Teoría de las Gráficas

Segunda tarea
14 de setiembre de 2010

1. Considera X y Y conjuntos finitos. Prueba que:
   (a) $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$ y
   (b) $|X \cup Y|^2 + |X \cap Y|^2 \geq |X|^2 + |Y|^2$
2. Muestra que toda gráfica de orden n es isomorfa a una subgráfica de la gráfica completa con n vértices.
3. Muestra que dos gráficas son isomorfas si y sólo si sus completementos son isomorfos.
4. Encuentra dos gráficas no isomorfas cuya sucesión de grados sea $(1, 1, 2, 2, 3, 3)$.
5. Si G y G' son dos gráficas isomorfas entonces tienen la misma sucesión de grados.
6. Muestra que no existe una gráfica simple de orden doce y tamaño veintiocho en la que (i) el grado de cada vértice sea tres o cuatro y (ii) el grado de cada vértice sea tres o seis.
7. ¿$(2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5)$ es una sucesión de grados? De ser así, dibuja la gráfica.
8. ¿$(1, 3, 3, 4, 5, 6, 6)$ es una sucesión de grados? De ser así, dibuja la gráfica.
9. Muestra que existe una gráfica simple con siete vértices y doce aristas tal que el grado de cada vértice es dos, tres o cuatro.
10. Considera $G[X, Y]$ una gráfica bipartita, con $|X| = r$ y $|Y| = s$. Muestra que $e(G) \leq rs$ (donde X y Y denotan las partes de la partición, así toda arista tiene extremos en ambos conjuntos y $e(G)$ denota el número de aristas de G).

Extras

A. Supón que G es una gráfica k-regular de orden n y tamaño m, con $k \geq 0$, $m \geq 0$ y $n \geq 1$. Encuentra una relación entre k, n y m. Justifica tu respuesta.

B. Considera G una gráfica de orden n tal que para ninguna terna de vértices u, v, w se tiene que uv, vw, wu son todas aristas de G (lo anterior es equivalente a decir que G es K_3-*libre*, es decir, que G no posee a K_3 como subgráfica). Muestra que

$$n \geq \delta(G) + \Delta(G).$$