
Gráficas y juegos

Primera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

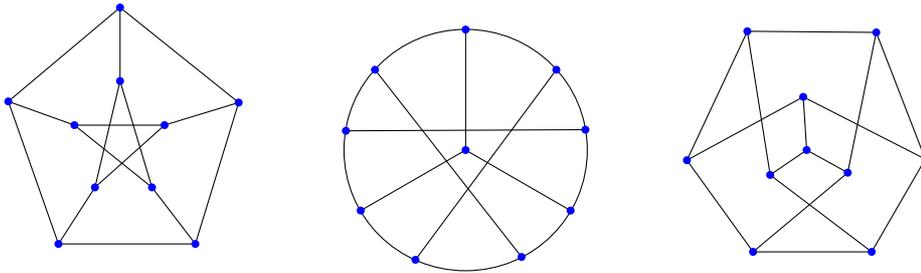
1. Prueba con la matriz de incidencia que la suma de los grados de los vértices de una gráfica es igual a dos veces el número de aristas.
2. Prueba que todo paseo cerrado posee un ciclo.
3. Prueba que la unión de paseos distintos con los mismos extremos posee un ciclo.
4. Dibuja todas las gráficas conexas no isomorfas con cinco vértices. Da algunos ejemplos de gráficas no conexas con seis vértices.
5. Considera una gráfica bipartita G con bipartición V_1, V_2 . Si x y y son vértices de G prueba que:
 - (a) Si $x, y \in V_i$, para $i \in \{1, 2\}$, entonces toda trayectoria entre x y y es de longitud par.
 - (b) Si $x \in V_i$ y $y \in V_j$, para $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$, entonces toda trayectoria entre x y y es de longitud impar.
6. Prueba que G es conexas si y sólo si posee un camino *cerrado* que pasa por todos los vértices de G .
7. Prueba que G es conexas si y sólo si posee un camino *abierto* que pasa por todos los vértices de G .
8. Muestra que no existe una gráfica con siete vértices de grado:
 - (a) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5.
 - (b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
 - (c) 0, 2, 2, 3, 4, 5, 6.
9. Dada una gráfica G , se define el *complemento* de G (denotado como \overline{G}) como la gráfica con:

- $V(G) = V(\overline{G})$ y
 - $uv \in A(\overline{G})$ si y sólo $uv \notin A(G)$ (siempre que $u \neq v$).
- (a) Muestra que \overline{G} es también una gráfica.
- (b) Si G y H son isomorfas ¿entonces \overline{G} y \overline{H} son isomorfas?
- (c) Si H es subgráfica de G ¿entonces \overline{H} es subgráfica de \overline{G} ?

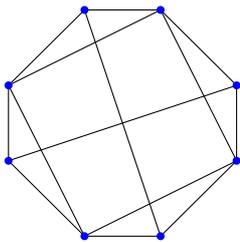
10. Muestra que el complemento de una gráfica bipartita no necesariamente es bipartita.

Extras

A. ¿Las siguientes tres gráficas son o no isomorfas? Argumenta porqué no o prueba porqué sí.



B. Muestra que la siguiente gráfica es autocomplementaria:



- C. Muestra dos gráficas, con seis vértices, tal que todos sus vértices tengan grado dos pero que no sean isomorfas entre sí.
- D. Muestra que si G es autocomplementaria entonces su orden es múltiplo de cuatro o múltiplo de cuatro más uno.