Gráficas y juegos

Segunda tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se entrega individualmente.

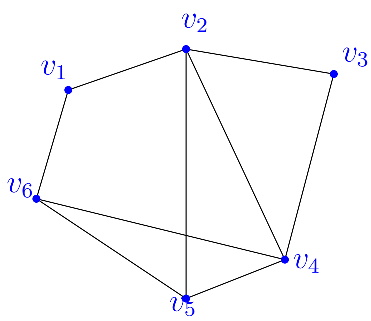
Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los más simples.

1. (a) Muestra que existe una gráfica simple con siete vértices y doce aristas tal que el grado de cada vértice es dos, tres o cuatro.

   (b) Muestra que no existe una gráfica simple de orden doce y tamaño veintiocho en la que el grado de cada vértice sea tres o cuatro.

2. Considera una colección $z_1, z_2, \ldots, z_k$ de números enteros impares. Prueba que $\sum_{i=1}^{k} z_i$ es par si y sólo si k es par.

3. (a) Encuentra la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia de la siguiente gráfica:



   (b) $\mathbf{X}$ es la matriz de adyacencia de la gráfica G. Dibújala.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Caracteriza todas las gráficas k-regulares para $k = 0, 1, 2$.

5. Prueba que si todo vértice en un gráfica G tiene al menos grado uno (es decir, $\delta(G) \geq 1$) entonces G tiene al menos $\lceil n/2 \rceil$ aristas (es decir, $m \geq \lceil n/2 \rceil$,donde $\lceil x \rceil$ es el *menor entero mayor o igual que x. Sugerencia.* Pruébalo primero para gráfica de orden par, para esto usa la suma de los grados de los vértices, luego ajusta la prueba para gráficas de orden impar).

Extras:

1. Muestra que toda gráfica simple de orden n es isomorfa a una subgráfica de K_n.

2. El n-cubo Q_n $(n \geq 1)$ es la gráfica definida de manera recursiva como: $Q_1 = K_2$ y $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$. Prueba que

   (a) Determina el número de vértices y el número de aristas del n-cubo.

   (b) Prueba que el n-cubo es bipartita.