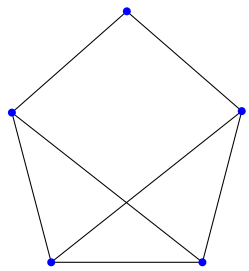
Gráficas y juegos

Cuarta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se entrega individualmente.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. (a) Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden 6.
   (b) Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden 7 tales que su grado máximo sea menor o igual a 4.
2. Determina todos los diferentes árboles generadores no isomorfos de la siguiente gráfica:



3. ¿Es posible que un árbol sea una gráfica r-regular? (Justifica tu respuesta.)
4. Sea G una gráfica con la propiedad de que para cualesquiera dos vértices distintos u y v de G, existe exactamente una (u, v)-trayectoria. Pruebe que G es un árbol.
5. Encuentre una gráfica con la siguiente propiedad: para cualesquiera dos vértices u y v, existen exactamente dos (u, v)-trayectorias.

6. Sea G una gráfica de orden p y tamaño q tal que $q \geq p \geq 3$. Muestra que G debe contener al menos un ciclo.

7. Considera K_4 con conjunto de vértices $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Dibuja todos los árboles generadores de K_4 que tienen a v_4 como vértice terminal.

8. Prueba que todo árbol es bipartito al dar **explícitamente** una bipartición de sus vértices y al mostrar que efectivamente es una bipartición.

9. Prueba que toda componente conexa de un bosque es un árbol.

10. Prueba que si F es un bosque de orden n con ω componentes conexas, entonces el tamaño de F es $n - \omega$.

Extras

A. De un ejemplo de un árbol T, de orden mayor o igual a 2, con la propiedad de que su complemento también es un árbol.

B. Prueba que el centro de un árbol es K_1 o K_2.

   (a) Pruebe que un árbol tiene exactamente dos hojas si y sólo si es una trayectoria.

   (b) Pruebe que un árbol tiene diámetro 2 si y sólo si es una estrella.

C. Prueba que cualquier gráfica G es el centro de una gráfica conexa. (Es decir, dada una gráfica G, prueba que es posible encontrar una gráfica H tal que el centro de H sea G.) Sugerencia: Dada G, construye una gráfica H tal que $V(H) = V(G) \cup \{u1, u_2, v_1, v_2\}$ y $E(H) = E(G) \cup \{u_1v_1, u_2v_2\} \cup \{u_1x : x \in V(G)\} \cup \{u_2x : x \in V(G)\}$ y prueba que cualquier vértice de G tiene excentricidad mínima.

D. Prueba que una gráfica G es un bosque si y sólo si toda subgráfica inducida de G contiene un vértice de grado a lo más 1.