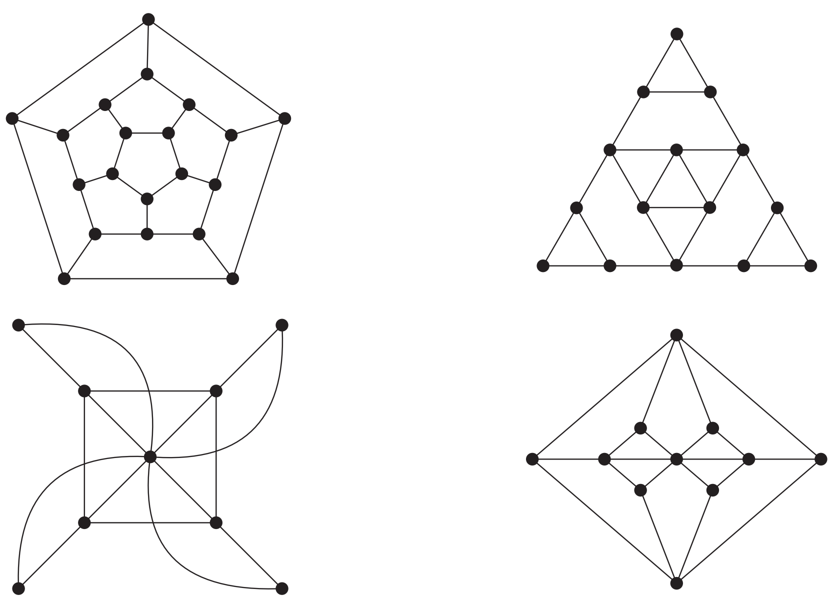
Gráficas y juegos

Octava tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. Determina cuáles de las siguientes gráficas poseen un ciclo o una trayectoria hamiltoniana (en caso negativo, argumenta por qué):



2. Encuentre una gráfica que no sea hamiltoniana tal que para todo $S \subset V(G)$ el número de componentes conexas de $G - S$ es a lo más la cardinalidad de S.

3. Prueba que si dos gráficas G y H son hamiltonianas entonces la gráfica $G \times H$ también es hamiltoniana. ¿El recíproco es cierto?

4. **Prueba del Teorema de Pósa**: Mostraremos que si G tiene al menos tres vértices, satisface la condición de los grados de Pósa y no es la gráfica completa entonces podemos agregar una arista entre vértices no adyacentes u y v cuyos grados satisfagan que $d(u) + d(v) \geq n$. Repitiendo este procedimiento eventualmente llegaremos a la gráfica completa K_n. Se seguirá del teorema de Bondy-Chvátal que G posee un ciclo hamiltoniano.

   La clave para probar que existen esos vértices adecuados u y v es fijarse en la sumas $d_i + d_{i+1}$, donde los grados están ordenados en sentido creciente $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$.

   (a) Muestra que si $d_1 + d_2 \geq n$ entonces existen vértices u y v que satisfacen la condición pedida. *Sugerencia:* toma un vértice u con grado d_1. Con este resultado, podemos suponer que $d_1 + d_2 < n$ y ahora considerar sumas $d_i + d_{i+1}$ para $i > 2$.

   (b) Toma r el mayor entero menor que $\frac{n}{2}$, es decir, $r := \frac{n}{2} - 1$ si n es par o $r := \frac{n-1}{2}$ si n es impar. Muestra que $d_r + d_{r+1} \geq n$. Bajo el supuesto de que $d_1 + d_2 < n$, el incico anterior implica que debe existir un i entre 2 y r, inclusive, tal que $d_{i-1} + d_i < n$ y $d_i + d_{i+1} \geq n$.

   (c) Con tal i muestra que $d_i < n - i$.

   (d) Completa la prueba del teormea de Pósa por medio de mostrar que existen u y v con las condición pedida. *Sugerencia:* toma un vértice u con grado d_i.

5. Una gráfica G es *hipohamiltoniana* si G no es hamiltoniana y $\forall v \in V(G)$ se tiene que $G - v$ es hamiltoniana. Prueba que la gráfica de Petersen es hipohamiltoniana.

Extras

A. Sea D la sucesión de enteros 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5. Prueba que cualquier gráfica de orden siete, tal que la sucesión de sus grados ordenada de manera creciente es D, posee un ciclo hamiltoniano pese a que no satisface la condición de los grados de Pósa. *Sugerencia:* Muestra que si u es un vértice de grado tres, existe un vértice v de grado 4 o 5 no adyacente a u. Observa qué sucede cuando se agrega la arista uv a la gráfica.

B. Prueba que el n-cubo, Q_n, posee un ciclo hamiltoniano para toda $n \geq 2$.

C. Muestra que si una gráfica satisface la condición de Dirac, también satisface la condición de los grados de Pósa.