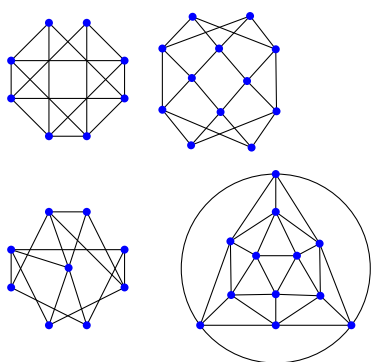
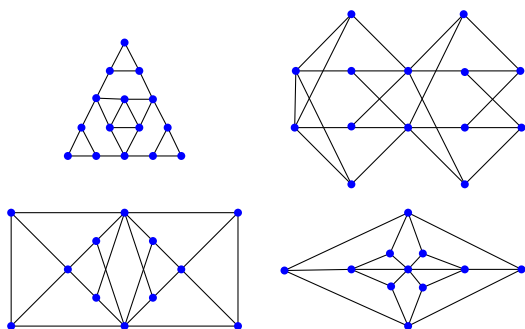

Teoría de las Gráficas

Sexta tarea

1. Prueba que el conjunto de las aristas de cualquier gráfica conexa sin un paseo euleriano cerrado se pueden partir en un conjunto de paseos abiertos (cuyo número es la mitad de los vértices de grado impar).
2. Encuentra un ciclo hamiltoniano en cada una de las gráficas siguientes.



3. Considera m y n enteros positivos. ¿Qué deben cumplir m y n para que tengamos que
 - (a) $K_{m,n}$ posea un ciclo hamiltoniano?
 - (b) $K_{m,n}$ posea una trayectoria hamiltoniana?
4. Aplica el criterio de la subgráfica a cada una de las gráficas siguientes. En cada caso, ¿cuál es la conclusión?



5. Explica por qué el criterio negativo para gráficas bipartitas puede ser pensado como un caso especial del criterio de la subgráfica.
6. ¿Cuáles de las sucesiones siguientes satisfacen la condición de los grados de Pósa?
 - (a) $(2, 2, 3, 4, 4, 5)$
 - (b) $(2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$
 - (c) $(4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$

- (d) (4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6)
7. Si Muestra que si una gráfica satisface la condición de Dirac de que cada vértice tenga grado igual o mayor que $n/2$ entonces satisface la condición de Pósa.
 8. Muestra que toda gráfica que tenga sucesión de grados (2, 3, 3, 4, 4, 5, 5) posee un ciclo hamiltoniano aunque esta sucesión no satisfaga la condición de Pósa. Haz esto siguiendo estos pasos:
 - (a) Muestra que si u es un vértice de grado tres entonces existe un vértice v de grado cuatro o cinco que no es adyacente a u .
 - (b) ¿Qué pasa si agregamos una arista entre u y v ?
 9. **Prueba del teorema de Pósa** Mostraremos que si G posee al menos tres vértices, satisface la condición de los grados de Pósa y no es la gráfica completa entonces podemos agregar una arista entre vértices no adyacentes u y v cuyos grados satisfagan que $d(u) + d(v) \geq n$. Repitiendo ésto eventualmente llegaremos a la gráfica completa K_n . Se seguirá del teorema del Bondy-Chvátal que G posee un ciclo hamiltoniano.

La clave para probar que existen esos vértices adecuados u y v es fijarse en la sumas $d_i + d_{i+1}$, donde los grados están ordenados en sentido creciente $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

- (a) Muestra que si $d_1 + d_2 \geq n$ entonces existen vértices u y v que satisfacen la condición pedida. (Sugerencia: toma un vértice u con grado d_1).
Con este resultado, podemos suponer que $d_1 + d_2 < n$ y ahora considerar sumas $d_i + d_{i+1}$ para $i > 2$.
- (b) Toma r el mayor entero menor que $n/2$, es decir, $r := n/2 - 1$ si n es par o $r := (n-1)/2$ si n es impar. Muestra que $d_r + d_{r+1} \geq n$.
Bajo el supuesto de que $d_1 + d_2 < n$, el inciso anterior implica que debe existir un i entre 2 y r , inclusive, tal que $d_{i-1} + d_i < n$ y $d_i + d_{i+1} \geq n$.
- (c) Con tal i , muestra que $d_i < n - i$.
- (d) Completa la prueba del teorema de Pósa por medio de mostrar que existen u y v con las condición pedida. (Sugerencia: toma un vértice u con grado d_i).

Teorema 1 (Teorema de Ore). Dada G una gráfica con n vértices, $n \geq 3$, y supón que G satisface que:

Condición de adyacencia de Ore Siempre que $d(u) + d(v) < n$ para cualquier par de vértices u y v entonces son adyacentes.

Entonces G posee un ciclo hamiltoniano.

Extras

- A. (a) Encuentra una gráfica que tenga sucesión de grados (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4) y que no tenga un ciclo hamiltoniano.
(b) Prueba que toda gráfica con la sucesión de arriba debe poseer una trayectoria hamiltoniana. (Sugerencia: añade una arista a la gráfica de forma tal que esta nueva gráfica satisfaga la condición de Pósa. ¿Es esto posible?).
- B. Encuentra un ejemplo de una gráfica con tres o más vértices regular, conexa, bipartita y sin ciclo hamiltoniano (Sugerencia: piensa en el criterio de la subgráfica).
- C. Prueba el teorema de Ore mediante el uso del teorema de Bondy-Chvátal.