Gráficas y juegos

Primera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. Se entrega por equipos de hasta dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los más simples.

1. *a*) Dibuja la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y conjunto de aristas $A(G) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_3, u_3u_5\}$.

   b) Dibuja una gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y cuyo conjunto de aristas $A(G)$ sea lo más grande posible. Determina el conjunto $A(G)$.

   c) Si una gráfica es de orden 4, ¿cuáles son los posibles tamaños de G?

2. ¿Existe una gráfica G de orden cinco o más que cumpla que cada vértice de G incide al menos una arista pero tal que ningún par de sus aristas sea adyacente? (Justifica tu respuesta.)

3. *a*) Considera una gráfica G tal que $V(G) = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ y dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $\mathrm{mcd}(u, v) = 1$. Dibújala y determina $A(G)$.

   b) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq 3$. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.

   c) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i + j$ es múltiplo de cuatro. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.

   d) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i \cdot j$ es múltiplo de diez. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.

4. El grado promedio de una gráfica G se define como:

$$d(G) := \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v),$$

muestra con todo detalle que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ (recuerda que n es el orden de la gráfica, es decir, el número de vértices que posee, $\delta(G)$ el grado mínimo de G y $\Delta(G)$ el grado máximo de G).

5. Muestra que en cualquier grupo de dos o más personas, siempre existen dos personas que poseen el mismo número de amigos.

Extras

A. Describe un grupo de cinco personas, en el cual cualesquiera dos de sus miembros tienen exactamente un amigo en común. ¿Puedes encontrar un grupo de cuatro personas con la misma propiedad?

B. *a*) Muestra que existe una gráfica con siete vértices y doce aristas tal que el grado de cada vértice es dos, tres o cuatro.

   b) Muestra que no existe una gráfica de orden doce y tamaño veintiocho en la que el grado de cada vértice sea tres o cuatro.