Gráficas y juegos

Tercera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se entrega en equipos de dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

Recuerda que dada una gráfica G y dados v un vértice en G y e una arista de G, $G - v$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) \setminus \{v\}$ y cuyo conjunto de aristas es $A(G) \setminus \{xv : xv \in A(G)\}$ y $G - e$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices coincide con el de G pero su conjunto de aristas está dado por $A(G) \setminus \{e\}$. Observa que tanto en $G-v$ como en $G-e$, "$-$" denota una nueva operación.

Una arista se dice *cíclica* si pertenece a al menos un ciclo de la gráfica. Una arista se dice *acíclica* si no pertenece a ningún ciclo de la gráfica.

Dada G una gráfica conexa, sabemos que $m \geq n - 1$.

1. Prueba que una arista e en una gráfica conexa G es cíclica si y sólo si $G - e$ es conexa. O bien, prueba la equivalencia: una arista e en una gráfica conexa G es acíclica si y sólo si $G - e$ es disconexa.

2. Prueba que si $\delta(G) \geq 2$ entonces G posee un ciclo. (*Sugerencia.* Considera una trayectoria de longitud máxima en G, ¿qué pasa con los vértices de los extremos?)

3. (a) Considera G una gráfica conexa con un vértice de grado uno, llamémosle v. Prueba que $G - v$ es conexa.
   (b) Considera G una gráfica conexa, u un vértice de G y v un vértice que no esté en G. Prueba que la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \cup \{v\}$ y conjunto de aristas $A(G) \cup \{uv\}$ **es conexa**.

4. Prueba que si G es conexa y no posee ciclos entonces $m = n - 1$. Concluye que si G no posee ciclos entonces $m \leq n - 1$. De aquí que si $m \geq n$ entonces G posee al menos un ciclo. (*Sugerencia.* Hazlo por inducción y utiliza los dos ejercicios anteriores.)

5. Prueba que si G es conexa y satisface que $m = n - 1$ entonces G no posee ciclos (*Sugerencia.* **Utiliza el primer problema**).

6. Prueba que si G no posee ciclos y satisface que $m = n - 1$ entonces G es conexa. (*Sugerencia.* Hazlo por inducción).

7. (a) Muestra que si G es bipartita y H es una gráfica isomorfa a G, entonces H es bipartita.

   (b) Muestra que si G es conexa y H es una gráfica isomorfa a G, entonces H es conexa.

8. Muestra que G es conexa si y sólo si existe un camino abierto que pasa por todos los vértices de G.

9. Demuestra que una gráfica G es bipartita si y sólo si todas sus componentes conexas son bipartitas.

Extras

A. Dada G una gráfica sin vértices aislados, prueba que si G no posee ciclos de longitud impar entonces G es bipartita.

B. Sea G una gráfica de orden n par tal que al menos dos de las componentes de G son completas, prueba que el máximo tamaño posible de G es $\frac{n^2-2n}{4}$.

C. Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica G con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, prueba que la entrada a_{ij} de la matriz A^k, es el número total de (v_i, v_j)-caminos en G de longitud k.