

---

## Gráficas y juegos

---

### Segunda tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

1. Prueba que toda gráfica conexa posee un subárbol generador. No olvides decir explícitamente qué entendemos por *subárbol generador*.
2. Prueba que si  $G$  es un árbol con al menos dos vértices entonces tiene al menos dos hojas.
3. Prueba que si  $G$  es un árbol con al menos tres vértices y  $T_0$  es el conjunto de todos los vértices de grado uno de  $T$  (es decir, es el conjunto de todas sus hojas) entonces  $G - T_0$  es un árbol. No olvides decir explícitamente qué se entiende por  $G - T_0$  y no olvides la definición de árbol.
4. Sean  $u$  y  $v$  vértices de una gráfica conexa  $G$ . Se define la distancia  $d(u, v)$  entre  $u$  y  $v$  como la mínima de entre las longitudes de todas las posibles  $uv$ -trayectorias en  $G$ . Prueba que  $d$  es una métrica para  $V(G)$ , es decir,
  - (a)  $d(u, v) \geq 0$  para cualesquiera  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  y  $d(u, v) = 0$  si y sólo si  $u = v$ ,
  - (b)  $d(u, v) = d(v, u)$  para cualesquiera  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  y
  - (c)  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$  para cualesquiera  $u$  y  $v$  en  $V(G)$ .
5. Prueba que si  $T$  es un árbol entonces el centro de  $T$  es el mismo que el centro de  $T - T_0$  (donde  $T_0$  es el conjunto de todas las hojas de  $T$ ).
6. Considera  $T$  un árbol y  $u$  un vértice de  $T$ . Muestra que existe una trayectoria  $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_n)$  de longitud  $e_T(u)$  en  $T$  y que  $x_n$  en dicha trayectoria es una hoja de  $T$ .
7. Prueba que el centro de un árbol es  $K_1$  o  $K_2$ .
8. Un *bosque* es una gráfica acíclica. Prueba que toda componente de un bosque es un árbol y que si  $\omega$  denota el número de componentes conexas de una gráfica entonces en un bosque se tiene que:

$$q = p - \omega.$$

9. Prueba que todo árbol con al menos dos vértices es bipartito al dar **explícitamente** una bipartición de sus vértices y al mostrar que efectivamente es una bipartición.
10. Considera una gráfica  $G$  con  $p$  vértices y  $q$  aristas tales que  $q \geq p \geq 3$ . Muestra que  $G$  posee al menos un ciclo.

## Extras

- A. Considera una gráfica conexa  $G$  y  $a$  una arista acíclica de  $G$ . Prueba que  $a$  está en todo subárbol generador de  $G$ .
- B. Muestra que el centro de un árbol es  $K_1$  si la trayectoria de longitud máxima es de longitud par y que el centro es  $K_2$  si la longitud de la trayectoria de longitud máxima es impar.
- C. (a) Pruebe que un árbol tiene exactamente dos hojas si y sólo si es una trayectoria.  
(b) Pruebe que un árbol tiene diámetro 2 si y sólo si es una estrella.
- D. Muestra que todo árbol tiene al menos  $\Delta$  hojas.
- E. Prueba que una gráfica  $G$  es un bosque si y sólo si toda subgráfica inducida de  $G$  tiene un vértice de grado a lo más uno.
- F. Considera un árbol  $T$  con  $k + 1$  vértices. Prueba que si  $G$  es una gráfica con grado mínimo al menos  $k$  entonces  $G$  posee una subgráfica isomorfa a  $T$ .