Gráficas y juegos

Cuarta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se entrega individualmente.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los más simples.

1. Prueba que toda gráfica posee una trayectoria de longitud al menos $\delta(G)$. (*Sugerencia.* Considera una trayectoria de longitud máxima, ¿en dónde viven los vecinos de los extremos de la trayectoria?).

2. Dada G una gráfica conexa de orden once y e una arista de corte (también llamadas *puentes*) de G y v un vértice de G.

   (a) Muestra que existe una componente de $G - e$ que posee al menos seis vértices.

   (b) Muestra que $G - v$ no siempre tiene una componente con al menos seis vértices.

3. Prueba que si e es un puente en G entonces existen dos vértices u y v tales que toda (u, v)-trayectoria pasa por e.

4. Prueba que si G es un bosque con ω componentes conexas entonces $m = n - \omega$.

5. Prueba que la distancia entre vértices en una gráfica es una métrica, es decir, que:

   (a) $d(v, u) \geq 0$ y $d(v, u) = 0$ si y sólo si $v = u$.

   (b) $d(v, u) = d(u, v)$.

   (c) $d(v, u) \leq d(u, w) + d(w, u)$.

6. Prueba que toda componente conexa de un bosque es un árbol.

7. Prueba que todo bosque es bipartito.

Extras

A. Muestra que un árbol con exactamente dos hojas es una trayectoria.

B. Prueba que una gráfica G es un bosque si y sólo si toda subgráfica inducida de G contiene un vértice de grado a lo más 1.

C. Una hidrocarburo saturado es una molécula C_mH_n en la cual todo átomo de carbono tiene cuatro enlaces, todo átomo de hidrógeno tiene un solo enlace y ninguna sucesión de enlaces forman un ciclo. Muestra que, para todo entero positivo m, C_mH_n puede existir si y sólo si $n = 2m + 2$.