
Gráficas y juegos

Quinta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se puede entregar en equipos de dos personas (si el equipo no coincide con el de la tarea anterior).

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. Considera T un árbol y T' el conjunto de hojas del árbol. Prueba que los conjuntos

$$\{u : \text{para todo } v \in V(T), \text{exc}_T(u) \leq \text{exc}_T(v)\}$$

y

$$\{u : \text{para todo } v \in V(T), \text{exc}_{T-T'}(u) \leq \text{exc}_{T-T'}(v)\}$$

son iguales.

2. Prueba mediante el uso de inducción que el centro de cualquier árbol es K_1 o K_2 (la prueba no debe abarcar más de media página).
3. Prueba que en un árbol $q = p - 1$ por medio de inducción sobre el número de aristas.
4. Sea T un árbol de orden n tal que $d(v) \in \{1, 3\}$, para todo $v \in V(T)$. Prueba que T contiene $\frac{n-2}{2}$ vértices de grado 3.
5. Encuentre todos los árboles T tales que \overline{T} es un árbol.

Extras

A. Sabemos que un árbol cumple las siguientes propiedades:

- (a) $95 < n < 100$,
- (b) el grado de todo vértice de T es uno, tres o cinco y

(c) T tiene el doble de vértices de grado tres que de grado cinco.

¿Cuánto vale n ?

B. Considera T un árbol y n_i el número de vértices de grado i en T . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdadera?

- Si T no es una trayectoria entonces $n_1 \geq n_2$.
- Si $n_2 = 0$ entonces T tiene más hojas que otros vértices.

C. Pruebe que el número de vértices terminales de un árbol no trivial T , con $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es:

$$2 + \sum_{d(v_i) \geq 3} (d(v_i) - 2)$$