Teoría de las Gráficas

Quinta lista de ejercicios
11 de noviembre de 2011

1. ¿Cuál es el número máximo de vértices de corte que puede tener una gráfica con n vértices?

2. Sea e una arista de una gráfica conexa G. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes:

   a) e es un puente de G.

   b) e no está en ningún ciclo de G.

   c) Existen vértices u y v en G, tales que toda uv-trayectoria pasa por e.

   d) Existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos U y W, tal que toda UW-trayectoria pasa por e.

3. Prueba que si G tiene un puente, entonces tiene un vértice de corte y muestre que el recíproco no necesariamente se cumple.

4. Demuestra que si v es un vértice de corte en G, entonces v no es de corte en G^c.

5. Demuestra o da un contraejemplo: Una gráfica conexa G con al menos tres vértices, es un bloque si y sólo si para cualesquiera dos vértices u y v y cualquier arista e, existe una uv-trayectoria que no pasa por e.

6. Sea G una gráfica conexa y $b(v)$ el número se bloques de G que contienen al vértice v. Prueba que el número de bloques de G es

$$1 + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1)$$

7. *a*) Encuentra una gráfica G tal que $\kappa(G) = 3$, $\lambda(G) = 4$ y $\delta(G) = 5$.

   b) Prueba que no existe una gráfica 3-conexa de tamaño 7.

8. Una arista uv es la diagonal de un ciclo γ en G si $\{u, v\} \subset V(\gamma)$ y $uv \notin E(\gamma)$. Prueba que una arista e de una gráfica 2-conexa es diagonal de un ciclo en G si y sólo si $G - e$ es 2-conexa.

9. Sea G una gráfica y sean $w \in V(G)$ y $e \in E(G)$, prueba que $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$ y u no ady_G v se tiene que:

   $a)$ $\kappa_{G-w}(u, v) = \begin{cases} \kappa_G(u, v) \text{ ó} \\ \kappa_G(u, v) - 1 \end{cases}$

   $b)$ $\kappa_{G-e}(u, v) = \begin{cases} \kappa_G(u, v) \text{ ó} \\ \kappa_G(u, v) - 1 \end{cases}$

   Concluye que para cualquier arista x de G:

$$\kappa_{G-x}(G) = \begin{cases} \kappa_G(u, v) \text{ ó} \\ \kappa_G(u, v) - 1 \end{cases}$$

10. Prueba que una gráfica G es k-conexa si y sólo si $\forall u, v \in V(G)$ existen al menos k uv-trayectorias internamente ajenas.

11. Prueba que si G es k-conexa con $k \geq 2$, entonces para cualquier conjunto $S \subset V(G)$ de cardinalidad k existe un ciclo γ tal que $S \subset V(\gamma)$.

Extras:

1. Prueba que si T es un árbol tal que la distancia entre cualesquiera dos de sus vértices terminales es par, entonces T es la gráfica de bloques y de vértices de corte de alguna gráfica G.

2. Muestra que $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. Sea G una gráfica k-conexa y sea $v \in V(G)$. Para todo $t \in \mathbb{Z}^+$, definimos G_t como la gráfica obtenida de G al añadir t nuevos vértices, $u_1, u_2, \ldots, u_t$ y todas las aristas de la forma $u_i w$, con $1 \leq i \leq t$ y para cada $vw \in E(G)$. Prueba que G_t es k-conexa.