Teoría de las Gráficas

Cuarta lista de ejercicios
22 de octubre de 2010

1.
   a) Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden 6.
   b) Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden 7 tales que su grádo máximo es mayor o igual a 4.

2. Un bosque es una gráfica acíclica.
   a) Dibuja todos los bosques no isomorfos de orden 6.
   b) Prueba que toda componente conexa de un bosque es un árbol.
   c) Sea B un bosque de orden n y tamaño m, con ω componentes conexas. Prueba que $n = m + \omega$.

3.
   a) Muestra que todo árbol de grado máximo k, tiene al menos k vértices terminales.
   b) ¿Qué árboles tienen exactamente k vértices terminales?

4. Sea G una gráfica de orden n y tamaño m, con la propiedad de que $n = m + 1$. Prueba que G no necesariamente es un árbol.

5. Sea T un árbol de orden n tal que $d(v) \in \{1, 3\}$, para todo $v \in V(T)$. Prueba que T contiene $\frac{n-2}{2}$ vértices de grado 3.

6. Sea T un árbol de orden 21, con conjunto de grados $\{1, 3, 5, 6\}$. Suponga que T tiene 15 vértices terminales y un vértice de grado 6. ¿Cuántos vértices de grado 5 tiene T?

7. Encuentre todos los árboles T tales que T^c es un árbol.

8. Encuentre una fórmula para determinar el número de vértices terminales de un árbol de orden n, tal que los vértices que no son terminales tienen el mismo grado.

9.
   a) Pruebe que un árbol tiene exactamente dos hojas si y sólo si es una trayectoria.
   b) Pruebe que un árbol tiene diámetro 2 si y sólo si es una estrella.

Extras

1. Considera T un árbol y n_i el número de vértices de grado i en T. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdadera?

   - Si T no es una trayectoria entonces $n_1 \geq n_2$.
   - Si $n_2 = 0$ entonces T tiene más hojas que otros vértices.

2. *a*) Muestra que el centro de cualquier árbol es K_1 o K_2.

   b) Sea T un árbol y T' el árbol que se obtiene de T al borrar todos sus vértices terminales, muestra que T y T' tienen el mismo centro.

3. Pruebe que una gráfica G es un bosque si y sólo si toda subgráfica inducida de G contiene un vértice de grado a lo más 1.

4. Pruebe que el número de vértices terminales de un árbol no trivial T, con $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es:

$$2 + \sum_{d(v_i) \geq 3} (d(v_i) - 2)$$