
Teoría de las Gráficas II

Octava tarea

Proposition 1. Considera D una digráfica cuasitransitiva. Supón que $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una (x_1, x_k) -trayectoria minimal. Entonces la subdigráfica inducida por $V(P)$ es semicompleta y $x_j \rightarrow x_1$ para todo $2 \leq i+1 < j \leq k$, excepto para $k = 4$, caso en el que la flecha entre x_1 y x_k puede no existir.

Corolario 1. Si una digráfica cuasitransitiva D posee una (x, y) -trayectoria pero x no domina y , entonces $y \rightarrow x$ ó existen vértices u, v en $V(D) \setminus \{x, y\}$ tales que $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$ y $y \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow x$.

Lema 1. Supón que A y B son componentes fuertemente conexas distintas de una digráfica cuasitransitiva D con al menos una flecha de A hacia B . Entonces $A \mapsto B$.

1. Prueba que todo torneo de orden $n \geq 2k + 2$ posee un vértice de exgrado al menos $k + 1$.
2. Prueba que todo torneo fuertemente conexo de orden n posee ciclos de longitud $3, 4, \dots, n - 1, n$.
3. Prueba que si un torneo tiene al menos un ciclo entonces tiene al menos dos trayectorias hamiltonianas.
- 4.

Lema 2. Considera D una digráfica cuasitransitiva fuertemente conexa con al menos dos vértices. Entonces se tiene lo siguiente:

- (a) $\overline{UG(D)}$ es desconexa y
- (b) si S y S' son dos subdigráficas de D tales que $\overline{UG(S)}$ y $\overline{UG(S')}$ son componentes conexas distintas de $\overline{UG(D)}$ entonces $S \mapsto S'$, $S' \mapsto S$ o se tienen que tanto $S \rightarrow S'$ y $S' \rightarrow S$, en cuyo caso $|V(S)| = |V(S')| = 1$.

Prueba primero el inciso (b).

Para el inciso (a), hazlo por inducción. Considera un vértice z en D , hay dos casos posibles: $D - z$ no es fuertemente conexa o $D - z$ sí es fuertemente conexa. Para el primer caso puedes pensar en las componentes fuertemente conexas de $D - z$, ¿qué flechas hay entre las componentes fuertemente conexas iniciales y finales de $D - z$ y z ? Lo anterior y el Lema 1 implican que si X es una componente fuertemente conexa inicial de $D - z$ y Y es final entonces $X \mapsto Y$. ¿Cómo son las componentes fuertemente conexas no iniciales ni terminales de $D - z$ con respecto a las iniciales y a las terminales? Deduce que z es adyacente a todo vértice de $V(D) \setminus z$ y lo

que querías probar. Si $D - z$ es fuertemente conexa entonces argumenta por que existe una flecha $z \rightarrow w$ de z a $D - z$. Usa la hipótesis inductiva sobre $D - z$. Argumenta porque puedes escoger subdigráficas S y S' de D tales que $w \in S$ y $S \mapsto S'$. Finalmente prueba que z es completamente adyacente a S' y concluye.

5.

Teorema 1. *Considera D una digráfica cuasitransitiva.*

- (a) *Si D no es fuertemente conexa entonces existen una gráfica transitiva T con vértice $\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ y digráficas cuasitransitivas fuertemente conexas $H_1, H_2, \dots, H_t$ tales que $D = T[H_1, H_2, \dots, H_t]$. donde H_i se substituye por u_i para $i = 1, 2, \dots, t$.*
- (b) *Si D es fuertemente conexa entonces existen una digráfica semicompleta S con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ y digráficas cuasitransitivas $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ tales que Q_i es un vértice o no es fuertemente conexa y $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde Q_i se substuye por v_i , para $i = 1, 2, \dots, s$.*

Para el primer inciso, basta considerar el Lema 1. Para el segundo, el Lema 2.