Gráficas y juegos

Primera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. Se entrega por equipos de hasta dos personas.

1. *a*) Dibuja la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y conjunto de aristas $A(G) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_3, u_3u_5\}$.

   b) Dibuja una gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y cuyo conjunto de aristas $A(G)$ sea lo más grande posible. Determina el conjunto $A(G)$.

   c) Si una gráfica es de orden 3, ¿cuáles son los posibles tamaños de G?

   d) ¿Cuál es el tamaño máximo posible de una gráfica cuyo orden es n, donde n es un entero positivo?

2. ¿Existe una gráfica G de orden 5 o más que cumpla que cada vértice de G incide al menos una arista, pero no sucede que cualesquiera dos aristas son adyacentes? (Justifica tu respuesta.)

3. Da un ejemplo de una gráfica G de tamaño positivo con la propiedad de que cualquier vértice incide en cualquier arista.

4. Da un ejemplo de una gráfica que cumpla las siguientes propiedades:

   a) todo vértice es adyacente a dos vértices; y

   b) toda arista es adyacente a dos aristas.

5. *a*) Considera una gráfica G tal que $V(G) = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ y dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $\mathrm{mcd}(u, v) = 1$. Dibújala y determina $A(G)$.

   b) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq 3$. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.

   c) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i + j$ es múltiplo de cuatro. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.

   d) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i \cdot j$ es múltiplo de diez. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.

6. El Consejo Estudiantil de cierta escuela consta de 15 miembros. Diez diferentes comités en dicha escuela están compuestos por miembros del Consejo Estudiantil. Algunos comités tienen pocos miembros, mientras que otros tienen más. Algunos Consejeros Estudiantiles no pertenecen a ningún comité y otros pertenecen a varios. Muestra dos gráficas que ejemplifiquen esta situación, para cada una describe el conjunto de vértices y la relación entre ellos.

7. Da un ejemplo de una situación de la vida real que pueda ser representada por una gráfica. Dibuja la gráfica que describe dicha situación.

8. Ponle nombre a los vértices de la gráfica G en la figura 1, determina $d_G(v)$ para todo $v \in V(G)$, así como el orden n y el tamaño m de G y verifica que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m$.

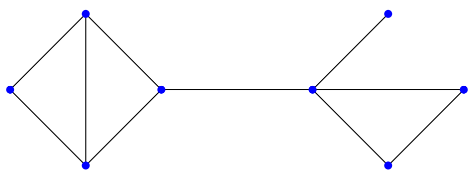

Figura 1: G

9. Muestra que no exista una gráfica con vértices de grado:

   a) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5.

   b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

   c) 0, 2, 2, 3, 4, 5, 6.

10. a) Encuentra una gráfica 3-regular con diez vértices.

b) Explica porque no puede existir una gráfica 3-regular con once vértices.

11. ¿Es posible determinar el orden y el tamaño de una gráfica si se conocen los grados de todos sus vértices? Justifica su respuesta.

12. ¿Es posible determinar los grados de los vértices de una gráfica si se conocen el orden y el tamaño de la misma? Justifique su respuesta.

Extras

A. Muestra que $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. (*Sugerencia.* Considera cómo es el grado máximo en una gráfica, el grado de todo vértice de la gráfica en cuestión y el teorema de la suma de los grados).

B. Muestra que, en cualquier grupo de dos o más personas, siempre existen dos personas que poseen el mismo número de amigos dentro del grupo (no se vale usar ningún teorema directamente).

C. Describe un grupo de cinco personas, en el cual cualesquiera dos de sus miembros tienen exactamente un amigo en común. ¿Puedes encontrar un grupo de cuatro personas con la misma propiedad?