Teoría de las Gráficas

Tarea nona

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se puede entregar en equipos de hasta dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

Considera W un conjunto no-vacío y $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n$ una familia finita y no-vacía de subconjuntos (no necesariamente ajenos) de W. Un *sistema de distintos representantes (SDR)* para la familia $(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n)$ es una n-ada $(a_1,\ a_2,\ \ldots a_n)$ tal que $a_i \in S_i$ para cada $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, y $a_i \neq a_j$ si y sólo si $i \neq j$.

1. (a) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

   $$S_1 = \{1, 4\},\ S_2 = \{2, 5\},\ S_3 = \{4\}, S_4 = \{3, 5\} \text{ y } S_5 = \{3, 5\}.$$

   ¿Posee la familia $(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_5)$ un sistema de distintos representantes? ¿Por qué?

   (b) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

   $$S_1 = \{1\},\ S_2 = \{2, 3\},\ S_3 = \{1, 4, 5\}, S_4 = \{1, 2\} \text{ y } S_5 = \{1, 3\}.$$

   ¿Posee la familia $(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_5)$ un sistema de distintos representantes? ¿Por qué?

   En general, dada una familia de conjuntos $(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n)$, si existen k de ellos cuya unión tiene menos de k elementos entonces la familia no posee un sistema de representantes distintos.

2. Ésto es, si existe algún $I \subseteq \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ tal que:

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \qquad |I|,$$

3. Enuncia el recíproco de la afirmación anterior.

4. Representa la situación del primer problema en forma de un gráfica. (*Sugerencia.* Recuerda que la *pertenencia* es una relación sobre la clase de los conjuntos).

5. Con el Teorema de Hall, prueba que:

   Teorema 1. *La familia* $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ *de subconjuntos finitos no-vacíos de un conjunto* W *posee un sistema de representantes distintos si y sólo si*
   $$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I|,$$
   para todos los subconjuntos I *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Prueba que si tanto M como M^* son apareamientos en una gráfica G entonces $M \triangle M^*$ es un apareamiento de G.

7. Considera una gráfica bipartita $G[X, Y]$. Para algún $S \subseteq X$, llama E_1 al conjunto de las aristas en G incidentes con algún vértice en S y llama E_2 al conjunto de las aristas de G incidentes con algún vértice en $N(S)$. ¿Es cierto, en general, que $E_1 \subseteq E_2$? ¿Por qué?

8. (a) Considera G una gráfica bipartita. Prueba que G posee un apareamiento perfecto si y sólo si $|S| \leq |N(S)|$.

   (b) Da un ejemplo que la condición anterior no garantiza la existencia de un apareamiento perfecto en gráficas arbitrarias.

9. Considera una gráfica bipartita $G[X, Y]$ tal que todo vértice de X es de grado impar. Supón que cualesquiera dos vértices de X tienen un número par de vecinos en común. Muestra que G posee un apareamiento que satura X.

10. Dados $G[X, Y]$ una gráfica bipartita y S_1 y S_2 subconjuntos de X, muestra que:
    $$|N(S_1)| + |N(S_2)| \geq |N(S_1 \cup S_2)| + |N(S_1 \cap S_2)|.$$

Extras

A. (a) Muestra que la gráfica de Petersen tiene exactamente seis apareamientos perfectos.

   (b) Llamemos $pm(G)$ al número de apareamientos perfectos en una gráfica G. Calcula $pm(K_{2n})$ y $pm(K_{n,n})$.

B. Muestra que toda gráfica 2-conexa que posee un apareamiento perfecto posee al menos dos apareamientos perfectos.

   Recuerda que dados dos conjuntos S y T, la *diferencia simétrica* de S y T, $S \triangle T$, es $(S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, lo que es igual a $(S \cup T) \setminus (S \cap T)$.

C. Considera S y T subconjuntos independientes máximos de vértices de una gráfica G. Muestra que $G[S \triangle T]$ posee un apareamiento perfecto.