
Gráficas y juegos

Tercera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

1. Prueba que:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

2. Considera G una gráfica con al menos tres vértices. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) G es bloque,
 - (b) para cualquier vértice y cualquier arista de G existe un ciclo que pasa por ese vértice y esa arista y
 - (c) para cualquier par de aristas de G existe un ciclo que las contiene.
3. Define, para vértices u y v en una gráfica G , la conexidad lineal local $\lambda_G(u, v)$. Prueba que $\lambda(G) = \min\{\lambda_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$.
4. Prueba que $\kappa_G(u, v) \geq \tau_G(u, v)$, donde $\tau_G(u, v)$ es el máximo número de trayectorias internamente ajenas entre u y v en G .
5. Prueba $\kappa(G) \geq n$ si y sólo si para cualquier par de vértices u y v en G se tiene que $\tau_G(u, v) \geq n$ (Teorema de Whitney).
6. Da un ejemplo para mostrar que si P es una (u, v) -trayectoria en una gráfica no separable distinta de K_2 no necesariamente existe una (u, v) -trayectoria Q internamente ajena a P .
7. Considera G una gráfica sin vértices de corte con al menos dos vértices. Toma un vértice v que no esté en G y $u, w \in V(G)$. Define G' como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) \cup \{v\}$ y cuyo conjunto de aristas es $A(G) \cup \{vu, vw\}$. Prueba que G' no tiene vértices de corte.
8. Muestra que una gráfica G que no sea un bloque posee al menos dos bloques que contienen exactamente un vértice de corte.

Extras

A. Muestra que el número de bloques en una gráfica es igual a

$$\omega + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1),$$

donde $b(v)$ denota el número de bloques en los que está v .

B. Muestra que si G es 3-regular entonces $\kappa(G) = \lambda(G)$.

C. Recuerda que un bloque es una subgráfica maximal sin vértices de corte. Prueba que si G es una gráfica sin ciclos pares (*i.e.*, de longitud par) entonces cada bloque de G es K_1 , K_2 o un ciclo de longitud impar. (*Sugerencia.* Fíjate en las componentes conexas y considera dos casos: no posee ciclos o posee al menos un ciclo. En el último caso, prueba que no puede tener más aristas ni vértices usando el teorema de caracterización de bloques).

D. Considera G una gráfica sin vértices de corte con al menos tres vértices y X y Y dos subconjuntos ajenos de vértices de G con al menos dos vértices cada uno. Muestra que G posee dos trayectorias ajenas (no internamente ajenas) P y Q tales que:

- (a) P y Q empiezan en X ,
- (b) P y Q terminan en Y y
- (c) ningún vértice interno de P y Q pertenece a $X \cup Y$.