuaciones de Euler - Lagrange* (4)

Demostración. Dado que todas las curvas α tienen energía e

$$L_v(\alpha, \alpha')\alpha' = L(\alpha, \alpha') + e$$

Sea $s \mapsto (\tau_s, \alpha_s), |s| < \varepsilon$, una curva diferenciable en $\Omega(q, Q, a, b : e)$ Siguiendo el procedimiento en la demostración del Teorema 6

$$\begin{aligned}
\frac{dA_e(\tau_s, \alpha_s)}{ds} &= \Big[\frac{d\tau_s}{ds}(L(\alpha_s \circ \tau_s, \alpha'_s \circ \tau_s) + e)\Big]_a^b + \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \frac{dL(\alpha_s, \alpha'_s)}{ds} \\
\int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \frac{dL(\alpha_s, \alpha'_s)}{ds} &= \Big[L_v(\alpha_s, \alpha'_s)\frac{d\alpha_s}{ds}\Big]_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \\
&+ \int_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \Big(L_q(\alpha_s, \alpha'_s) - \frac{dL_v(\alpha_s, \alpha'_s)}{dt}\Big)\frac{d\alpha_s}{ds}
\end{aligned}$$

Como $\alpha_s(\tau_s(a)) = q$, $\alpha_s(\tau_s(b)) = Q$ y $E(\alpha_s \circ \tau_s, \alpha'_s \circ \tau) = e$,

$$\frac{d\alpha_s(\tau_s(a))}{ds} = \frac{d\alpha_s(\tau_s(a))}{ds} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{d\tau_s}{ds} \circ \tau_s^{-1}(L(\alpha_s, \alpha'_s) + e) + L_v(\alpha_s, \alpha'_s)\frac{d\alpha_s}{ds}\Big]_{\tau_s(a)}^{\tau_s(b)} \\
&\qquad = \Big[L_v(\alpha_s \circ \tau_s, \alpha'_s \circ \tau_s)\frac{d(\alpha_s \circ \tau_s)}{ds}\Big]_a^b = 0
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A_e(\tau_s, \alpha_s) = \int_{\tau_0(a)}^{\tau_0(b)} \Big(L_q(\alpha_0, \alpha_0') - \frac{dL_v(\alpha_0, \alpha_0')}{dt} \Big) \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \alpha_s.$$

Por lo tanto (τ_0, α_0) es un punto crítico de A_e si y sólo si α_0 es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4). $\square$

Ejemplo 1. Una función $q \mapsto G(q)$ que ascocia a cada punto de $\mathbb{R}^n$ una matriz simétrica positiva definida, define una métrica. Consideremos el lagrangiano mecánico

$$L(q, v) = \frac{1}{2}\langle G(q)v, v\rangle - V(q),$$

con energía

$$E(q, v) = \frac{1}{2}\langle G(q)v, v\rangle + V(q).$$

Entonces la funcional de acción reducida esta dada por

$$A_e(\tau, \alpha) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle$$

La condición $E(\alpha, \alpha') = e$ implica que

$$\begin{array}{rcl} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle & = & 2(e - V\alpha) \\ \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle & = & \sqrt{2(e - V\alpha)}\sqrt{\langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle}. \end{array}$$

Considerando para cada $q \in V^{-1}(-\infty, e)$ la matriz positiva definida $J(q) = 2(e - V(q))G(q)$, definimos una nueva métrica en esa región, conocida como la métrica de Jacobi. Entonces la funcional de acción reducida esta dada por

$$\begin{array}{rcl} A_e(\tau, \alpha) = \displaystyle\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle G(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle & = & \displaystyle\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \sqrt{\langle J(\alpha)\alpha', \alpha'\rangle} \\ & = & \displaystyle\int_a^b \sqrt{\langle J(\alpha\circ\tau)(\alpha\circ\tau)', (\alpha\circ\tau)'\rangle}. \end{array}$$

Por el principio de Maupertuis, las geodésicas de la métrica J son las imagenes de las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4)

4. La función de acción. La ecuación de Hamilton-Jacobi

Sea $H : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$. Sea $g^t = (Q^t, P^t)$ la solución al sistema (1) tal que $g^0 = I$. Definimos la **función de acción**

$$\begin{aligned} S^\tau(x) &= \int_0^\tau (P^s(x)\frac{d}{ds}Q^s(x) - H(g^s(x), s))ds = \int_{g^{[0,\tau]}(x)} pdq - Hdt \\ &= \int_0^\tau (P^s(x)H_p(g^s(x), s) - H(g^s(x), s))ds \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{\partial S^t(x)}{\partial t} = P^t(x)H_p(g^t(x), t) - H(g^t(x), t). \tag{5}$$

Consideremos una curva diferenciable $c(s) = (p(s), q(s)), |s| < \varepsilon$ y sea $\sigma(s, t) = g^t(c(s))$. Por el teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \int_\sigma dp \wedge dq - dH \wedge dt &= S^\tau(c(0)) - S^\tau(c(s)) + \int_0^s c^*(P^\tau dQ^\tau) - \int_0^s c^*(pdq) \\ S^\tau(c(s)) - S^\tau(c(0)) &= \int_0^s c^*(P^\tau dQ^\tau - pdq). \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$(S^\tau \circ c)' = c^*(P^\tau dQ^\tau - pdq) = (P^\tau dQ^\tau - pdq) \circ c',$$

o sea

$$dS^\tau = P^\tau dQ^\tau - pdq. \tag{6}$$

Supongamos que H_{pp} es invertible. La linealización Dg_t de g_t satisface la ecuación de variaciones

$$\frac{d}{dt}Dg^t = DX_H(g^t)Dg^t,\ Dg^0 = I$$

donde

$$DX_H = \begin{pmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{pmatrix}, \quad Dg^t = \begin{pmatrix} Q^t_q & Q^t_p \\ P^t_q & P^t_p \end{pmatrix}.$$

Como

$$P^0_p = I, Q^0_p = 0, \frac{d}{dt}Q^t_p = H_{pp}P^t_p + H_{pq}Q^t_p,$$

para $|t|$ pequeño tenemos

$$Q^t_p = H_{pp}(I + O(t))t,\ \det Q^t_p = \det H_{pp}(1 + O(t))t^n.$$

Definiendo $\psi_t(q, p) = (q, Q^t(q, p))$, tenemos que

$$D\psi_t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q^t_q & Q^t_p \end{pmatrix}.$$

Por lo que ψ_t es localmente invertible para $0 < |t| < \varepsilon$. Notemos que

$$g^t \circ \psi_t^{-1}(q, Q) = (Q, P(q, Q, t)),$$

y definamos la función de acción en las variables (q, Q, t)

$$S(q, Q, t) = S^t(\psi_t^{-1}(q, Q)).$$

Por (6) tenemos

$$p = -\frac{\partial S}{\partial q}(\psi_t(q, p), t),\ P = \frac{\partial S}{\partial Q}. \tag{7}$$

Se sigue de $S(\psi_t(q, p), t) = S^t(q, p)$ que

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\psi_t(q, p), t) + \frac{\partial S}{\partial Q}(\psi_t(q, p), t)\frac{d}{dt}Q^t(q, p) = \frac{\partial S^t(x)}{\partial t}$$

que comparando con (5) da $\partial S/\partial t = -H(Q, P, t)$. Sustituyendo P de (7), tenemos que S satisface la ecuación de Hamilton - Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t\Big) = 0. \tag{8}$$

5. El método de Hamilton - Jacobi. Funciones generatrices

La idea del método de Hamilton - Jacobi es la siguiente. Bajo una transformación canónica, la forma hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento se preserva así como el hamiltoniano (Teorema 4). Si somos capaces de encontrar una transformación canónica tal que el nuevo sistema hamiltoniano puede integrarse, entonces habremos integrado el sistema hamiltoniano original. Resulta que el problema de construir tal transformación canónica se reduce a encontrar una cantidad suficientemente grande de soluciones de la ecuación de Hamilton - Jacobi. Sea $g = (Q, P) : U \to \mathbb{R}^{2n}$ una transformación canónica donde U es una región simplemente conexa de $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces existe $S : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$dS = PdQ - pdq \tag{9}$$

Decimos que la transformación canónica g es **libre** en (q_0, p_0) si hay una vecindad de (q_0, p_0) donde la transformación $\psi(q, p) = (q, Q(q, p))$ es invertible. Es decir, supongamos que

$$\det D\psi(q_0, p_0) = \det \frac{\partial Q}{\partial p}(q_0, p_0) \neq 0.$$

La función $S_1 = S \circ \psi^{-1}$ se llama **función generatriz** de la transformación canónica g. Se sigue de (9) que

$$p = -\frac{\partial S_1}{\partial q} \circ \psi(q, p), \quad P = \frac{\partial S_1}{\partial Q} \circ \psi \tag{10}$$

Teorema 8. *Sea S_1 una funcion real definida en la vecindad del punto $(q_0, Q_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si* $\det \dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}(q_0, Q_0) \neq 0$, *entonces S_1 es la función generatriz de una transformación libre en* $\Big(q_0, -\dfrac{\partial S_1}{\partial q}(q_0, Q_0)\Big)$.

Demostración. Consideremos la transformación

$$G(q, Q) = \big(q, -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q)\big).$$

$$DG = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & \dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} \end{bmatrix}.$$

Por el teorema de la función inversa, G es invertible en una vecindad de (q_0, Q_0). Definiendo

$$f(q, Q) = \big(Q, \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q)\big), \quad g = f \circ G^{-1},$$

tenemos que

$$Dg = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q} & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & -\Big(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\Big)^{-1} \end{bmatrix} \circ G^{-1} = \begin{bmatrix} * & -\Big(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}\Big)^{-1} \\ * & * \end{bmatrix} \circ G^{-1}.$$

Así, g es libre en (p_0, q_0) y de las definiciones de G y f se sigue que las ecuaciones (10) se satisfacen con $\psi = G^{-1}$, por lo que S_1 es una función generatriz de g. □

Si el hamiltoniano no depende de la coordenada p, o sea $H_p = 0$, entonces el sistema (1) resulta

$$\dot{q} = 0,\ \dot{p} = -H_q$$

y se integra inmediatamente

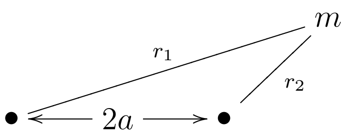
$$q(t) = q(0),\ p(t) = p(0) - \int_0^t H_q(q(0), s) ds.$$

Buscaremos una transformación canónica que transforma el hamiltoniano autónomo $H(q, p)$ en uno de la forma $K(Q)$. De hecho buscaremos una transformación libre con función generatriz S. De (10) obtenemos la condición

$$H(q, -\frac{\partial S}{\partial q}(q, Q)) = K(Q) \tag{11}$$

Teorema 9. (Jacobi) *Si se encuentra una solución $S(q, Q)$ de la ecuación* (11) *dependiendo de n parámetros $Q_1, \ldots, Q_n$, y tal que* $\det \dfrac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \neq 0$, *entonces el sistema* (1) *puede resolverse explícitamente por cuadraturas. Las funciones* $Q_i(q,p), i = 1, \dots, n$ *determinadas por* $\dfrac{\partial S}{\partial q}(q,Q) = -p$, *son primeras integrales del sistema.*

Ejemplo 2. **Problema de atracción con dos centros fijos.** Considere el problema plano de atracción hacia dos puntos fijos de igual masa. Supongamos que la distancia entre los puntos fijos es $2a$ y que las distancias de una masa movil hacia esos puntos son r_1 y r_2.



Las coordenadas elípticas se definen como $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$.

Si las coordenadas cartesianas de los puntos fijos son $(-a,0), (a,0)$ y las de la masa movil son (x,y) entonces

$$
\begin{aligned}
r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 \quad &, \quad r_2^2 = (x-a)^2 + y^2 \\
\xi\eta = r_1^2 - r_2^2 \quad &= \quad (x+a)^2 + (x-a)^2 = 4ax \\
y^2 = r_1^2 - (x+a)^2 \quad &= \quad \frac{(\xi+\eta)^2}{4} - \left(\frac{\xi\eta}{4a} + a\right)^2 = -\frac{(\xi^2 - 4a^2)(\eta^2 - 4a^2)}{2^4 a^2} \\
\dot{x} = \frac{\xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}}{4a} \quad &, \quad y\dot{y} = -\frac{\xi\dot{\xi}(\eta^2 - 4a^2) + \eta\dot{\eta}(\xi^2 - 4a^2)}{2^4 a^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad &= \quad \frac{\dot{\xi}^2\eta^2 + 2\dot{\xi}\xi\dot{\eta}\eta + \dot{\eta}^2\xi^2}{2^4 a^2} \\
&- \quad \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(\eta^2 - 4a^2)^2 + 2\dot{\xi}\xi\dot{\eta}\eta(\eta^2 - 4a^2)(\xi^2 - 4a^2) + \dot{\eta}^2\eta^2(\xi^2 - 4a^2)^2}{2^4 a^2(\xi^2 - 4a^2)(\eta^2 - 4a^2)} \\
&= \quad \frac{\dot{\xi}^2\eta^2 + \dot{\eta}^2\xi^2}{2^4 a^2} - \frac{\xi^2\dot{\xi}^2(\eta^2 - 4a^2)}{2^4 a^2(\xi^2 - 4a^2)} - \frac{\eta^2\dot{\eta}^2(\xi^2 - 4a^2)}{2^4 a^2(\eta^2 - 4a^2)} \\
&= \quad \frac{\xi^2 - \eta^2}{4(\xi^2 - 4a^2)}\dot{\xi}^2 + \frac{\eta^2 - \xi^2}{4(\eta^2 - 4a^2)}\dot{\eta}^2.
\end{aligned}
$$

Por comodidad suponemos que los centros fijos tienen masa unitaria

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{r_1} + \frac{k}{r_2} \quad &= \quad \frac{\xi^2 - \eta^2}{8(\xi^2 - 4a^2)}\dot{\xi}^2 + \frac{\eta^2 - \xi^2}{8(\eta^2 - 4a^2)}\dot{\eta}^2 + \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2} \\
p_\xi = L_{\dot{\xi}} = \frac{\xi^2 - \eta^2}{4(\xi^2 - 4a^2)}\dot{\xi} \quad &, \quad p_\eta = L_{\dot{\eta}} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{8(\eta^2 - 4a^2)}\dot{\eta} \\
H = p_\xi\dot{\xi} + p_\eta\dot{\eta} - L \quad &= \quad 2p_\xi^2\frac{\xi^2 - 4a^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2\frac{4a^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2}
\end{aligned}
$$

La ecuacion de Hamilton-Jacobi (11)

$$H(\xi, \eta, -\frac{\partial S}{\partial \xi}, -\frac{\partial S}{\partial \eta}) = K$$

Puede escribirse

$$2\frac{\partial S}{\partial \xi}^2(\xi^2 - 4a^2) + 2\frac{\partial S}{\partial \eta}^2(4a^2 - \eta^2) - 4k\xi = K(\xi^2 - \eta^2)$$

y por lo tanto podemos separar variables, haciendo $K = 2c_2$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi}^2(\xi^2 - 4a^2) - 2k\xi - c_2\xi^2 &= c_1 \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}^2(4a^2 - \eta^2) + c_2\eta^2 &= -c_1. \end{aligned}$$

Que podemos integrar como

$$S(\xi, \eta, c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2 + 2k\xi}{\xi^2 - 4a^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2\eta^2}{4a^2 - \eta^2}} d\eta.$$

Instituto de Matemáticas, UNAM, Ciudad Universitaria C. P. 04510, Cd. de México, México.