Teoría de las Gráficas II

Primera lista de ejercicios

Definición 1. Dos gráficas G y H son *isomorfas* (y se denota por $G \cong H$) si y sólo si existen biyecciones $\phi : V(G) \to V(H)$ y $\psi : E(G) \to V(G)$ tales que si uv es una arista de G entonces $\psi(uv) = \phi(u)\phi(v)$.

1. (a) Muestra que si $G \cong H$ entonces $|V(G)| = |V(H)|$ y $|E(G)| = |E(H)|$.
   (b) Muestra que el recíproco es falso.
2. Muestra que dos gráficas G y H son isomorfas si y sólo si existe una biyección $\phi : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$.
3. Dada G una gráfica, $|E(G)| = \binom{|V(G)|}{2}$ si y sólo si G es completa.
4. (a) $E(K_{m,n}) = mn$;
   (b) si G es simple y bipartita entonces $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|}{4}$.
5. (***) Una *gráfica k-partita* es aquella en la que su conjunto de vértices se puede partir en k subconjuntos de tal forma que ninguna de sus aristas tenga ambos extremos en uno de tales subconjuntos; una *gráfica k-partita completa* es aquella en la que cada vértice está unido con todos los vértices que no están en su mismo subconjunto. La gráfica completa m-partita con n vértices en la que cada parte tiene $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ o $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ vertices se denota por $T_{m,n}$. Muestra que:
   (a) $E(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$, donde $k = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$;
   (b) si G es una gráfica completa m-partita con n vértices entonces $|E(G)| \leq |E(T_{m,n}|$, la igualdad se dada sólo si $G \cong T_{m,n}$.
6. (*) El k-cubo es la gráfica cuyo conjunto de vértices son las k-adas de ceros y unos, dos vértices son adyacentes si y sólo si difieren en exactamente una coordenada. Muestra que el k-cubo posee 2^k vértices, $k2^{k-1}$ aristas y es bipartita.
7. (a) El *complemento* G^c de una gráfica G es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y dos vértices son adyacentes en G^c si y sólo si no son adyacentes en G. Describe las gráficas K_n^c y $K_{m,n}^c$.
   (b) (*) Una gráfica G es *autocomplementaria* si $G \cong G^c$. Muestra que si G es autocomplementaria entonces $|V(G)| \cong 0, 1 \pmod 4$.
8. Muestra que toda gráfica con n vértices es isomorfa a una subgráfica de K_n.
9. Muestra que:
   (a) toda subgráfica inducida de una gráfica completa es completa y
   (b) toda subgráfica de una gráfica bipartita es bipartita.
10. (***) Dada G una gráfica y n un entero con $1 < n < |V(G)| - 1$. Muestra que si $|V(G)| \geq 4$ y todas las subgráficas inducidas de G con n vértices tienen el mismo número de aristas entonces $G \cong K_{|V(G)|}$ o $G \cong K_{|V(G)|}^c$.
11. Muestra que $\delta \leq 2\frac{|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta$.
12. Muestra que si una gráfica bipartita k-regular con $k > 0$ tiene bipartición (X, Y) entonces $|X| = |Y|$.
13. Muestra que, en cualquier grupo de dos o más personas, siempre hay exactamente dos personas con el mismo número de personas en el grupo.
14. Prueba que si G es una gráfica k-regular entonces $r \leq \frac{|V(G)|}{2}$.
15. (*) Muestra que una gráfica G contiene una subgráfica bipartita generadora H tal que $d_H(v) \geq \frac{1}{2}d_G(v)$ para todo $v \in V(G)$.
16. ¿Existe una gráfica bipartita G tal que $\delta + \Delta > |V(G)|$?
17. (*)

(a) Prueba que toda gráfica con n vértices con más de $\frac{n^2}{4}$ aristas no es bipartita.

(b) Encuentra una gráfica bipartita con n vértices con $\frac{n^2}{4}$ aristas.

18. (*) Caracteriza las gráficas bipartitas con la siguiente propiedad: para cada par de vértices no adyacentes existe un vértice adyacente a ambos.

19. Prueba que si las gráficas G y H son isomorfas entonces G^c y H^c son isomorfas.

20. Da un ejemplo (si es posible) de:

    (a) una gráfica bipartita k-regular de orden n;

    (b) una gráfica cúbica de orden nueve

    (c) una gráfica con n vértices y $\binom{n-1}{2}$ aristas.

21. (*) Encuentra el número de gráficas $(n-2)$-regulares de orden n no isomorfas entre sí.

22. Encuentra ciclos de longitudes cinco, seis, ocho y nueve en la gráfica de Petersen.

23. El *cuello* es la longitud del ciclo más chico en una gráfica. Encuentra el valor del cuello en K_n, $K_{p,q}$ y en la gráfica de Petersen.

24. (*)

    (a) Prueba que todo (u, v)-camino abierto contiene una (u, v)-trayectoria. ¿Será cierto que todo camino cerrado posee un ciclo?

    (b) ¿Es cierto que todo (u, v)-camino que pasa por un vértice w distinto de u o v contiene una (u, v)-trayectoria que pasa por w?

    (c) Prueba que todo camino cerrado de longitud impar posee un ciclo. ¿Es cierta la afirmación para caminos cerrados de longitud par?

    (d) Prueba que todo paseo cerrado posee un ciclo.

25. (*) Prueba que en cualquier gráfica G la distancia $d(u, v)$ para u, v vértices de G, es una métrica (*i.e.*, satisface los axiomas de una métrica):

    (a) $d(u, v) \geq 0$,

    (b) $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$,

    (c) $d(u, v) = d(v, u)$ y

    (d) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (Desigualdad del triángulo).

26. Prueba que una gráfica G es conexa si y sólo si

    (a) dado un vértice fijo u, existen (u, v)-trayectorias en G para cualquier otro vértice v en G,

    (b) para toda partición de los vértices de G (*i.e.*, $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ tales que $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$) existe una arista (u, v) de G tal que $u \in V_1$ y $v \in V_2$.

27. Prueba que si una gráfica posee exactamente dos vértices de grado impar entonces están conectados por una trayectoria.

28. (*) Prueba que si el grado mínimo de una gráfica es mayor que uno entonces posee un ciclo.

29. (*)

    (a) Prueba que una gráfica es bipartita si y sólo si no posee ciclos de longitud impar.

    (b) Prueba que la bipartición de una gráfica bipartita conexa es única. ¿Es cierto para gráficas disconexas?

30. Encuentra todas las gráficas bipartitas cuyos complementos también son bipartitas. Encuentra la autocomplementaria.

31. Encuentra todas las gráficas bipartitas de diámetro dos.

32. (*) Prueba que para todo entero $r > 1$ existe una gráfica r-regular de orden $2r$ y diámetro 2.

33. (**) Describe la estructura de una gráfica conexa G que satisface una de las condiciones siguientes:

    (a) la longitud de cualquier trayectoria maximal con respecto a la inclusión es 2,

(b) para cualquier vértice v de G, todos los vértices de su vecindad son adyacentes dos a dos,

(c) todo vértice tiene grado uno,

(d) toda arista incide en un vértice de grado uno,

(e) todas las aristas son dos a dos adyacentes,

(f) el número de aristas es igual al número de vértices de grado uno,

(g) $\delta(G) = 1$ y $\Delta(G) = 2$ o

(h) G es isomorfa a su gráfica de líneas.

34. (*) Prueba que si borras cualquier arista en un ciclo de una gráfica conexa, obtienes una gráfica conexa.

35. (*) ¿Cuál es el mínimo número de aristas en una gráfica conexa con n vértices?

36. Prueba que para cualesquiera dos aristas e_1 y e_2 en una gráfica conexa existe una trayectoria cuya primera arista es e_1 y cuya última arista es e_2.

37. (*)

    (a) Prueba que una gráfica G de orden n es conexa si $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$. ¿La afirmación sigue siendo cierta si reemplazamos $\frac{n-1}{2}$ por $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$?

    (b) Prueba que una gráfica G de orden $n > 2$ es conexa si el número de aristas es mayor que $\frac{n-1}{2}$. ¿Podemos reemplazar "mayor" por "no menor"?

    (c) Prueba que una gráfica G de orden n y tamaño m es conexa si no posee ciclos de longitud impar y $m > (\frac{n-1}{2})^2$? ¿Sigue siendo cierto si reemplazamos $>$ por $\geq$?

Recuerda que la *excentricidad* de un vértice u en G es la máxima de las distancia a todos los otros vértices de G, es decir, $\mathrm{e}(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$.

La máxima entre las excentricidades de todos los vértices es el *diámetro* de la gráfica y se denota por $\mathrm{diam}(G)$. Si para algún vértice v en G se tiene que $\mathrm{e}(v) = \mathrm{diam}(G)$ entonces se dice que es *periférico*.

La mínima entre las excentricidades de todos los vértices es el *radio* de la gráfica y se denota por $\mathrm{rad}(G)$. Si para algún vértice v en G se tien que $\mathrm{e}(v) = \mathrm{rad}(G)$ entonces se dice que es *central*. La subgráfica de G inducida por sus vértices centrales es el *centro* de G.

38. (*) Prueba que:

    (a) el diámetro de una gráfica es a lo más dos veces su radio y

    (b) una trayectoria cuya longitud sea la del diámetro pasa por un vértice central.

39. (*) Para todo $n \geq 4$ da una ejemplo de una gráfica de orden n distinta de la completa que satisfaga que:

    (a) su radio y su diámetro sean iguales,

    (b) todos sus vértices son periféricos y

    (c) todos sus vértices son centrales.

40. (*) Prueba que:

    (a) para cualquier gráfica G, ella o su complemento son conexas,

    (b) si G no es conexa entonces el diámetro de su complemento es menor o igual que dos,

    (c) si G y su complemento son conexas y $\mathrm{diam}(G) \geq 3$ entonces el diámetro del complemento es menor o igual que tres.

    (d) $1 \leq \mathrm{diam}(G) \leq 3$ para cualquier gráfica autocomplementaria no trivial G.

41. (*) Prueba que si una gráfica no tiene triángulos entonces $\delta(G) + \Delta(G) \leq |V(G)|$.

42. (*) La *representación de König* de una gráfica G es la gráfica bipartita $K(G)$ en la que una de sus partes son los vértices de G y la otra las aristas de G. Dos vértices en $K(G)$ son adyacentes si y sólo si el vértice y la aristas correspondientes en G son incidentes. Prueba que

    (a) $K(G)$ puede ser obtenida de G mediante *subdivisiones* de sus aristas, *i.e.*, para cada arista (u, v) en G, añadimos un nuevo vértice w_{uv} y la arista la reemplazamos por dos aristas (u, w_{uv}) y (w_{uv}, v).

    (b) Dos gráficas son isomorfas si y sólo si sus representaciones de König lo son.

43. Prueba que:

    (a) la subgráfica de un subgráfica de una gráfica de G es subgráfica de G,
    (b) la subgráfica generadora de una subgráfica generadora de G es subgráfica generadora de G y
    (c) una subgráfica inducida de una subgráfica inducidad de G es subgráfica inducida de G.

44. (*) Prueba que:

    (a) cualquier subgráfica de una gráfica G se puede obtener al borrar algunos vértices o aristas de G,
    (b) cualquier subgráfica generadora de una gráfica G se puede obtener al borrar algunas aristas de G y
    (c) cualquier subgráfica inducida de una gráfica G se puede obtener al borrar algunos vértices de G.

45. Supón que G y H son gráficas tales que $V(G) = V(H)$ y $d_G(v) \geq d_H(v)$ para todo vértice v. ¿Es cierto que H es subgráfica de G?

46. ¿Es cierto que $\delta(G) \leq \delta(H)$ si H es

    (a) una subgráfica de G?
    (b) una subgráfica generadora de G?

47. ¿Cuál es la estructura de una gráfica en la que toda trayectoria es una subgráfica inducida?

48. (*) Prueba que para cualquier gráfica G existe una gráfica autocomplementaria que posee a G como subgráfica inducida.

49. (*) ¿Será cierto que el conjunto los vértices de cualquir gráfica G puede ser partido en dos conjuntos V_1 y V_2 de forma tal que las subgráficas inducidas por V_1 y V_2 sean regulares?

50. (*) Prueba que no existen gráficas de orden $n \geq 5$ tales que cualesquiera cuatro vértices inducen un ciclo de longitud cuatro.

51. (*) Prueba que toda gráfica G es una subgráfica inducida de alguna gráfica $\Delta(G)$-regular.

52. (*) Caracteriza todas las gráficas en las que los conjuntos $N(v)$ inducen gráficas completas para todos los vértices v.

53. (*) Encuentra una gráfica de orden diez en la que las vecindades de todos los vértices inducen la gráfica P_2^c donde P_2 es la trayectoria de longitud dos.

54. (*) Encuentra todas las gráficas conexas en las que los conjuntos $N(v)$ para cualquier vértice v induce la gráfica:

    (a) un ciclo de longitud tres y
    (b) un ciclo de longitud cuatro.

55. (*) Prueba que una gráfica acíclica con n vértices y k componentes posee exactamente $n - k$ aristas.

56. (*) El *grado promedio* de una gráfica de orden n es el valor $d(G) = \frac{1}{n}\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$. Expresa el número de vértices de un árbol en término del grado promedio.

57. (*) Prueba que para cualquier árbol no trivial:

    (a) posee al menos dos vértices de grado uno y
    (b) posee exactamente dos vértices de grado uno y sólo si el árbol es una trayectoria.

58. (*) Encuentra todos los árboles en los que el diámetro sea igual a su radio.

59. (*) Prueba que, si T es un árbol, su radio y su diámetro tienen la relación:

$$\mathrm{rad}(T) = \lceil \frac{\mathrm{diam}(T)}{2} \rceil.$$

60. (*) Construye gráficas 2-conexas de orden n con $\mathrm{diam}(G) = 2$ y $|E(G)| = 2n - 5$ para todo $n \geq 5$.

61. (*) Si v es un vértice de corte en una gráfica G entonces v no es de corte en G^c.