Teoría de las Gráficas

Séptima tarea
3 de diciembre de 2010

1. Muestre que un árbol tiene a lo más un apareamiento perfecto.

2. Pruebe el teorema de Hall: Sea G una gráfica bipartita con bipartición X, Y. Existe un apareamiento que satura a todo vértice de X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$ no vacío.

3. **Algoritmo Húngaro** El siguiente algoritmo sirve para determinar si una gráfica bipartita G con bipartición X, Y posee un apareamiento que satura a todo vértice de X, y en caso de existir, al algoritmo arroja uno.

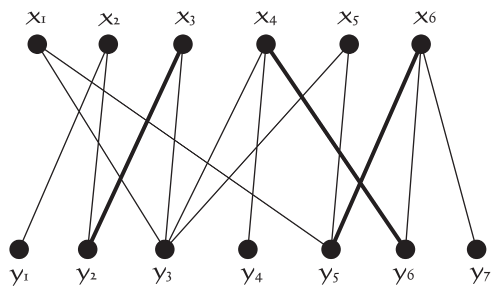
Paso 1. Sea M un pareamiento cualquiera de G.

Paso 2.
- Si $\forall\, x \in X$, x está M-saturado, STOP $\rightarrow$
- Si $\exists\, x \in X$ tal que v es M-insaturado, vaya al PASO 3.

Paso 3. Sean $S = \{x\}$ y $T = \emptyset$.
- Si $N(S) = T$, STOP $\rightarrow$
  (en este caso el teorema de Hall garantiza que no existe un vértice que sature a cada vértice de X.)
- Si $N(S \neq T)$, vaya al PASO 4.

Paso 4. Sea $y \in N(S) - T$
- Si y está M-saturado, entonces sea $yz \in M$.
  $S \cup \{z\} \rightarrow S$ y $T \cup \{y\} \rightarrow T$, regrese al PASO 3.
  (actualizamos S y T, es decir, cambiamos S por $S \cup \{z\}$ y T por $T \cup \{y\}$.)
- Si y está M-insaturado, entonces existe P una xy-trayectoria M-aumentante.
  $M \Delta E(P) \rightarrow M$, regrese al PASO 1.
  (actualizamos M, es decir cambiamos M por $M \Delta E(P)$, recuerde que $M \Delta E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$)

Realice el algoritmo Húngaro para la siguiente gráfica G, dado el apareamiento $M = \{x_3y_2, x_4y_6, x_6y_5\}$ del Paso 1.



4.
   a) Muestre que la gráfica de Petersen tiene exactamente 6 apareamientos perfectos.

   b) Determine $pm(K_{2n})$ y $pm(K_{n,n})$, donde $pm(G)$ denota el número de apareamientos perfectos de G.

5. Piensen en el siguiente juego: Dada una gráfica G, dos jugadores juegan sobre ella eligiendo vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de manera alternada de tal forma que para toda $i > 0$ v_i ady_G v_{i-1}. Gana el último jugador que tiene la posibilidad de elegir un vértice. Pruebe que existe una estrategia gandora para el jugador que comienza el juego si y sólo si G no tiene un apareamiento perfecto.

6. Pruebe que $\chi(G) = \text{mín}\{|P| : P \text{es una partición de} V(G) \text{es conjuntos independientes}\}$

7. Sea una gráfica G y $v \in V(G)$. Demuestre que $\chi(G - v) = \chi(G)$ ó bien $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$.

8. Determine el número cromático de las siguientes gráficas: $K_n, C_n, K_{n,m}$, Petersen

9. Verdadero o Falso Si el enuncuado es verdadero pruébelo, de otro modo de un contraejemplo.

   a) Sea T un árbol de orden $n \geq 2$, entonces $\chi(G) = 2$.

   b) Sea G una gráfica y $H \subset G$, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.

c) Sean G_1 y G_2 dos gráficas arbitrarias, entonces $\chi(G_1 + G_2) = \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

10. Muestre que la gráfica de Chvátal que se ilustra a continuación la cuál es 4-regular es 4-cromática.

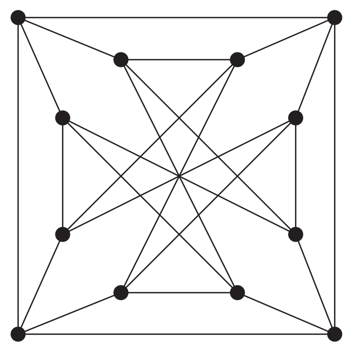


Figura 1: Chvátal

11. Muestra que en cualquier coloración minimal propia, para cualesquiera dos colores existen vértices adyacentes con esos colores.

Extras:

1. Demuestre el siguiente Corolario del Teorema de Hall: Una gráfica bipartita k-regular con $k \geq 0$, tiene un apareamiento perfecto.

2. Suponga que en una fiesta cada mujer conoce exactamente a k hombres y cada hombre conoce exactamente a k mujeres. En el baile hay un único baile, pruebe que en ese baile cada mujer puede sacar a bailar a un hombre y cada hombre puede sacar a bailar a una mujer.

3. Prueba que Q_n tiene al menos un apareamiento perfecto de cardinalidad 2^{n-1} y que es 2-cromática.

4. Si v es un vértice de G tal que $\delta(v) \leq n$, muestra que G es n-coloreable si y sólo si $G - v$ es n-coloreable.

5. *a*) En unos laboratorios químicos hay que almacenar un pedido compuesto por un total de siete sustancias químicas diferentes que distinguiremos con los números del 1 al 7. Así mismo, la naturaleza de estas sustancia es tal que para todo $2 \leq i \leq 5$ la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimento que la sustancia $i-1$ o la $i+2$. Determinar el mínimo número de compartimentosque se necesitan para almacenar de forma segura estas siete sustancias.

   b) Supongamos que además de las condiciones anteriores, los cuatro pares siguientes de las sietemismas sustancias requieren también compartimentos separados: 1 y 4, 2 y 5, 2 y 6, 3 y 6. ¿Cuál es el menor número de compartimentos de almacenamiento que se necesitan ahora?