
Gráficas y juegos

Sexta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se puede entregar en equipos de dos personas (si el equipo no coincide con el de la tarea anterior).

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. Dada una gráfica G , $\text{cp}(G)$ es el número de vértices de corte de la gráfica G . Prueba que:
 - (a) Si e es una arista cíclica de G entonces $\text{cp}(G) \leq \text{cp}(G - e)$. (*Sugerencia.* Prueba que todo vértice de corte de G es vértice de corte en $G - e$.)
 - (b) Si T es un árbol generador de G , prueba que $\text{cp}(G) \leq \text{cp}(T)$.
 - (c) Deduce que toda gráfica posee al menos dos vértices que no son de corte.
2. Prueba que los siguientes enunciados son equivalentes:
 - (a) e es un puente de G .
 - (b) Existen dos vértices en G , u y w , tales que toda (u, w) -trayectoria pasa por e .
3. Da un ejemplo para mostrar que si P es una (u, v) -trayectoria en una gráfica no separable con al menos tres vértices entonces no necesariamente existe una (u, v) -trayectoria Q internamente ajena a P .
4. Prueba que si G tiene un puente, entonces tiene un vértice de corte y muestra que el recíproco no necesariamente se cumple.
5. Demuestra que si v es un vértice de corte en G , entonces v no es de corte en el complemento de G .

Extras

- A. Una arista uv es la diagonal de un ciclo γ en G si $\{u, v\} \subset V(\gamma)$ y $uv \notin E(\gamma)$. Prueba que una arista e de una gráfica no separable con al menos tres vértices es diagonal de un ciclo en G si y sólo si $G - e$ es no separable con al menos tres vértices.
- B. Considera T un árbol arbitrario con $k + 1$ vértices. Muestra que si G tiene grado mínimo al menos k entonces G posee una subgráfica isomorfa a T (*Sugerencia*. Usa inducción sobre el número de vértices de T).
- C. Prueba que no existe una gráfica 3-conexa de tamaño 7 (*Sugerencia*. Considera un conjunto de corte mínimo en G . Al quitarlo ¿qué te queda?