Teoría de las Gráficas

Tercera tarea
Primero de octubre de 2010

1. Considera una gráfica G conexa.

   (a) Muestra que si x es una vértice de grado uno entonces $G - x$ es conexa.

   (b) Muestra que si G es una gráfica conexa de orden $n \geq 2$ entonces debe poseer al menos $n - 1$ aristas. ¿Qué puedes decir del recíproco?

2. Considera G una gráfica de orden n. Muestra que si el tamaño de G es estrictamente mayor que $(n-1)(n-2)/2$ entonces G es conexa.

3. Considera G una gráfica de orden n con ω componentes conexas. Muestra que el tamaño de cada componente es a lo más $(n-\omega)(n-\omega+1)/2$.

4. Considera la gráfica que aparecen en la figura 4. ¿Cuántos ciclos posee? ¿Cuántas trayectorias de longitud cinco posee? Enumera todas sus trayectorias que tengan por extremos los vértices x y y.

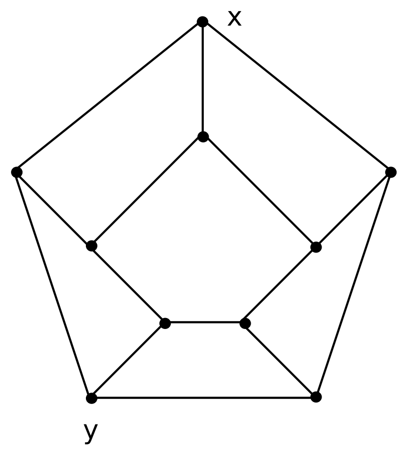

Figura 1: Gráfica

5. Prueba que si un camino C en una gráfica G no repite vértices entonces no repite aristas.

6. Si C y C' son caminos y su concatenación existe entonces $l(C)+l(C') = l(C \bullet C')$.

7. Dado un camino $C = (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_k)$ y x_i un vértice interior de C entonces:

   - $C[x_0,\, x_i] \bullet C[x_i,\, x_k] = C$
   - $l(C[x_0,\, x_i]) + l(C[x_i,\, x_k]) = l(C)$

8. ¿Cómo se ven todos los posibles caminos de longitud tres y cuatro? (Considera K_3 y K_4 y toma en cada uno caminos de longitud tres y cuatro, respectivamente, considerando que las aristas y los vértices pueden repetirse ninguna o algunas veces).

9. Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica G, con $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. $A^1 := A$ y $A^i := A^{i-1}A$ (con la multiplicación usual de matrices). Prueba que la entrada (i, j) de A^k, $k \geq 1$, es el múmero de diferentes $(v_i,\, v_j)$-caminos de longitud k en G.

10. Sean u y v cualesquiera dos vértices de una gráfica conexa G. Muestra que existe un $(u,\, v)$-camino *abierto* que contiene todos los vértices de G.

11. Sea G una gráfica de orden n tal que $\delta_G(v) \geq \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in V(G)$. Muestra que G es conexa.

12. Prueba que toda gráfica G contiene una trayectoria de longitud al menos $\delta(G)$.

13. Caracteriza todas aquellas gráficas G con la propiedad de que toda subgráfica inducida de G es una subgráfica conexa de G.

14. Sea G una gráfica con $A(G) \neq \emptyset$, conexa y no bipartita. Muestra que G tiene vértices u y v no adyacentes tales que $\delta_G(u) + \delta_G(v)$ es par.

15. Prueba que si G es disconexa entonces $\overline{G}$ es conexa y, además, $\mathrm{diam}(G) \leq 2$.

16. Prueba que G es bipartita si y sólo si toda componente conexa de G es bipartita.

Extras

1. Sea G una gráfica de orden n y tamaño m. Muestre que G tiene al menos $m-n+\omega$ ciclos distintos. Donde ω es el número de componentes conexas de G.

2. Sea G una gráfica conexa. Muestra que:

   (a) Si u y v son vértices adyacentes de G, entonces $|e(u) - e(v)| \leq 1$.

   (b) Si k es un entero tal que $\text{rad}(G) \leq k \leq \text{diam}(G)$, entonces existe un vértice w tal que $e(w) = k$.

   (c) Si k es un entero tal que $\text{rad}(G) < k \leq \text{diam}(G)$, entonces existen al menos dos vértices en G con excentricidad k.
   $\longrightarrow$ Sugerencia: Sea w un vértice con $e(w) = k$, y sea u un vértice tal que $d(w,u) = e(w) = k$. Sea v un vértice central de G y T una vu-trayectoria de longitud $d(v,u)$. Muestra que $e(v) < k \leq e(u)$. Concluye que existe un vértice $x \neq w$ en T, tal que $e(x) = k$.