Gráficas y juegos

Tercera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se entrega en equipos de a lo más dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. Considera G una gráfica bipartita, con bipartición X, Y tal que $|X| = r$ y $|Y| = s$, prueba que el tamaño de G es a lo más rs.

2. Considera la siguiente gráfica G. Da un camino cerrado en G que pase por todos los vértices y que no sea un ciclo.

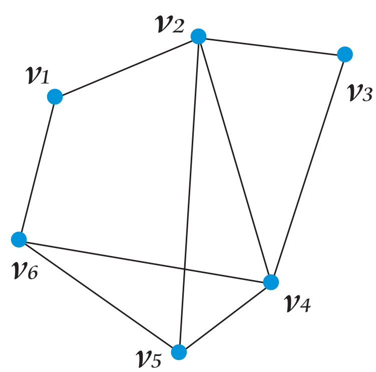

Figura 1: G

3. Prueba que una gráfica G es conexa si y sólo si existe un camino *abierto* que pasa por todos los vértices de G.

4. Sea G una gráfica y $\sim$ la relación *estar conectado con* sobre $V(G)$. Prueba que $\sim$ es de equivalencia.

5. Sean ω y n dos números enteros arbitrarios tales que $1 \leq \omega \leq n$. Da un ejemplo de una gráfica de orden n con ω componentes conexas.

6. ¿Es posible que el número de componentes conexas de una gráfica sea mayor al orden de la misma? Justifica tu respuesta.

7. Dada G una gráfica de orden trece con tres componentes conexas, prueba que al menos una componente de G tiene orden al menos 5.

8. Sean G y H dos gráficas isomorfas, prueba que si G es conexa entonces H también lo es.

9. Prueba que si G es una gráfica conexa entonces para cualesquiera vértices u y v de G existe un (u, v)-camino que pasa por todos los vértices de G.

10. Sea G una gráfica conexa.
    (a) Prueba que si $d_G(v) = 1$, entonces $G - v$ es conexa.
    (b) Si $|V(G)| \geq 2$ entonces el tamaño de G es al menos $n - 1$, donde n es el orden de G.

11. Demuestra que si $\delta(G) \geq 2$ entonces G contiene un ciclo.

12. Prueba que G es bipartita si y sólo si toda componente conexa de G es bipartita.

13. Prueba que una gráfica G es conexa si y sólo si para cualquier partición de $V(G)$ en dos conjuntos V_1, V_2 existe una V_1V_2-arista (es decir, una arista que tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2.

14. Prueba que si G es disconexa entonces $\overline{G}$ es conexa.

15. Sean u y v vértices de una gráfica conexa G. Se define la distancia $d(u, v)$ entre u y v como el mínimo de las longitudes de todas las posibles (u, v)-trayectorias en G. Prueba que d es una métrica para $V(G)$, es decir,
    (a) $d(u, v) \geq 0$ para cualesquiera u y v en $V(G)$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$,
    (b) $d(u, v) = d(v, u)$ para cualesquiera u y v en $V(G)$ y
    (c) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para cualesquiera u y v en $V(G)$.

Extras

A. Demuestra que toda gráfica G contiene una trayectoria de longitud al menos $\delta(G)$.

B. Sea G una gráfica de orden n par tal que al menos dos de las componentes de G son completas, prueba que el tamaño mínimo posible de G es $\frac{n^2-2n}{4}$.

C. Dada G una gráfica de orden once y e un puente de G y v un vértice de G.

   (a) Muestra que existe una componente de $G - e$ que posee al menos seis vértices.

   (b) Muestra que $G - v$ no siempre tieen una componente con al menos seis vértices.