

---

## Gráficas y juegos

---

### Quinta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

1. Prueba que:

$$\chi(G) = \min\{|P| : P \text{ es una partición de } V(G) \text{ en conj. independientes}\}.$$

2. Considera una gráfica  $G$  con  $\chi(G) = n$  y  $x \in V(G)$ . Prueba que  $\chi(G - x)$  es  $n$  o  $n - 1$ .

3. Prueba el teorema de los cinco colores.

4. Prueba, mediante el uso del teorema de Euler-Descartes, que ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  son planas.

5. Prueba que el grado mínimo de una gráfica plana es menor o igual que cinco.

6. Prueba que si  $G$  es una gráfica bipartita plana conexa con al menos tres vértices entonces  $q$  es menor o igual que  $2p - 4$ .

7. Considera una gráfica  $G$  cuyos vértices están coloreados con  $\chi(G)$  colores. Muestra que para cualquier par de colores  $i$  y  $j$  distintos, existen un vértice color  $i$  y un vértice color  $j$  tales que son adyacentes.

## Extras

A. Prueba que si cualquier par de ciclos de longitud impar en una gráfica se intersectan entonces su número cromático es a lo más cinco.

B. Prueba que

$$\chi(G) \geq \frac{p^2}{p^2 - 2q}.$$

- C. Prueba que si  $G$  es plana y todos sus ciclos son de longitud al menos  $k \geq 3$  entonces

$$q \leq \frac{k(p-2)}{k-2}$$

- D. Prueba que si  $G$  es una gráfica plana con al menos once vértices entonces su complemento no es plana.