Algo de conexidad...

Definición 1. Un *camino* C entre los vértices u y v de una gráfica G es una sucesión de vértices de G, $C = (x_0, x_2, \ldots, x_k)$, tal que:

- $u = x_0$;
- $v = x_k$ y
- x_i es adyacente a x_{i+1} para $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

C suele llamarse un (u, v)-camino. x_0 y x_k son los *extremos* de C y cualquier otro vértices (es decir, x_i con $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$) es un vértice *interior* de C.

Notemos que un camino puede repetir aristas y vértices, es decir, pasar varias veces por las mismas aristas y los mismo vértices.

Definición 2. La *longitud* de un camino $P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ es el número de aristas que **recorre** dicho camino (puede pasar varias veces por la misma arista, lo que cuenta es el número de veces que pasa, no el número de aristas), que es igual al número de elementos de la sucesión menos uno, *i.e.*, la longitud de P es k ($l(P) = k$).

Ejemplos 1. Dado una gráfica G y un vértice v de G, el camino (v) tiene longitud cero. Dados dos vértices, u y v en G, tales que $uv \in A(G)$, los siguientes son caminos: (u, v), (u, v, u), (u, v, u, v), etc.

Definición 3. Un *paseo* es un camino que no repite aristas.

Definición 4. Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices (y, por lo tanto, no repite aristas).

Si la trayectoria (respectivamente paseo) empieza en u y termina en v también suele llamársele una (u, v)-trayectora (resp. (u, v)-paseo).

Los caminos y los paseos pueden o no terminar en el mismo vértice en el que empezaron. Si su vértice inicial y terminal son diferentes, se dicen *abiertos*. Si son iguales, se dicen *cerrados*.

Notemos que una trayectoria no puede terminar en el mismo vértice en el que empieza.

Definición 5. Un *ciclo* en una gráfica G es un camino cerrado que no repite vértices **a excepción del primero y el último** (que necesariamente deben ser el mismo puesto que el camino es cerrado).

Definición 6. Un *subcamino* (respectivamente *subpaseo*, *subtrayectoria*) de un camino (resp. paseo, trayectoria) dado $C = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es una subsucesión de C que a la vez es camino (resp. paseo, trayectoria).

Nota. Notemos que "ser subcamino" (respectivamente "ser subpaseo", "ser subtrayectoria") es una relación no simétrica y transitiva. Si C' es un subcamino de C, no necesariamente C es un subcamino de C'. Es transitiva, ya que si C'' es un subcamino de C' y C' es un subcamino de C, significia que C'' es una subsucesión de C' que es una subsuceción de C. Así, C'' es una subsucesión de C. Además, ya que C'' es subcamino de C', en particular es un camino. Así, C'' es un subcamino de C. Lo mismo les pasa a los subpaseos y a las subtrayectorias.

Los caminos se pueden "pegar":

Definición 7. Dados dos caminos $C = (u_0, u_1, \ldots, u_p)$ y $C' = (v_0, v_1, \ldots, v_q)$, si el último vértice de C es igual al primer vértice de C' (es decir, $u_p = v_0$) entonces la *concatenación*[1] de C y C', $C \bullet C'$, se define como el camino $(u_0, u_1, \ldots, u_p = v_0, v_1, \ldots, v_q)$. Notemos que C y C' son paseos o trayectorias, su concatenación (en caso de que exista) no necesariamente es una paseo o una trayectoria. Si C y C' son camino, su concatenación existe y además el primer vértice de C es igual al último de C' entonces $C \bullet C'$ es un camino cerrado.

Nota. Si $C = (u_0, u_1, \ldots, u_p)$ es un camino, podemos recorrerlo en *sentido contrario* (y sigue siendo camino), $C^{-1} = (u_p, u_{p-1}, \ldots, u_1, u_0)$.

Los caminos tienen cumplen cierta aditividad:

Proposición 1. *Si C y C' son caminos y su concatenación existe entonces $l(C) + l(C') = l(C \bullet C')$.*

También podemos "recortar" los caminos:

Definición 8. Dado un camino $C = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ y x_i, x_j vértices interiores de C con $i < j$ entonces $C[x_i, x_j]$ denota el subcamino de C dado por $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j)$.

Proposición 2. *Dado un camino $C = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ y x_i un vértice interior de C entonces:*

- $C[x_0, x_i] \bullet C[x_i, x_k] = C$
- $l(C[x_0, x_i]) + l(C[x_i, x_k]) = l(C)$

Teorema 1. *Dada una gráfica G y dos vértices u, v en G, todo (u, v)-camino en G contiene un (u, v)-subcamino que es trayectoria.*

Proof. Sea $C = (u = x_0, x_1, \ldots, x_k = v)$ tal (u, v)-camino. Hagamos la prueba por inducción sobre la longitud de C. Si la longitud de C es cero o uno, debe ser una trayectoria (porque no hay caminos que no sean trayectorias con a lo más una arista). Entonces C es un subcamino de si mismo que es una trayectoria. Así, supongamos que la longitud de C es al menos dos.

[1] *Concatenar* viene de la palabra latina *catena* que significa cadena en español y de la preposición latina *cum*, en español con, y significa juntar cadenas... que es lo que estamos haciendo.

Si C no repite vértices (es decir, $x_i \neq x_k$ siempre que $i \neq k$ entonces C es una trayectoria. Así, C es un subcamino de si mismo que es una trayectoria.

En otro caso, C repite vértices. Que C repita vértices significa que existen dos enteros i, j, diferentes, entre 0 y n tales que $x_i = x_j$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Como $x_i = x_j$, podemos "recortar" el camino para obtener uno más chico, así tomemos $C' = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. C' es una subsucesion de C y es un camino (se sigue de que C lo es). De C, quitamos $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j)$. Notemos que $l(C) = l(C') + l((x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j))$. La longitud de $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j)$ es $j - i$, y ya que $j > i$, $j - i$ es positivo. Así, $l(C') < l(C)$. Por hipótesis inductiva C' contiene un (u, v)-subcamino (que es, a su vez, un subcamino de C) que es una trayectoria. □

Teorema 2. *Dada una gráfica G, si G posee un camino cerrado C de longitud impar entonces C posee un subcamino cerrado que es un ciclo*

Proof. Sea $C = (x_0, x_1, \ldots, x_k = x_0)$ tal camino cerrado de longitud k, que por hipótesis es impar. Hagamos la prueba por inducción sobre la longitud de C. Observemos que no existen caminos cerrados de longitud tres que no sean ciclos (pues un camino cerrado de longitud tres "pasa" por tres aristas, no necesariamente diferentes; si pasa tres veces por la misma arista, no será cerrado, si pasa por dos aristas entonces pasará dos veces por la misma arista y por otra más, así no será cerrado; por lo tanto tiene que pasar por tres aristas distintas). Si $k = 5$ entonces existen dos posibilidades o no tiene vértices repetidos (y por lo tanto C es un ciclo) o tiene exactamente un vértice repetido (y C posee un subcamino cerrado de longitud tres que es un ciclo). Supongamos que todo camino cerrado de longitud impar menor que k contiene un subcamino cerrado que es un ciclo.

Si C no repite vértices excepto el primero y el último (es decir, $x_i \neq x_k$ siempre que $i \neq k$ excepto para $x_0 = x_k$) entonces C es un ciclo. Así, C es un subcamino cerrado de si mismo que es un ciclo.

En otro caso, C repite vértices. Que C repita vértices significa que existen dos enteros i, j, diferentes, entre 0 y n tales que $\{i, j\} \neq \{0, 1\}$ (pues los vértices iniciales y finales son iguales) y $x_i = x_j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Observemos que podemos "cortar" el camino cerrado C en dos subcaminos cerrados:

- $C' = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j)$ y
- $C'' = (x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$.

Las aristas que recorre C son las mismas que recorren C' y C'', así $l(C) = l(C') + l(C'')$. Como la la longitud de C es impar entonces C' o C'' tiene longitud impar. Al aplicar la hipótesis inductiva, obtenemos el resultado deseado. □

Teorema 3. *Dada una gráfica G, si todo vértice de G tiene grado al menos dos entonces G posee (al menos) un ciclo.*

Proof. Tomemos un vértice arbitrario de G y nombrémoslo v_0. Por hipótesis, v_0 tiene dos vecinos, escojamos uno y llamémoslo v_1. Así, (v_0, v_1) es una trayectoria.

v_1 tiene al menos dos vecinos por hipótesis, es decir, $|N(v_1)| \geq 2$. Así, $|N(v_1) \setminus \{v_0\}| \geq 1$. Tomemos un vértice en $N(v_1) \setminus \{v_0\}$ y llamémosle v_2. Así, (v_0, v_1, v_2) es una trayectoria.

Análogamente al paso previo, $|N(v_2) \setminus \{v_1\}| \geq 1$. Tomemos un vértice en $N(v_2) \setminus \{v_1\}$ y llamémosle v_3. v_3 está en $\{v_0\} \cup V(G) \setminus \{v_0, v_1\}$. Si $v_3 \in \{v_0\}$ entonces $v_0 = v_3$ y así $(v_0, v_1, v_2, v_3 = v_0)$ es un ciclo, como se pedía. Si $v_3 \notin \{v_0\}$ entonces $v_3 \in V(G) \setminus \{v_0, v_1\}$ y continuamos.

Supongamos ahora que hemos construido la trayectoria $(v_0, v_1, \ldots, v_i)$; $|N(v_i) \setminus \{v_{i-1}\}| \geq 1$. Tomemos un vértice en $N(v_i) \setminus \{v_{i-1}\}$ y llamémosle v_{i+1}. v_{i+1} está en $\{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}\} \cup V(G) \setminus \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}, v_{i-1}\}$. Si $v_i \in \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}\}$ entonces $v_i = v_k$ para alguna $k \in \{0, 1, \ldots, i-2\}$ y así $(v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_i = v_k)$ es un ciclo, como se pedía. Si $v_i \notin \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}\}$ entonces $v_i \in V(G) \setminus \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}, v_{i-1}\}$ y $(v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{i+1})$ es una trayectoria más larga.

Como G es finita, el número de vértices lo es (son n vértices), por lo que la recursión debe terminar en algún momento. Esto es, si el ciclo no ha aparecido en el n-ésimo paso, tendremos una trayectoria $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1})$ que tiene n vértices (por ser trayectoria, todos son distintos). Al repetir el procedimiento, pues v_{n-1} tiene por hipótesis grado al menos dos, el siguiente vértice caerá en alguno de los anteriores y habremos terminado. $\square$

Definición 9. Una gráfica G es *conexa* si para cualquier par de vértices u, v de G existe una (u, v)-trayectoria entre ellos.

Notemos que en la definición previa, podemos substituir (u, v)-trayectoria por (u, v)-camino. Toda gráfica con un sólo vértice es conexa.

Definición 10. Si una gráfica no es conexa se dice *disconexa*.

Definición 11. Dada una gráfica G, a las subgráficas conexas **máximas por contención en los vértices** se les llama las *componentes conexas* de G.

Teorema 4. *Dada una gráfica G y dos vértices distintos u y v de G, u y v están en un mismo ciclo si y sólo si existen dos (u, v)-trayectorias **ajenas**.*

Definición 12. Una gráfica G se dice *bipartita* si existe una partición de sus vértices en dos conjuntos (o *bipartición*) X y Y (las partes de G) tales que toda arista de G tiene extremos en partes diferentes de G. Es decir, G es bipartita si existen conjuntos de vértices X y Y que satisfacen que:

- $X \cup Y = V(G)$,
- $X \cap Y = \emptyset$,
- $X \neq \emptyset \neq Y$ y

- $G[X]$ ni $G[Y]$ tienen aristas.

Teorema 5. *Una gráfica conexa no-trivial (es decir, con más de un vértice) es bipartita si y sólo si no posee ciclos de longitud impar.*

Proof. Consideremos G una gráfica bipartita conexa y supongamos que posee un ciclo de longitud impar. Sea $\{X, Y\}$ la partición de $V(G)$, es decir, $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$, $X \neq \emptyset \neq Y$ y ni $G[X]$ ni $G[Y]$ poseen aristas (es decir, ninguna arista tiene ambos extremos en X o ambos extremos Y, es decir, es bipartita). Sea $C = (x_0, x_1, \ldots, x_{2k+1} = x_0)$ el ciclo de longitud impar. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_0 \in X$. Probaremos, por inducción sobre el índice de cada vértice en el ciclo, que para cualquier vértice del ciclo x_i, si i es par entonces x_i está en X y si i es impar entonces x_i está en Y. Primero chequemos el paso baso. x_0 está en X por hipótesis y x_1 no puede estar en X puesto que es adyacente a x_0 entonces está en Y. La hipótesis inductiva es *para todo $j < i$, si j es par entonces x_j está en X y si j es impar entonces x_j está en Y*. Ahora probemos que si i es par entonces x_i está en X y si i es par entonces está en Y. Hay dos casos: i es par o es impar. Supongamos primero que i es par. Así $i-2$ es un número par e $i-2 < i$. Por lo tanto, x_{i-2} está en X. Como x_{i-1} es adyacente a x_{i-2} (pues son consecutivos en el ciclo) entonces x_{i-2} está en Y. Por un argumento análogo al anterior, x_i debe estar en X, que es lo que queríamos probar. Finalmente supongamos que i es impar. Así $i-2$ es impar e $i-2 < i$. Por la hipótesis inductiva, x_{i-2} está en Y. Así x_{i-1} está en X y x_i en Y. Así x_{2k+1} está en Y. Pero $x_{2k+1} = x_0$ (por ser un ciclo) que estaba en X, lo que contradice que sea una graica bipartita. Por lo tanto G no puede tener ciclos de longitud impar.

Ahora supongamos que G es una gráfica que no posee ciclos de longitud impar. Daremos una partición de los vértices de G de forma tal que nos diga que G es bipartita. Escogamos un vértice arbitrario de G, sea v. X será el conjunto de todos los vértices x tales que existan una (v, x)-trayectoria de longitud par y Y el conjunto de todos los vértices y tales que exista una (v, y)-trayectoria de longitud impar. Ya que la gráfica G es conexa, todo vértice está en X o está en Y, es decir, $X \cup Y = V(G)$. Probemos ahora que $X \cap Y = \emptyset$. Supongamos que no, es decir, supongamos que existe un vértice u que esté tanto en X como en Y. Es decir, existe una (v, u)-trayectoria de longitud par, sea $T = (v = a_0, a_1, \ldots, a_{2p} = u)$, y existe una (v, u)-trayectoria de longitud impar, sera $T' = (v = b_0, b_1, \ldots, b_{2q+1} = u)$. Así, $C = (v = a_0, a_1, \ldots, a_{2p} = u = b_{2q+1}, b_{2q}, \ldots, b_1, b_0 = v)$ es un camino cerrado de longitud impar. Por lo tanto, contiene un ciclo de longitud impar. Por lo tanto, $X \cap Y = \emptyset$. Falta mostrar que no existen aristas que tienen ambos extremos en X o ambos extremos en Y. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que existen dos vértices, u y u', en X tal que uu' es una arista de G. Por hipótesis existen (v, u)- y (v, u')-trayectorias de longitud par, sean $T = (v = a_0, a_1, \ldots, a_{2p} = u)$ y $T' = (v = b_0, b_1, \ldots, b_{2q} = u')$, respectivamente. Daremos un camino cerrado de longitud impar, $C = ((v = a_0, a_1, \ldots, a_{2p} = u, u' = b_{2q}, b_{2q-1}, \ldots, b_0 = v)$ que son las trayectorias T y T' junto con la arista (u, u'). La longitud de C es la suma de las longitudes de T y T' más uno (que es la longitud de la arista que agregamos). Como tanto T como T' tienen longitud par, su suma tiene longitud par más uno, C tiene longitud impar. Pero ya probamos que todo camino cerrado de longitud impar posee un ciclo de longitud impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto, X y Y forman una buena partición de los vértices de G que la hacen bipartita. □

Problema 1. *¿Por qué es necesario pedir que la gráfica sea no-trivial?*

Ahora demos algunas caracterizaciones de la conexidad. Ten cuidado porque aquí también se usan particiones de los vértices de la gráfica en dos conjuntos pero que no son lo mismo que para gráficas bipartitas.

Teorema 6. *Una gráfica G es conexa si y sólo* ***para toda*** *partición de sus vértices en dos conjuntos, X y Y, siempre existe una (X, Y)-arista (es decir, una arista que tiene un extremo en X y uno en Y.*

Proof. Supongamos primero que G es conexa y demos una partición *arbitraria* de los vértices de G en dos conjuntos, X y Y. Puesto que ambos son conjuntos no vacíos, existen $x \in X$ y $y \in Y$. Ya que G es conexa, existe una (x, y)-trayectoria, sea $T = (x = u_0, u_1, \ldots, u_p = y)$. Pensemos en el siguiente subconjunto de números naturales $S = \{i : u_i \in X\}$. S es no vacío, pues $u_0 \in S$ y para todo $i \in S$, $i < p$ (pues $u_p = y \in S$), por lo tanto está acotado, y es finito (pues es subconjunto de $\{0, 1, \ldots, p\}$. Así, tiene un elemento máximo, llámemosle k. Como ya observamos, $k < p$. Así, u_{k+1} es un vértice de la trayectoria que no puede estar en X (pues k, al ser máximo, nos dice que u_k es el *último* elemento de la trayectoria en X. Por lo tanto, u_{k+1} esté en Y. Por lo tanto, (u_k, u_{k+1}) es una arista con extremos en X y en Y, por lo tanto es una (X, Y)-arista.

Ahora supongamos que para toda partición de los vértices de G en dos conjuntos, X y Y, siempre existe una (X, Y)-arista. Probaremos que G es conexa. Es decir, debemos probar que para cualesquiera vértices u y v distintos de G, existe una (u, v)-trayectoria (o un (u, v)-camino, son equivalentes). Probaremos un poco más, probaremos que a partir de u podemos *alcanzar* cualquier otro vértice de G. Ésto lo haremos por contradicción. Pensemos en el conjunto de todos los vértices que puedo alcanzar desde un vértice arbitrario w, sea $A = \{x \in V(G) :$ existe una (w, x)-trayectoria $\}$. Si $A = V(G)$ ya terminé (porque entonces tenemos que tanto u como v están en A, es decir, existen (x, u)- y (x, v)-trayectorias en G, las cuáles puedo pegar a través de x para obtener un (u, v)-camino el cuál ya sabemos que contiene una (u, v)-trayectoria). Así que supongamos que $A \neq V(G)$. Como A es un subconjunto de vértices de G, $A \subsetneq V(G)$. Es decir, $V(G) \setminus A$ es no vacío. $V(G) \setminus A$ son todos los vértices que no puedo alcanzar desde w, es decir, todos los vértices x tales que no existe ningún (w, x)-camino en G. Pensemos en la siguiente partición de los vértices de G: A, $V(G) \setminus A$. Obviamente es una partición de los vértices de G. Pero por hipótesis, existe una $(A, V(G) \setminus A)$-arista. Sean a en A y b en $V(G) \setminus A$ tales que (a, b) sea una arista de G. Como a está en A, existe una (x, a)-trayectoria T. Entonces $T \cup (a, b)$ es una (x, b)-trayectoria. Por lo tanto, $b \in A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $A = V(G)$ y G es conexa. □

Teorema 7. *Una gráfica G es conexa si y sólo existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de G.*

Distancia

Definición 13. Dada una gráfica G y dos vértices u y v de G, la distancia entre u y v se define como la menor de las longitudes de cualquier (u, v)-trayectoria en G,en caso de existir al menos una de esas trayectorias, y en otro caso se define como infinito. Es decir, si existe al menos una (u, v)-trayectoria:

$$d_G(u,v) = \min\{l(T) : T \text{ es una } (u,v)\text{-trayectoria}\}$$

y si no existe ninguna (u, v)-trayectoria:

$$d_G(u,v) = \infty.$$