
Teoría de las Gráficas

Primera tarea
23 de agosto de 2010

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvidas justificar bien tus respuestas. Se entrega por equipos de hasta dos personas.

1. a) Dibuja la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y conjunto de aristas $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_3, u_3u_5\}$.

Dibuja una gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y cuyo conjunto de aristas $E(G)$ es tal que $|E(G)|$ es lo más grande posible. Determina el conjunto E .

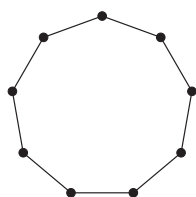
Si una gráfica es de orden 3, ¿cuáles son los posibles tamaños de G ?

- b) d) Cuál es el tamaño máximo posible de una gráfica cuyo orden es n , donde n es un entero positivo?
2. ¿Existe una gráfica G de orden 5 o más que cumpla que cada vértice de G incide al menos una arista, pero no sucede que cualesquiera dos aristas son adyacentes? (Justifica su respuesta.)
3. Da un ejemplo de una gráfica G de tamaño positivo con la propiedad de que cualquier vértice incide en cualquier arista.
4. Da un ejemplo de una gráfica que cumpla las siguientes propiedades:
- a) todo vértice es adyacente a dos vértices; y
 - b) toda arista es adyacente a dos aristas.
5. a) Considera una gráfica G tal que $V(G) = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ y dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $\text{mcd}(u, v) = 1$. Dibújala y determina $E(G)$.
- b) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq 3$. Dibuja la gráfica G y determina $E(G)$.

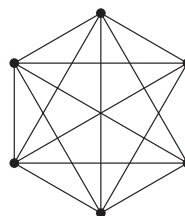
- c) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i + j$ es múltiplo de cuatro. Dibuja la gráfica G y determina $E(G)$.
- d) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i \cdot j$ es múltiplo de diez. Dibuja la gráfica G y determina $E(G)$.

6. Muestre que para cualquier gráfica G , $m \leq \binom{n}{2}$.

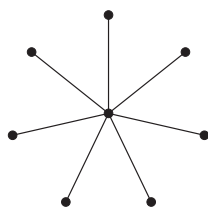
7. Etiquete las siguientes gráficas y describa el conjunto de vértices y el conjunto de aristas para cada una. Encuentre su matriz de adyacencia y su matriz de incidencia:



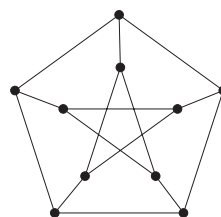
(a) G_1



(b) G_2



(c) G_3



(d) G_4



(e) G_5

8. $\mathbf{X}$ es la matriz de adyacencia de la gráfica G . Dibújala.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. El número

$$d(G) := \frac{1}{v(G)} \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

es el *grado promedio* de G . Muestra **con todo detalle** que

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

10. a) Prueba con detalle que toda en toda gráfica G existen al menos dos vértices que poseen el mismo grado.
- b) Muestra que, en cualquier grupo de dos o más personas, siempre existen dos personas que poseen el mismo número de amigos dentro del grupo.
- c) Describe un grupo de cinco personas, en el cual cualesquiera dos de sus miembros tienen exactamente un amigo en común. ¿Puedes encontrar un grupo de cuatro personas con la misma propiedad?