Gráficas y juegos

Cuarta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

1. Prueba que si una gráfica posee una partición de sus aristas en ciclos entonces posee un paseo euleriano cerrado.

2. Prueba el teorema de Ore 2: dada una gráfica G, si para cualquier par de vértices no adyacentes u y v se satisface que

   $$\delta(u) + \delta(v) \geq p$$

   entonces G es posee un ciclo hamiltoniano.

3. Prueba que si G satisface la condición de Ore dos y u, v son vértices no adyacentes de G entonces $G + uv$ satisface la condición de Ore 2.

4. Muestra que los recíprocos de los teorema de Ore uno y dos son falsos.

5. Prueba que si una gráfica posee un ciclo hamiltoniano entonces no tiene vértices de corte.

6. Prueba que si una gráfica tiene $2n$ vértices de grado impar entonces existe una partición de las aristas de G en n paseos abiertos.

7. Prueba o da un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

   (a) Toda gráfica euleriana es hamiltoniana.

   (b) Toda gráfica hamiltoniana es euleriana.

8. Completa la prueba del lema de Berge: prueba que si M es un apareamiento y P una trayectoria M-aumentante entonces $(M - P) \cup (P - M)$ es un apareamiento.

9. Completa la prueba del teorema de Hall: prueba que si G es una gráfica con bipartición (X, Y), M un apareamiento en G, $x_0 \in X$ tal que x_0 no está M-saturado, $S = \{z \in X :$ existe una x_0z-trayectoria M-alternante$\}$ y $T = \{z \in Y :$ existe una x_0z-trayectoria M-alternante$\}$ entonces todo punto de $S \setminus \{x_0\}$ está apareado bajo M con uno de T.

10. Considera W un conjunto no-vacío y S_1, S_2, …, S_n una familia finita y no-vacía de subconjuntos (no necesariamente distintos) de W. Un *sistema de distintos representantes (SDR)* para la familia (S_1, S_2, …, S_n) es una n-eada (a_1, a_2, … a_n) tal que $a_i \in S_i$ para cada $i = 1$, 2, …, n, y $a_i \neq a_j$ si y sólo si $i \neq j$.

    Prueba el siguiente teorema:

    Teorema 1. *La familia (S_1, S_2, …, S_n) de subconjuntos finitos no-vacíos de un conjunto W posee un sistema de representantes distintos si y sólo si*

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I|,$$

    para todos los subconjuntos I de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

    (*Sugerencia.* Usa el teorema de Hall.)

Extras

A. Da un ejemplo de una gráfica, con al menos tres vértices, bipartita, regular y conexa pero que no sea posea un ciclo hamiltoniano.

B. Prueba que si G es bipartita y posee un ciclo hamiltoniano entonces sus partes tienen la misma cardinalidad.

C. Dado un tablero de ajedrez (de ocho por ocho), asociémosle una gráfica de la siguiente manera: por cada cuadro pongamos un vértice y dos vértices son adyacentes si y sólo si sus cuadros correspondientes son adyacentes vertical u horizontalmente en el tablero. Dado cualquier cuadrícula de $m \times n$ podemos asociarle una gráfica de esta manera. Prueba que tales gráficas poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si m o n es par.

D. Muestra que si G es una gráfica 2-conexa que posee un apareamiento perfecto posee al menos dos apareamientos perfectos.

E. Prueba que un árbol posee a lo más un apareamiento perfecto.