Gráficas y juegos

Tercera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se puede entregar en equipos de dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. (a) Muestra que si G es bipartita y H es una gráfica isomorfa a G, entonces H es bipartita.
   (b) Muestra que si G es conexa y H es una gráfica isomorfa a G, entonces H es conexa.
2. Muestra que G es conexa si y sólo si existe un camino abierto que pasa por todos los vértices de G.
3. Considera G una gráfica de orden trece con tres componentes conexas. Prueba que G posee una componente de orden al menos cinco.
4. Demuestra que una gráfica G es bipartita si y sólo si todas sus componentes conexas son bipartitas.
5. Prueba que toda gráfica G contiene una trayectoria de longitud al menos $\delta(G)$.
6. Demuestra que si $\delta(G) \geq 2$ entonces G contiene un ciclo.

Extras

A. Sea G una gráfica de orden n par tal que al menos dos de las componentes de G son completas, prueba que el máximo tamaño posible de G es $\frac{n^2-2n}{4}$.

B. Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica G con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, prueba que la entrada a_{ij} de la matriz A^k, es el número total de (v_i, v_j)-caminos en G de longitud k.

C. Prueba que dos gráficas G y H son isomorfas si y sólo si existe un arreglo de sus vértices para el cual sus matrices de adyacencia son idénticas.