Gráficas y juegos

Segunda tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea es individual, **no se aceptarán tareas que no cumplan este requisito**. Resuelve al menos **catorce** problemas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i + j$ es múltiplo de cuatro. Dibuja la gráfica G y determina el número de aristas.

2. Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i \cdot j$ es múltiplo de diez. Dibuja la gráfica G y determina el número de aristas.

3. Muestra que:
$$\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$$
para cualquier vértice v[1].

4. El número
$$d(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v)$$
es el *grado promedio* de G. Muestra **con todo detalle** que
$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

5. Dibuja las once gráficas no isomorfas con cuatro vértices.

6. Dada una gráfica G, se define el *complemento* de G (denotado como $\overline{G}$) como la gráfica con:

[1]Sí, ya sé. Algunos ejercicios pueden parecer algo simples u obvios, pero como les dije, esta materia es para que aprendan a escribir, aunque sea obvio. Pero recuerden, pueden substituir cualquier problema con alguno de los extras n_n

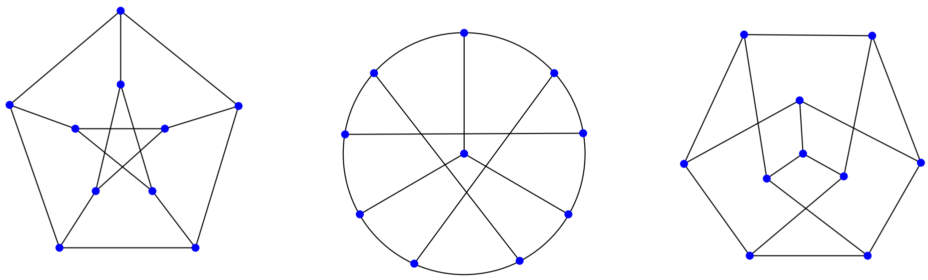
- $V(G) = V(\overline{G})$ y
- $uv \in A(\overline{G})$ si y sólo $uv \notin A(G)$ (siempre que $u \neq v$).

(a) Muestra que $\overline{G}$ es también una gráfica.
(b) Si G y H son isomorfas ¿entonces $\overline{G}$ y $\overline{H}$ son isomorfas?
(c) Si H es subgráfica de G ¿entonces $\overline{H}$ es subgráfica de $\overline{G}$?

7. Una gráfica es *autocomplementaria* si $G \cong \overline{G}$. Dibuja **todas** las gráficas autocomplementarias de orden menor o igual que cinco.

8. Muestra dos gráficas, con seis vértices, tal que todos sus vértices tengan grado dos pero que no sean isomorfas entre sí.

9. ¿Las siguientes tres gráficas son o no isomorfas? Argumenta porqué no o prueba porqué sí.



Una gráfica G se dice *bipartita* si existe una partición $\{X,\ Y\}$ del conjunto de sus vértices (*i.e.*, $X, Y \subseteq V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = V(G)$, a tales conjuntos se les llama las *partes* de la bipartición) que satisfaga que toda arista de G tiene extremos en partes **distintas**. Es decir, ninguna arista tiene ambos extremos en la misma parte.

10. Muestra que el complemento de una gráfica bipartita no necesariamente es bipartita.

11. Muestra que toda trayectoria (es decir, las gráficas formadas por exclusivamente una trayectoria) es bipartita.

12. Prueba que si G es bipartita y H es una gráfica isomorfa a G entonces H es bipartita.

13. Muestra[2] que $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. (*Sugerencia.* Considera cómo es el grado máximo en una gráfica, el grado de todo vértice de la gráfica en cuestión y el teorema de la suma de los grados).

14. Considera G una gráfica, ¿cómo se relacionan, en términos de cardinalidades, $V(G)$ y $V(\overline{H})$? ¿$A(G)$ y $A(\overline{G})$? ¿Y si además suponemos que G es autocomplementaria?

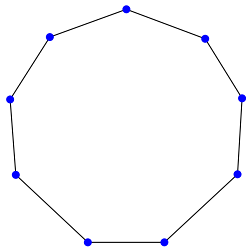
15. Caracteriza (es decir, describe *cómo* son) todas las gráficas:

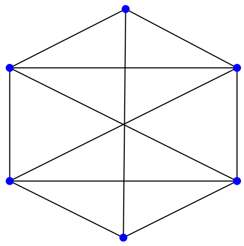
    (a) 0-regulares,

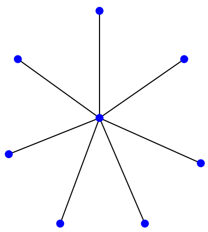
    (b) 1-regulares y

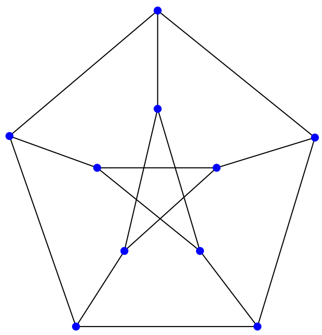
    (c) 2-regulares.

16. Etiqueta las siguientes gráficas y describe el conjunto de vértices y el conjunto de aristas para cada una. Encuentra su matriz de adyacencia y su matriz de incidencia:







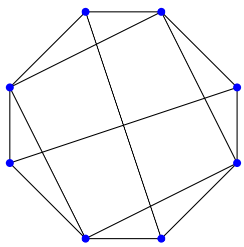


[2] Si ya hiciste este problema como extra en la tarea pasada, no es necesario que lo repitas, nomás recuérdanoslo.

17. $\mathbf{X}$ es la matriz de adyacencia de la gráfica G. Dibújala.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Muestra que la siguiente gráfica es autocomplementaria:



19. Muestra que toda gráfica bipartita completa $K_{p,q}$, con $p = |X|$ y $q = |Y|$, donde X e Y son los elementos de la bipartición, se puede obtener usando la suma de gráficas. Determina qué gráficas deben sumarse para construir a $K_{p,q}$.

Extras

A. Prueba que G_1 y G_2 (Figuras 1 y 2) *no* son isomorfas.

B. Demuestra que las siguientes gráficas *no* son isomorfas:

C. Calcula el orden y el tamaño del k-cubo.

D. Prueba que el k-cubo es bipartito.

E. Muestra que si G es autocomplementaria entonces su orden es múltiplo de cuatro o múltiplo de cuatro más uno (*Sugerencia.* Revisa el problema cuarto).

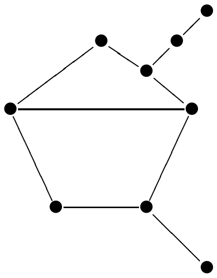


Figura 1: G_1

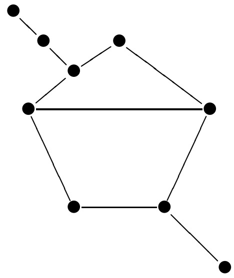
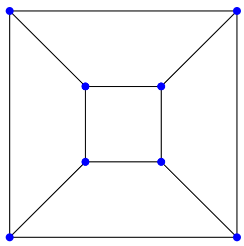
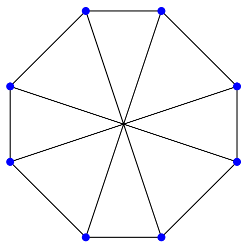


Figura 2: G_2





F. Si G es una gráfica bipartita con bipartición X, Y con $|X| = p$ y $|Y| = q$. Prueba que el tamaño de G es menor o igual que pq.

G. Prueba, mediante el uso de gráficas, que:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$